R
44. 1985
F2557
Hj: 3. no.

1
TOMUL 44
ian. — febr.
1985

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri;

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. D. PAVELESCU,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie*,

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie*.

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa; ROMPRESFILATELIA — Sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78 104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali, difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, Bucureşti

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 44, nr. 1 — ianuarie—februarie 1985

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA F 2557 FOLYÓIRAT OSZTÁLY

SUMAR

N. TRUICĂ, E. SOÓS, Studiul oscilaţiilor de torsiune din transmisia unui automobil pe un model visco-elastic liniar cu două mase. I. Modelul matematic 3

D. ŢAROG, Structuri planare tridirecţionale. Analogia cu un mediu continuu echivalent. II 18

G. ONU, Calculul tablierelor de pod cu secţiune deformabilă 27

D. CONSTANTINESCU, T. V. HUNCKER, I. MOHORA, M. PETRE, Metodă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr. II 51

I. SPULBER, C. SPULBER, Contribuţii la studiul influenţei stratului limită asupra dinamicii supapelor de siguranţă 65

NOTE

S. D. MUŞAT, Metodă matriceală pentru studiul încovoierii grinzii continue pe reazeme elastice interdependente 76

REFERATE

P. P. TEODORESCU, Cîteva consideraţii asupra dezvoltării modelelor matematice ale mecanicii. I 85

RECENZII 98

Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára Folyóiratcsarnok 456/1157

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

2117

STUDIUL OSCILAȚIILOR DE TORSIUNE DIN TRANSMISIA UNUI AUTOMOBIL PE UN MODEL VÎSCO-ELASTIC LINIAR CU DOUĂ MASE. I. MODELUL MATEMATIC

de N. TRUICĂ
ICPITMUA București
E. SOÓS
INCREST București

Prezenta lucrare oferă cercetătorilor și proiectanților din institute de cercetare și proiectare formule pentru calcularea ușoară și rapidă a solicitărilor care se manifestă în timpul funcționării în transmisiile de forță ale automobilelor, mașinilor agricole etc.
În prima parte a lucrării se trece mai întîi în revistă felul în care lucrările de specialitate tratează sistemele oscilante cu două mase și apoi se modelează transmisia unui automobil aflat în procesul ambreierii. În continuare, se calculează răspunsul sistemului cu două mase la excitații armonice și se determină parametrii funcționali ai amortizorului de torsiune. În încheiere se dă un exemplu numeric.

1. INTRODUCERE

În tratatul fundamental al lui Rayleigh [1], oscilațiile sistemelor discrete cu un grad de libertate sînt tratate pe larg (§ 43—68). Problema generală a sistemelor cu n grade de libertate este de asemenea abordată, însă numai calitativ (§ 69—111); se cercetează mai îndeaproape cazul în care energia cinetică, energia potențială și potențialul forțelor de frecare sînt simultan reductibile la formă pătratică, situație destul de rar întîlnită la sistemele reale. În fine, paragrafele 112 — 117 sînt consacrate sistemelor cu 2 grade de libertate, dar sînt luate în considerare numai situații simplificate : vibrații proprii în absența forțelor de frecare, vibrații sub acțiunea unei excitații armonice în prezența frecării; în acest caz, după prezentarea soluției, autorul face doar cîteva considerații cu caracter foarte general privind termenii care pot fi neglijați în unele cazuri; ordinul de mărime al aproximației nu este precizat de Rayleigh.

În tratatul clasic al lui Timoshenko [2] sînt abordate, în partea consacrată oscilațiilor sistemelor discrete cu un grad de libertate, probleme similare celor cercetate de Rayleigh (§ 1 — 20). În paragrafele 30 — 41 autorul expune rezultate privind probleme legate de vibrațiile sistemelor cu n grade de libertate; aici, ca și în tratatul precedent, sînt menționate în special rezultate calitative referitoare la natura mișcărilor posibile; paragrafele 34 — 37 sînt consacrate sistemelor cu 2 grade de libertate, dar sînt luate în considerare doar unele cazuri particulare : vibrații proprii în absența frecărilor, vibrații forțate sub acțiunea unor excitații de natură armonică și vibrații neîntreținute cu amortizare produsă de frecarea vîscoasă liniară.

Tratatul recent [3], elaborat sub redacția lui Harris și Crede, în capitolul 2, „Bazele teoriei vibrațiilor", deși expune amănunțit fenomenele

legate de sistemele discrete cu un grad de libertate, în partea consacrată sistemelor cu n grade de libertate, ca și [1] și [2], prezintă doar rezultate cu caracter calitativ și are în vedere unele cazuri particulare : vibrații proprii în absența frecării, excitații armonice la sisteme nevîscoase, sisteme cu amortizare vîscoasă în cazul în care raportul dintre coeficientul de amortizare și constanta elastică este același pentru toate masele sistemului. Analiza rezultatelor expuse în capitolul menționat arată limpede că sînt studiate numai acele situații în care sistemul de ecuații se decuplează, ceea ce reduce considerabil dificultățile, deoarece din punct de vedere matematic problema devine echivalentă cu cea legată de studiul a n oscilatori linari independenți. Evident, o astfel de separare nu are loc în cazul celor mai multe sisteme reale.

În capitolul 8, „Răspunsul tranzitoriu produs de funcții impuls și de funcții treaptă", deși se abordează o problemă nouă, necercetată de Rayleigh și Timoschenko, considerațiile, cu toate că se referă la o vastă gamă de situații posibile, sînt restrînse, în cazul sistemelor discrete, la probleme cu un grad de libertate.

În tratatul recent al lui Buzdugan, Petcu și Radeș [4], prezentarea sistemelor cu un grad de libertate urmează linia clasică și este completă (cap. II). Capitolul III este consacrat sistemelor liniare discrete cu n grade de libertate. În paragrafele 3.1 — 3.3 se cercetează amănunțit, din punct de vedere calitativ, problema vibrațiilor proprii ale sistemelor pur elastice ; în paragraful 3.4 se determină pentru aceleași sisteme modurile principale de excitație corespunzătoare unor forțe exterioare armonice. Efectul amortizărilor vîscoase este luat în considerare în paragraful 3.5, dar se studiază doar cazul excitațiilor armonice, fără să fie abordată problema condițiilor inițiale și se acordă o mare atenție acelor situații în care sistemul de ecuații diferențiale se decuplează. În fine, paragraful 2 este dedicat sistemelor liniare cu două grade de libertate ; ca și în primele două tratate menționate, se studiază amănunțit cazul vibrațiilor libere și cel al vibrațiilor forțate neamortizate în prezența excitațiilor armonice ; în cazul oscilațiilor amortizate se expun numai situația simplificată a amortizării vîscoase uniforme, a amortizării uniforme a maselor sau situația în care matricea care descrie efectele frecărilor vîscoase are formă diagonală. În cazurile particulare menționate, sistemul se decuplează și rezolvarea problemelor abordate se reduce la studiul a doi oscilatori liniari independenți.

Scurta expunere a rezultatelor menționate arată limpede că în timp ce cazul unui singur oscilator liniar este studiat exhaustiv, atît calitativ, cît și cantitativ, cazul sistemelor discrete cu două sau cu n grade de libertate este cercetat mult mai puțin, iar rezultatele prezentate ori au un caracter pur calitativ, ori, dacă ele sînt cantitative, se referă la cazuri particulare care se obțin în urma impunerii unor condiții care sînt legate mai mult de simplificarea calculelor matematice (vezi, de exemplu, [11], § 4), decît de proprietățile mecanice și fizice reale ale sistemelor materiale modelate.

Existența acestei situații reprezintă unul din motivele pentru care această lucrare a fost elaborată. În lucrare am considerat cazul general al sistemelor oscilante liniare cu frecare vîscoasă cu două grade de libertate, avînd în vedere atît studiul influenței condițiilor inițiale, cît și natura arbitrară a amortizărilor vîscoase și a excitațiilor dinamice exterioare.

Aparatul matematic utilizat are la bază teoria transformatei integrale a lui Laplace [5]. În fine, mai menționăm că am studiat numai acele sisteme care execută oscilații în prezența amortizărilor vîscoase externe sau interne.

2. MODELUL MATEMATIC

Asimilăm transmisia de forță a unui automobil aflat în timpul procesului de ambreiere cu modelul prezentat în figura 2.1.; semnificațiile notațiilor sînt următoarele:

J_m — valoarea medie a momentului de inerție al pieselor cu mișcare din ansamblul motor, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit, în kgm^2;

J_d — momentul de inerție al discului ambreiajului, în raport cu axa sa de rotație, în kgm^2;

J_a — momentele de inerție — al masei automobilului cu mișcare de translație și al maselor cu mișcare de rotație (roți, reductor principal, arbori cardanici, angrenajele cutiei de viteze) — reduse la axa de rotație a arborelui motor, în kgm^2;

φ_m, φ_d, φ_a — deplasări unghiulare, în raport cu axa de rotație a arborelui motor, în radiani.

c — rigiditatea unghiulară a transmisiei de forță, cuprinsă între discul conducător al ambreiajului și roțile motoare, în Nm/rad;

$R(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_a)$ — pierderile de energie din amortizorul ambreiajului, în Nm; metoda pentru determinarea experimentală a coeficientului R este prezentată în lucrarea [12];

$k_m \dot{\varphi}_m$ — pierderile din motor, datorate frecării vîscoase și antrenării agregatelor motor, în Nm;

$k_a \dot{\varphi}_a$ — pierderile din reductoare (cutie de viteze, reductor principal), reduse la axa de rotație a arborelui motor, în Nm;

$\mathcal{M}_1(t) = m_1 + \Sigma r_j \cos(j\omega t - \alpha_j)$ reprezintă cuplul motor, calculat după diagrama indicată a motorului, în funcție de unghiul de manivelă, în Nm;

$\omega = \frac{i}{2} \omega_m$, în care i este numărul de cilindri al motorului;

ω_m — viteza unghiulară a motorului, în rad/s.

$\mathcal{M}_k(t)$ — cuplul de frecare care solicită discul ambreiajului în timpul ambreierii automobilului („cuplul transmisibil al ambreiajului", [10]), în Nm;

$\mathcal{M}_2(t)$ — cuplul rezistent la roțile motoare, redus la axa de rotație a motorului, în Nm;

A — ambreiajul;

T — durata de timp în care se realizează ambreierea automobilului, în secunde.

Ecuațiile de mișcare au fost scrise pentru regimul tranzitoriu al ambreierii, în ipoteza că amortizorul de torsiune permite deformația unghiulară $\varphi_d - \varphi_a = \theta$:

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\varphi}_m + k_m \dot{\varphi}_m &= \mathcal{M}_1(t) - \mathcal{M}_k(t), \\ J_d \ddot{\varphi}_d + R\dot{\theta} + c\theta &= \mathcal{M}_k(t), \\ J_a \ddot{\varphi}_a + k_a \dot{\varphi}_a - R\dot{\theta} - c\theta &= -\mathcal{M}_2(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

pentru $t \in [0, T]$.

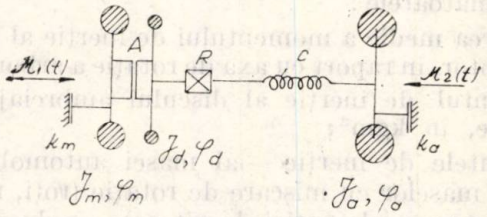


Fig. 2.1

Amplificînd ecuațiile (2.1), respectiv, cu $d\varphi_m$, $d\varphi_d$, $d\varphi_a$, însumîndu-le și integrînd între 0 și T, obținem:

$$\Delta\mathcal{L}_m = \Delta E_{cin} + \Delta E_{rez} + \Delta E_a + \Delta E_c + \Delta E_{def}, \tag{2.2}$$

în care

$\Delta\mathcal{L}_m = \int_0^T (\mathcal{M}_1(t) - k_m \dot{\varphi}_m)\, \dot{\varphi}_m \, dt$ reprezintă lucrul mecanic motor, măsurat la volanta motorului;

$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2} \left| J_m \dot{\varphi}_m^2 + J_d \dot{\varphi}_d^2 + J_a \dot{\varphi}_a^2 \right|_0^T$ — variația energiei cinetice a automobilului în timpul ambreierii;

$\Delta E_{rez} = \int_0^T (\mathcal{M}_2(t) + k_a \dot{\varphi}_a)\, \dot{\varphi}_a \, dt$ — energia consumată pentru învingerea rezistenței la înaintare a automobilului și a frecărilor din reductoare;

$\Delta E_a = R \int_0^T \dot{\theta}^2 \, dt$ — energia disipată prin amortizare vîscoasă în amortizorul de torsiune;

$\Delta E_c = -\int_0^T \mathcal{M}_k(t)\, \dot{q} \, dt$ — energia disipată prin căldură în ambreiaj;

mărimea

$$q = \varphi_d - \varphi_m \tag{2.3}$$

reprezintă deplasarea unghiulară relativă dintre discul conducător al ambreiajului și volanta motorului;

$\Delta E_{def} = \frac{1}{2} c\theta^2 \Big|_0^T$ — variația energiei elastice de deformație din transmisia automobilului.

2.1. *Determinarea cuplului de frecare care solicită ambreiajul* $\mathcal{M}_k(t)$, *în cazul pornirii de pe loc, în următoarele ipoteze*:

— momentul de torsiune care solicită transmisia, $c\theta = X(t)$ și $\omega_m = Y(t)$, sînt cunoscute din înregistrări experimentale, pentru intervalul de timp $[0, T_1]$, $T_1 \geqslant T$;

— se neglijează rezistența aerodinamică; se consideră că

$$\mathcal{M}_2 = c\theta = X(t) \text{ pentru } t \in [0, t_1] \tag{2.4}$$

și respectiv, $\mathcal{M}_2 = M_0 = \text{const.}$ pentru $t \geqslant t_1$;

— momentul t_1 marchează pornirea roților motoare. Pentru $t \in [0, t_1]$ există relațiile:

$$\varphi_a = \dot{\varphi}_a = 0; \quad \varphi_d = \frac{X(t)}{c}. \tag{2.5}$$

Valoarea t_1 se obține rezolvînd grafic ecuația

$$X(t) + \frac{R}{c}\dot{X}(t) = M_0, \tag{2.6}$$

obținută prin introducerea condițiilor (2.5) în $(2.1)_3$.

Din ecuația $(2.1)_2$ obținem:

$$\mathcal{M}_k^*(t) = J_d \frac{\ddot{X}(t)}{c} + \frac{R}{c}\dot{X}(t) + X(t) \text{ pentru } t \in [t_1, T]. \tag{2.7}$$

Notăm cu $\mathcal{M}_k^{**}(t)$ momentul de frecare pentru $t \in [t_1, T]$. Fie $\varphi_a = f(t)$ o soluție particulară a ecuației $(2.1)_3$, cu condiția $(2.4)_2$:

$$J_a \ddot{\varphi}_a + k_a \dot{\varphi}_a = X(t) + \frac{R}{c}\dot{X}(t) - M_0. \tag{2.8}$$

Fiind cunoscută funcția $c(\varphi_d - \varphi_a) = X(t)$, obținem:

$$\varphi_d = f(t) + \frac{X(t)}{c}. \tag{2.9}$$

Momentul T, cînd ia sfîrșit procesul ambreierii, se determină și grafic din condiția $\dot{q} = \dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_m = 0$; obținem

$$\dot{f}(T) + \frac{1}{c}\dot{X}(T) = Y(T). \tag{2.10}$$

Ținînd seama de relația (2.9), ecuația (2.1)$_2$ devine:

$$\mathcal{M}_k^{**}(t) = J_d\left(\ddot{f}(t) + \frac{1}{c}\ddot{X}(t)\right) + \frac{R}{c}\dot{X}(t) + X(t) \text{ pentru } t \in [t_1, T]. \quad (2.11)$$

Întrucît momentul de inerție J_d al discului conducător al ambreiajului este foarte mic în raport cu cel al motorului, se poate neglija primul termen din ecuațiile (2.7) și (2.11). Obținem următoarea relație:

$$\mathcal{M}_k(t) \simeq \frac{R}{c}\dot{X}(t) + X(t), \quad (2.12)$$

valabilă pentru $t \in [0, T]$, calculabilă grafic.

Metoda descrisă în acest paragraf a fost utilizată în lucrarea [9] pentru determinarea momentului de frecare al ambreierii la autocamionul SR 114; redăm din această lucrare diagramele din figurile 2.2 și 2.3.

Cunoașterea momentului de frecare $\mathcal{M}_k(t)$ și a vitezei $\dot{q}(t)$ face posibilă calcularea presiunii medii p dintre volanta motorului și discul ambreiajului în timpul ambreierii:

$$p = \frac{N}{A} = -\frac{\mathcal{M}_k(t)}{n(\mu_0 W_0 - \lambda |\dot{q}| I_0)}; \quad t \in [0, T], \quad (2.13)$$

în care N este forța axială care solicită ambreiajul;

$A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ — aria suprafeței de frecare;

n — numărul suprafețelor de frecare;

$W_0 = \int_{r_1}^{r_2} r\,dA$ — momentul static polar al suprafeței A;

$I_0 = \int_{r_1}^{r_2} r^2\,dA$ — momentul de inerție polar al suprafeței A;

$\mu = \mu_0 - \lambda r |\dot{q}|$ — coeficientul de frecare: față de valoarea statică μ_0, scade cînd viteza relativă liniară $r|\dot{q}|$ crește; λ este un coeficient cunoscut, stabilit experimental.

2.2 Cu notația (2.3), sistemul de ecuații (2.1) devine:

$$(J_m + J_d)\ddot{\varphi}_d + k_m\dot{\varphi}_d + R(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_a) + c(\varphi_d - \varphi_a) = \mathcal{M}_1(t) + Q(t),$$

$$J_a\ddot{\varphi}_a + k_a\dot{\varphi}_a + R(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_d) + c(\varphi_a - \varphi_d) = -\mathcal{M}_2(t), \quad (2.13)$$

în care

$$Q(t) = J_m\ddot{q}(t) + k_m\dot{q}(t)$$

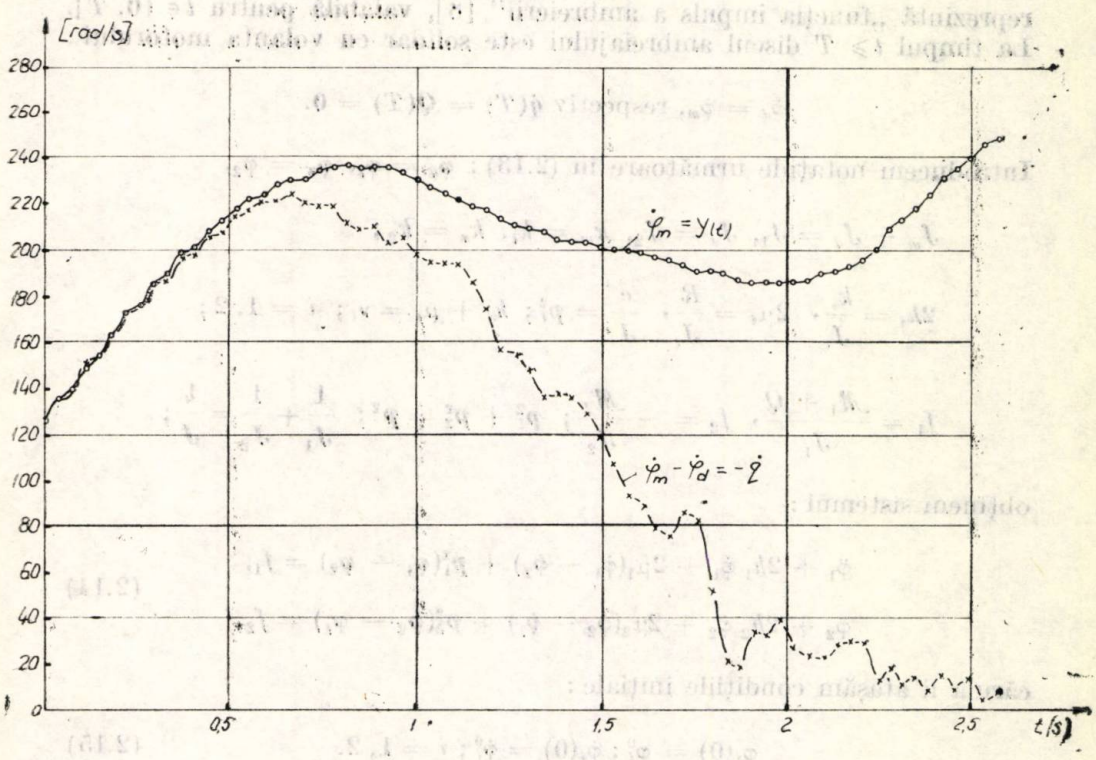

[rad/s]
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0,5
1
1,5
2
2,5
t[s]
$\dot{\varphi}_m = y(t)$
$\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_d = -\dot{e}$

Fig. 2.2

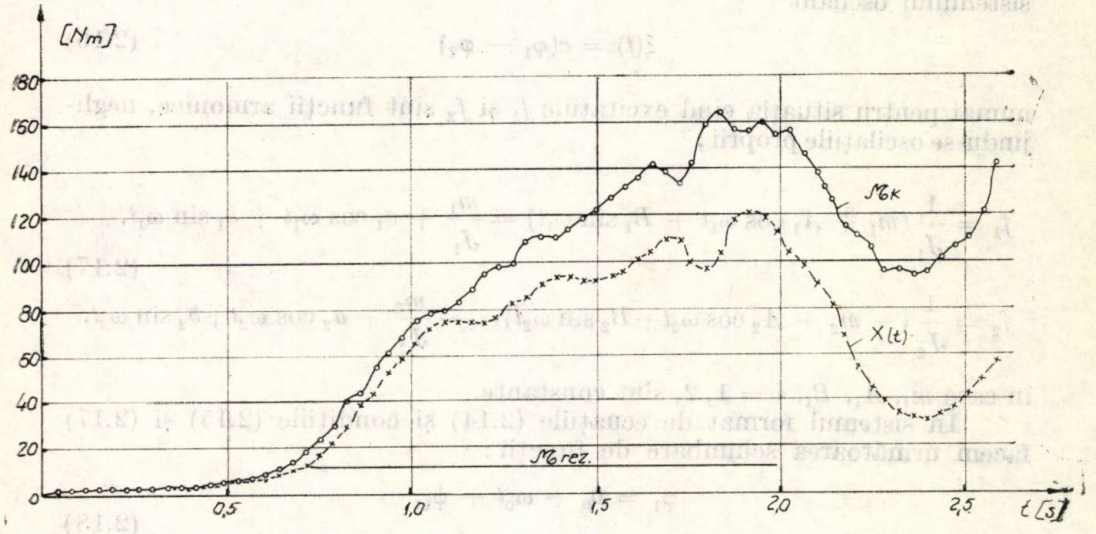

[Nm]
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
t[s]
M_K
X(t)
$M_{rez.}$

Fig. 2.3

reprezintă „funcția impuls a ambreierii" [8], valabilă pentru $t \in [0, T]$. La timpul $t \geqslant T$ discul ambreiajului este solidar cu volanta motorului:

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_m, \text{ respectiv } \dot{q}(T) = Q(T) = 0.$$

Introducem notațiile următoare în (2.13): $\varphi_d = \varphi_1$, $\varphi_a = \varphi_2$,

$$J_m + J_d = J_1,\ J_a = J_2,\ k_m = k_1,\ k_a = k_2;$$

$$2h_i = \frac{k_i}{J_i},\ 2\mu_i = \frac{R}{J_i},\ \frac{c}{J_i} = p_i^2;\ h_i + \mu_i = \nu_i;\ i = 1, 2;$$

$$f_1 = \frac{\mathcal{M}_1 + Q}{J_1},\ f_2 = -\frac{\mathcal{M}_2}{J_2};\ p_1^2 + p_2^2 = p^2;\ \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} = \frac{1}{J};$$

obținem sistemul:

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 + 2h_1\dot{\varphi}_1 + 2\mu_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + p_1^2(\varphi_1 - \varphi_2) = f_1, \\ &\ddot{\varphi}_2 + 2h_2\dot{\varphi}_2 + 2\mu_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + p_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) = f_2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

căruia îi atașăm condițiile inițiale:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i^0;\ \dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_i^0;\ i = 1, 2. \tag{2.15}$$

Un studiu complet al sistemului (2.14) este prezentat în partea a doua a acestei lucrări. În această parte se calculează răspunsul forțat al sistemului oscilant

$$\xi(t) = c(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{2.16}$$

numai pentru situația cînd excitațiile f_1 și f_2 sînt funcții armonice, neglijîndu-se oscilațiile proprii;

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{J_1}(m_1 + A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t) = \frac{m_1}{J_1} + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t, \\ f_2 &= \frac{1}{J_2}(-m_2 + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t) = -\frac{m_2}{J_2} + a_2\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t, \end{aligned} \tag{2.17}$$

în care m_i, A_i, B_i, $i = 1, 2$, sînt constante.

În sistemul format de ecuațiile (2.14) și condițiile (2.15) și (2.17) facem următoarea schimbare de funcții:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_0 + \omega_0 t + \psi_1, \\ \varphi_2 &= \quad\ \omega_0 t + \psi_2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

După efectuarea calculelor, obținem:

$$\ddot{\psi}_1 + 2h_1\dot{\psi}_1 + 2\mu_1(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) + p_1^2(\psi_1 - \psi_2) = a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t,$$
$$\ddot{\psi}_2 + 2h_2\dot{\psi}_2 + 2\mu_2(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1) + p_2^2(\psi_2 - \psi_1) = a_2\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t, \tag{2.19}$$

cu următoarele condiții inițiale:

$$\psi_1(0) = \varphi_1^0 - \theta_0;\ \psi_2(0) = \varphi_2^0,$$
$$\dot{\psi}_1(0) = \dot{\varphi}_1^0 - \omega_0;\ \dot{\psi}_2(0) = \dot{\varphi}_2^0 - \omega_0, \tag{2.20}$$

în care

$$\theta_0 = \frac{m_1 k_2 + m_2 k_1}{c(k_1 + k_2)};\quad \omega_0 = \frac{m_1 - m_2}{k_1 + k_2}.$$

Neglijînd, deci, oscilațiile proprii ale sistemului (2.19), căutăm soluții de forma

$$\psi_i = M_i\cos\omega_1 t + N_i\sin\omega_1 t + \tilde{M}_i\cos\omega_2 t + \tilde{N}_i\sin\omega_2 t;\ i = 1, 2.$$

Cu aceste notații răspunsul sistemului (2.16) capătă forma:

$$\xi(t) = c\theta_0 + M\cos\omega_1 t + N\sin\omega_1 t + \tilde{M}\cos\omega_2 t + \tilde{N}\sin\omega_2 t, \tag{2.21}$$

în care

$$M = c(M_1 - M_2),\ N = c(N_1 - N_2),$$
$$\tilde{M} = c(\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2),\ \tilde{N} = c(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2).$$

Constantele M_i și N_i, $i = 1, 2$, se calculează rezolvînd sistemul:

$$\begin{Vmatrix} p_1^2 - \omega_1^2 & -p_1^2 & 2\nu_1\omega_1 & -2\mu_1\omega_1 \\ -p_2^2 & p_2^2 - \omega_1^2 & -2\mu_2\omega_1 & 2\nu_2\omega_1 \\ -2\nu_1\omega_1 & 2\mu_1\omega_1 & p_1^2 - \omega_1^2 & -p_1^2 \\ 2\mu_2\omega_1 & -2\nu_2\omega_1 & -p_2^2 & p_2^2 - \omega_1^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.22}$$

După efectuarea calculelor, obținem:

$$M = \frac{p_1^2}{\delta_1}(A_1 E_1 - B_1 F_1);\quad N = \frac{p_1^2}{\delta_1}(A_1 F_1 + B_1 E_1), \tag{2.23}$$

în care

$$E_1 = (p^2 - \omega_1^2 + 4h_1\mu_2 - 4h_2\nu_2)\,\omega_1^2 + 4(h_1 p_2^2 + h_2 p_1^2)\,h_2,$$

$$F_1 = 2\omega_1[(\nu_1 + \mu_2)\,\omega_1^2 + (h_2 - h_1)\,p_2^2 + 4(\nu_1\nu_2 - \mu_1\mu_2)\,h_2],$$

$$\delta_1 = (\omega_1^2 + 4h_1h_2)\,[(p^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2(\mu_1 + \nu_2)\,(\mu_2 + \nu_1)] +$$

$$+ 4(h_2 - h_1)\,[4(h_2\mu_1\nu_1 - h_1\mu_2\nu_2)\,\omega_1^2 + (\nu_2 - \nu_1)\,\omega_1^4 +$$

$$+ (h_2 p_1^2 - 2\nu_2\omega_1^2)p_1^2 + (2\nu_1\omega_1^2 - h_1 p_2^2)\,p_2^2].$$

Constantele $\tilde{M}$ și $\tilde{N}$ se obțin din relațiile corespunzătoare (2.23) înlocuind indicii 1 și 2 între ei.

Punem expresia (2.21) sub forma:

$$\xi(t) = c\theta_0 + D_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \tag{2.24}$$

în care

$$D_1 = \sqrt{M^2 + N^2} = \Phi_1\sqrt{A_1^2 + B_1^2};\quad D_2 = \sqrt{\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2} = \Phi_2\sqrt{A_2^2 + B_2^2},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{N}{D_1},\ \sin\alpha_1 = \frac{M}{D_1},\quad \Phi_1 = \frac{p_1^2\sqrt{E_1^2 + F_1^2}}{\delta_1},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\tilde{N}}{D_2},\ \sin\alpha_2 = \frac{\tilde{M}}{D_2},\quad \Phi_2 = \frac{p_2^2\sqrt{E_2^2 + F_2^2}}{\delta_2}.$$

Compunem acum cele două oscilații din (2.24) folosind formulele (22.32) și (22.33) din [13]; obținem astfel:

$$\xi(t) = c\theta_0 + A(t)\sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha(t)\right], \tag{2.25}$$

care

$$A(t) = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2\cos[(\omega_1 - \omega_2)\,t + (\alpha_1 - \alpha_2)]},$$

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg}\left[\frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\right].$$

3. CAZURI PARTICULARE

În cazul pur elastic avem:

$$h_i = \mu_i = \nu_i = 0;\ i = 1, 2;$$

pentru factorii de amplificare obținem expresiile

$$\Phi_i = \frac{p_i^2}{p^2 - \omega_i^2}, \quad i = 1, 2. \tag{3.1}$$

În cazul oscilațiilor slab amortizate vîscos se poate considera cu o aproximație satisfăcătoare că amplitudinea maximă a răspunsului are loc cînd pulsația excitației coincide cu pulsația proprie a sistemului. Considerăm următoarea situație particulară:

$$\omega_1 = \omega_2 = p \text{ și } h_1 = h_2 = h; \qquad \mu_1 + \mu_2 = \mu; \; h + \mu = \nu. \tag{3.2}$$

După efectuarea calculelor, obținem:

$$\Phi_i = \frac{p_i^2}{2\nu p}, \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

Calculăm media factorilor de amplificare:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{p}{4\nu}. \tag{3.4}$$

Amortizorul cu frecare al ambreiajului este astfel construit încît poate executa oscilații ale căror amplitudini nu pot depăși valoarea A, în timpul oscilațiilor manifestîndu-se între discul solidar cu volanta motorului și cel solidar cu butucul discului ambreiajului momentul de frecare constant M_F.

Prezentăm în continuare o metodă aproximativă pentru determinarea parametrilor funcționali A și M_F. Facem în acest scop următoarele ipoteze ([2], p. 60):

a) — oscilația amortizorului este descrisă de o armonică simplă de amplitudine A;

b) — energia disipată prin frecare în timpul unei oscilații este egală cu aceea disipată vîscos cu coeficientul de frecare vîscoasă R, luat în considerare la stabilirea ecuațiilor (2.1).

Adăugăm ipotezelor de mai sus încă două:

c) excitația al cărei răspuns vrem să-l amortizăm are pulsația unghiulară egală cu pulsația proprie p a sistemului oscilant:

$$\mathcal{M}_i = ac \sin(pt + \alpha); \; i = 1 \text{ sau } 2, \tag{3.5}$$

c este rigiditatea sistemului oscilant;

d) pentru calcularea amplitudinii răspunsului sistemului utilizăm formula (3.4):

$$A = \frac{p}{4\nu} a. \tag{3.6}$$

Din primele două condiții obținem egalitățile:

$$E_F = 4A \quad M_F = \pi A^2 pR. \tag{3.7}$$

Ținînd seama de (3.6) din ecuația ultimă obținem

$$M_F = \frac{\pi ac(\nu - h)}{8\nu}. \tag{3.8}$$

Înlocuim în (3.7) pe A și M_F cu expresiile (3.6), respectiv (3.8) și punem condiția ca energia disipată să fie maximă. Obținem condiția

$$\nu = 2h, \tag{3.9}$$

care determină valorile optime ale parametrilor funcționali ai amortizorului cu frecare:

$$M_F = \frac{\pi}{16} ac; \quad A = \frac{ap}{8h}; \quad R = 2hJ. \tag{3.10}$$

Cu acești parametri obținem pentru energia disipată într-o oscilație completă valoarea:

$$E_{F,max} = \frac{\pi a^2 cp}{32h}. \tag{3.11}$$

Pentru ca amortizorul să poată oscila, între cele două discuri care îl cuprind, se montează n resoarte cilindrice elicoidale, cu rigiditatea liniară c_0, dispuse tangențial circumferinței de rază r_0.

Determinăm rigiditatea c_0 din condiția ca resoartele, în urma deformației unghiulare de amplitudine A, să creeze un moment de torsiune egal cu cel care se manifestă în transmisia sistemului; obținem:

$$nc_0 r_0^2 = c. \tag{3.12}$$

Un amortizor de torsiune astfel dimensionat va diminua efectul pe care l-ar avea asupra transmisiei o excitație armonică de amplitudine ac, a cărei pulsație coincide cu pulsația proprie p a sistemului oscilant. Eficiența lui va fi maximă numai în treapta de viteze (rigiditatea c) și pentru starea de încărcare a mașinii (momentul de inerție total J) pentru care a fost calculat, constituind un dispozitiv de protecție a transmisiei față de fenomenul cunoscut sub numele de „rezonanță".

Exemplu numeric: transmisia autocamionului SR 114[9]; cutia de viteze în priză directă (raportul de transmisie total 8,26), masa totală 7 tone;

$$J_1 = 0{,}6 \text{ kg m}^2; \quad J_2 = 24 \text{kg m}^2; \quad c = 400 \text{ Nm/rad}.$$

În figura 3.1 prezentăm graficele factorilor de amplificare Φ_1 și Φ_2 în cazul pur elastic (formulele 3.1):

$$k_1 = k_2 = R = 0.$$

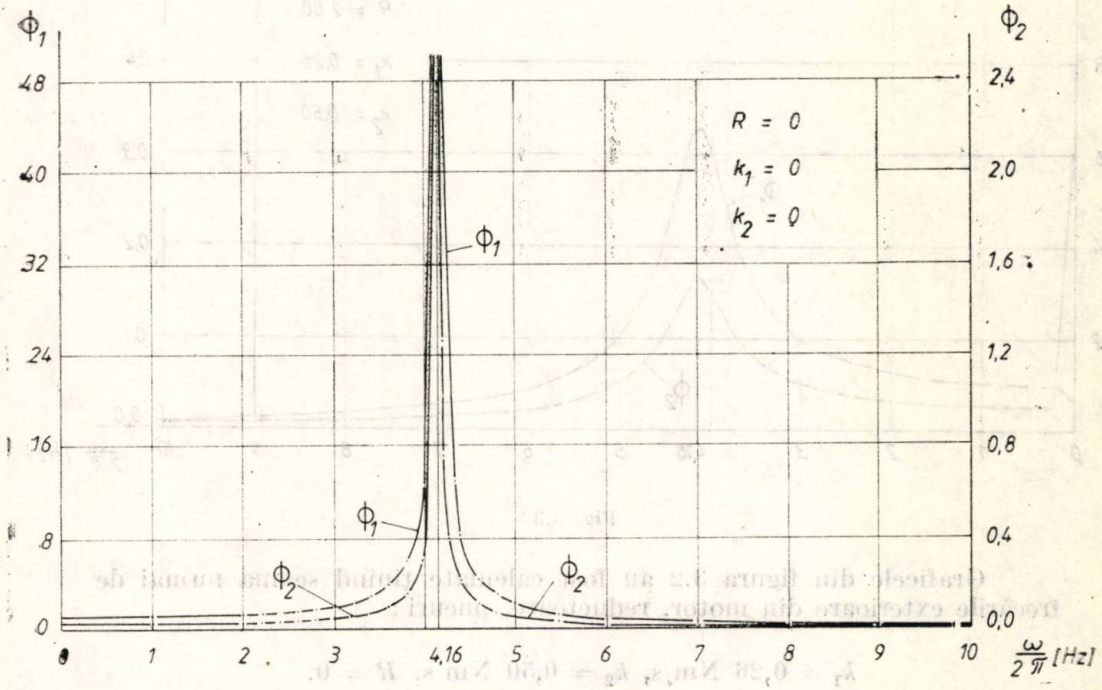


Fig. 3.1

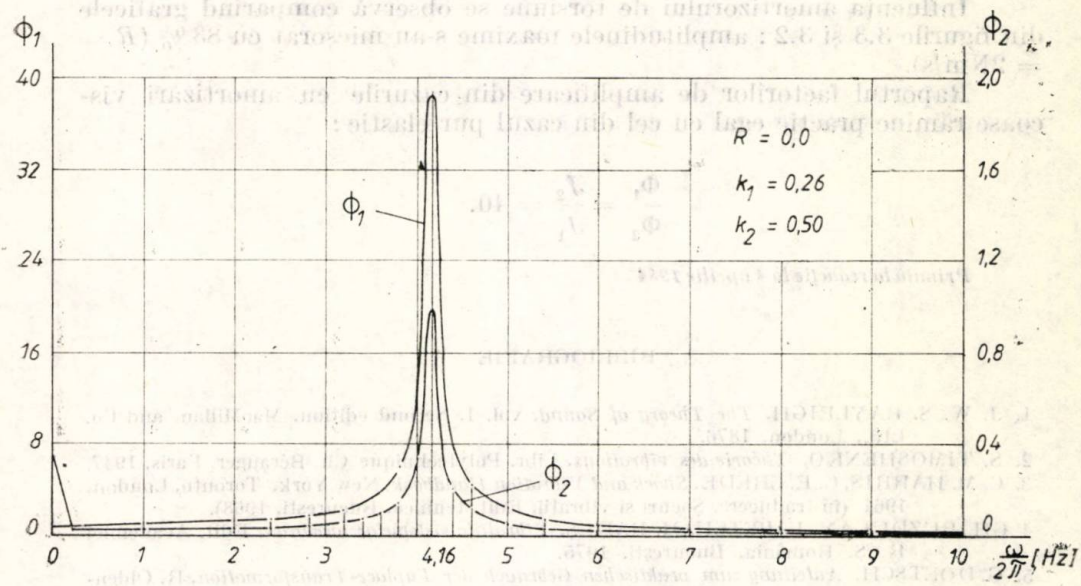


Fig. 3.2

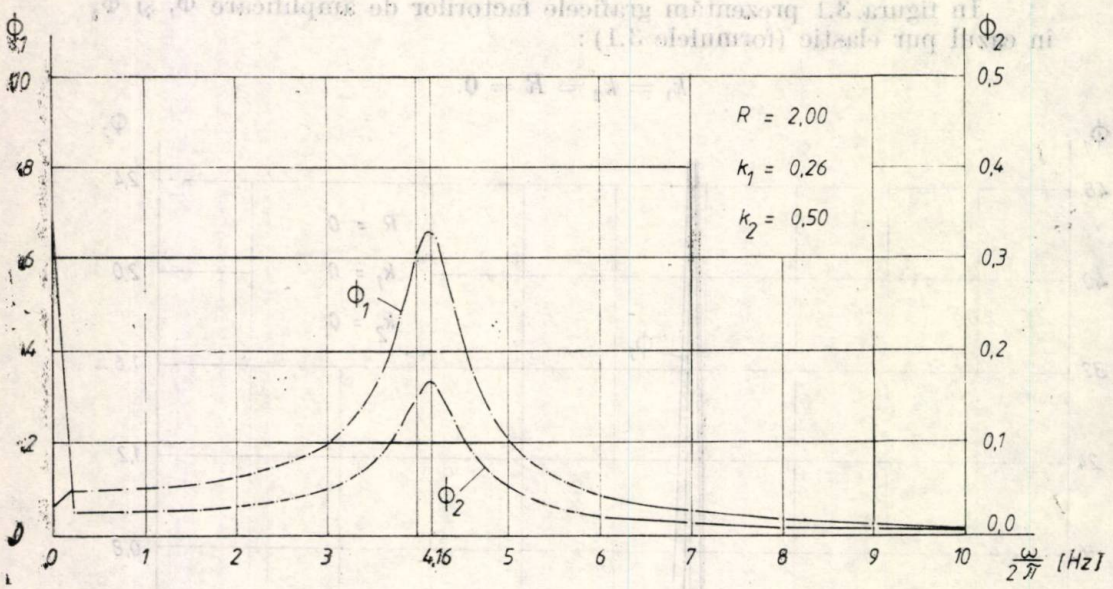


Fig. 3.3

Graficele din figura 3.2 au fost calculate ţinînd seama numai de frecările exterioare din motor, reductoare, pneuri :

$$k_1 = 0{,}26 \text{ Nm/s}, \; k_2 = 0{,}50 \text{ Nm/s}, \; R = 0.$$

Influenţa amortizorului de torsiune se observă comparînd graficele din figurile 3.3 şi 3.2 : amplitudinile maxime s-au micşorat cu 83 % ($R = 2\text{Nm/s}$).

Raportul factorilor de amplificare din cazurile cu amortizări vîscoase rămîne practic egal cu cel din cazul pur elastic :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{J_2}{J_1} = 40.$$

Primită la redacţie la 4 aprilie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. J. W. S. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, vol. I, Second edition, MacMillan and Co. Ltd., London, 1876.
2. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations*, Libr. Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1947.
3. C. M. HARRIS, C. E. CREDE, *Shock and Vibration Handbook*, New York, Toronto, London, 1961 (în traducere, Şocuri şi vibraţii, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968).
4 GH. BUZDUGAN, L. PETCU, M. RADEŞ, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Edit. Academiei R. S. România, Bucureşti, 1975.
5. G. DOETSCH, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, R. Oldenbourg, München, 1961.

6. V. S. VLADIMIROV, *Uravnenia matematicescoi fiziki*, Izd. Nauka, Moskva, 1963.
7. I. M. RÎJIC, I. S. GRADȘTEIN, *Tabele de integrare, sume, serii și produse*, Edit. tehnică, București, 1955 (Traducere din l. rusă).
8. FL. DUDIȚĂ, *Regimuri tranzitorii in transmisia automobilului*, St. Cerc. mec. Apl., **16**, *3* (1964).
9. *Influența amortizorului cu frecare al ambreiajului asupra solicitărilor transmisiei autocamioanelor*, Contract de cercetare științifică CMS București — ICPAT Brașov, 1974, 1975.
10. N. TRUICĂ, M. MITRACHE, *Model cu 3 mase pentru studiul vibrațiilor de torsiune din transmisia de forță a automobilelor in regimuri de funcționare tranzitorii*, Conferința „Vibrații in construcția de mașini", Timișoara, 1975.
11. N. TRUICĂ, *Un model matematic al sistemului oscilant format de suspensia și transmisia unui automobil aflat in regim de funcționare tranzitoriu*, St. Cerc. Mec. Apl., **36**, *5* (1977).
12. N. A. BUHARIN, ș.a., *Opredelenie koefițientov demfirovania v transmisii avtomobilia*, Avtomobilnaia Promîșlenosti, *11* (1974).
13. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații in inginerie*, vol. III, Edit. tehnică, București, 1981.

STRUCTURI PLANARE TRIDIRECȚIONALE. ANALOGIA CU UN MEDIU CONTINUU ECHIVALENT. II

de DORIN ȚAROG

I.P.J. BAIA MARE

Se studiază grupa structurilor planare tridirecționale, cu cele două rețele formate, în cazul general, din triunghiuri scalare, care, prin particularizare, pot deveni isoscele sau echilaterale. Analiza se efectuează atît după sistemul de axe propriu structurii, cît și după clasicul sistem cartezian de axe. Studiul furnizează date privind analogia dintre structurile planare avute în vedere și un mediu continuu de tipul plăcilor plane. Rezultă ca cel mai simplu model de calcul, analiza după sistemul de axe propriu structurii.

8. STRUCTURA CU RIGIDITATEA VARIABILĂ

Din studiul structurilor planare, utilizate cu precădere la realizarea acoperișurilor de mare deschidere, apare necesară analiza cazului cel mai general de structură cu rigiditatea variabilă, astfel încît secțiunile barelor să fie în concordanță cu eforturile axiale, tinzîndu-se spre o structură de egală rezistență. Avîndu-se în vedere numărul mare de bare componente ale unei astfel de structuri, problema are o deosebită importanță sub aspect economic și de siguranță în exploatare. Realizîndu-se un astfel de calcul, problemele de optimizare privind costul și consumul minim de materiale se pot rezolva într-un mod mult mai satisfăcător.

De asemenea, un astfel de calcul poate da indicații asupra erorilor care se fac în proiectare, cînd structura se calculează considerînd rigidități constante pe toate direcțiile, iar dimensionarea se face în funcție de eforturile rezultate, deci în final se obține de fapt, o structură cu rigiditate variabilă.

Studiul va pleca de asemenea de la cazul cel mai general de structură planară cu rețelele formate din triunghiuri scalene, făcîndu-se apoi particularizările necesare.

8.1. ANALIZA DUPĂ SISTEMUL DE AXE R S T

a) *Rigiditatea structurii.* Luînd în discuție expresiile rigidităților structurii după cele trei direcții date de relațiile (46),se constată că elementele care influențează mărimea și variația lor sînt cele de natură geometrică (l_i, A_i, h, φ_i), la care se adaugă proprietățile materialului definite de modulul de elasticitate (E). Aceste caracteristici se pot grupa în trei categorii, după modul lor de influențare a mărimii rigidităților, astfel:

- Elementul care poate da o variație a rigidității este secțiunea transversală a barelor, care poate varia după o anumită lege în dreptul fiecărei familii de bare sau a nodurilor, după o funcție $A_i = f_1(rst) = f_2(xy)$ derivabilă de cel puțin două ori.
- Elemente constante pe direcția unei familii de bare, care îi pot conferi un caracter general de anizotropie. Aceste elemente sînt : lungimea barelor care compun rețelele (l_i) și unghiurile de înclinare a familiilor de bare (φ_i).

• Elemente constante pe întreaga structură care îi conferă un caracter de izotropie. Aceste elemente sînt : înălțimea constantă a structurii (h) și modulul de elasticitate (E).

Menționăm faptul că structurii i se poate conferi o variație a rigidității și prin varierea după o anumită lege a înălțimii h, dar o astfel de soluție creează dificultăți tehnologice în execuția structurii.

Conform relațiilor (46), rigiditatea se exprimă prin caracteristicile din dreptul barelor. În cazul unei analize a structurii cu rigiditate variabilă, în special atunci cînd se operează cu metode de calcul numerice, calculele făcîndu-se în anumite puncte care, de cele mai multe ori sînt nodurile structurii, interesează de fapt valoarea unei rigidități convenționale în dreptul acestor noduri. Aceste rigidități de nod se pot stabili cu relații de forma :

$$k_{in} = 2\,\frac{k'_{ib}\cdot k''_{ib}}{k'_{ib}+k''_{ib}} \quad \text{sau} \quad k_{in} = \frac{k'_{ib}+k''_{ib}}{2}, \tag{81}$$

unde k'_{ib} și k''_{ib} sînt rigiditățile celor două bare orientate după direcția i care concură în nodul n.

b) *Ecuația de bază.* Eforturile din barele rețelei conform relațiilor (33) se pot scrie ținînd cont de relația (46) astfel :

$$N_i = -\frac{k_i}{h}\,\frac{\partial^2 w}{\partial i^2}. \tag{82}$$

Substituind aceste valori în relația (49) se obține :

$$l_r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(k_r\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)+l_s\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(k_s\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)+l_t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(k_t\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=P. \tag{83}$$

Dezvoltînd această relație, se obține ecuația de bază pentru cazul cel mai general de structură cu rețelele formate din triunghiuri scalene și cu rigiditatea variabilă, astfel :

$$l_r k_r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+l_s k_s\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+l_t k_t\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+$$

$$+2\left(l_r\frac{\partial k_r}{\partial r}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+l_s\frac{\partial k_s}{\partial s}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+l_t\frac{\partial k_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\right)+$$

$$+l_r\frac{\partial^2 k_r}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+l_s\frac{\partial^2 k_s}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+l_t\frac{\partial^2 k_t}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P. \tag{84}$$

Din cele trei grupe de termeni ai ecuației de mai sus, primul termen corespunde ecuației (47) și deci dă un caracter anizotropic relației. Ceilalți doi termeni introduc influența variației rigidității. Dacă secțiunea

barelor variază după o lege liniară (ordinul I), ultima grupă de termeni dispare.

Ecuația (84) poate fi scrisă concentrat și sub următoarea formă :

$$\sum^{3} l_i \left(k_i \frac{\partial^4 w}{\partial i^4} + 2 \frac{\partial k_i}{\partial i} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial i^3} + \frac{\partial^2 k_i}{\partial i^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial i^2} \right) = P. \tag{85}$$

Așa cum am văzut, singurul element care conferă rigidității variabilitate este secțiunea transversală a barei A_i, deci ecuația (85) se poate scrie și astfel :

$$\sum^{3} l_i \left(A_i \frac{\partial^4 w}{\partial i^4} + 2 \frac{\partial A_i}{\partial i} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial i^3} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial i^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial i^2} \right) = \frac{2P}{Eh^2}. \tag{86}$$

Ecuațiile (84) (85) (86) pot fi particularizate în diverse moduri, funcție de tipul triunghiului constituent al rețelelor și funcție de secțiunea transversală a barelor. Pentru exemplificare, vom considera o structură cu rețelele formate din triunghiuri echilaterale și rigiditatea structurii egală pe cele trei direcții, calculată în noduri cu una din relațiile (81) dar variabilă pe „suprafața structurii", rezultînd :

$$k \sum^{3} \frac{\partial^4 w}{\partial i^4} + 2 \sum^{3} \frac{\partial k}{\partial i} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial i^3} + \sum^{3} \frac{\partial^2 k}{\partial i^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial i^2} = \frac{P}{l}. \tag{87}$$

c) *Expresiile eforturilor.* Referitor la eforturile mediului continuu echivalent, se poate afirma că pentru momentele încovoietoare M_r, M_s, M_t rămîn valabile și în acest caz relațiile stabilite anterior, în timp ce pentru forțele tăietoare apar expresiile :

$$T_r = - \frac{\partial k_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - k_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}, \qquad T_s = - \frac{\partial k_s}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - k_s \frac{\partial^3 w}{\partial s^3},$$

$$T_t = - \frac{\partial k_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - k_t \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}. \tag{88}$$

Pentru eforturile din barele rețelelor rămîn valabile relațiile (33) stabilite anterior dar pentru eforturile din diagonale expresiile se modifică funcție de relațiile (88), devenind :

$$D_r = - \frac{Eh^2}{2 \sin \alpha} \left(\frac{\partial A_s}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial A_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_s \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + A_t \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} \right),$$

$$D_s = - \frac{Eh^2}{2 \sin \alpha} \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial A_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - A_t \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} \right), \tag{89}$$

$$D_t = - \frac{h^2}{2 \sin \alpha} \left(- \frac{\partial A_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial A_s}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - A_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - A_s \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right).$$

Relațiile între eforturi și încărcări, stabilite prin relațiile (49) (50) (51) și (52), rămîn valabile și în acest caz mai general.

8.2. ANALIZA DUPĂ SISTEMUL DE AXE $x\ y$

Studiul îl vom dezvolta și în acest caz pe fișii de lățime unitară, pentru a facilita o mai ușoară analogie cu placa plană cu rigiditatea variabilă (placa cu înălțime variabilă).

a) *Caracteristicile rigidității.* Se vor considera de asemenea rigiditățile după sistemul de axe proprii structurii date de relațiile (54). Prin transpunerea ecuației (84) din sistemul de axe $r\ s\ t$ în sistemul cartezian de axe $x\ y$, se observă că caracteristicile de rigiditate apar sub trei forme și anume:

— Coeficienți nemodificați conform relațiilor (56).

— Derivatele parțiale de ordinul I a acestor coeficienți. Pentru scrierea lor se adoptă în prealabil următoarele substituții:

$$\delta_1 B_i = \frac{\partial B_i}{\partial x}\cos^2\varphi_i + \frac{\partial B_i}{\partial y}\sin\varphi_i\cos\varphi_i,$$
$$\delta_2 B_i = \frac{\partial B_i}{\partial x}\sin\varphi_i\cos\varphi_i + \frac{\partial B_i}{\partial y}\sin^2\varphi_i. \tag{90}$$

Între aceste două substituții există relația:

$$\operatorname{tg}\varphi\,\delta_i B_1 = \delta_2 B_i. \tag{91}$$

Acești coeficienți care intervin sub forma unor derivate parțiale de ordinul I se scriu cu ajutorul substituțiilor (90) astfel:

$$E_1 = \sum \delta_1 B_i \cos^2\varphi_i,$$
$$E_{12} = \sum \delta_1 B_i \sin\varphi_i\cos\varphi_i = \sum \delta_2 B_i \cos^2\varphi_i,$$
$$E_{21} = \sum \delta_2 B_i \sin\varphi_i\cos\varphi_i = \sum \delta_1 B_i \sin^2\varphi_i, \tag{92}$$
$$E_2 = \sum \delta_2 B_i \sin^2\varphi_i.$$

— Derivatele parțiale de ordinul II ale coeficienților de rigiditate. Se adoptă în prealabil următoarea notație:

$$\Delta B_i = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2}\cos^2\varphi_i + 2\frac{\partial^2 B_i}{\partial x\partial y}\sin\varphi_i\cos\varphi_i + \frac{\partial^2 B_i}{\partial y^2}\sin^2\varphi_i. \tag{93}$$

Cu această substituție, coeficienții se exprimă astfel:

$$F_1 = \sum^{3} \Delta B_i \cos^2\varphi_i,\ F_0 = \sum^{3} \Delta B_i \sin\varphi_i \cos\varphi_i,\ F_2 = \sum^{3} \Delta B_i \sin^2\varphi_i. \quad (94)$$

b) *Ecuația de bază.* Cu ajutorul coeficienților stabiliți mai sus, ecuația de bază pentru cazul cel mai general al structurii avînd geometria cu caracteristici anizotrope și rigiditatea variabilă, în coordonate carteziene, este de forma:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 6D_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} +$$

$$+ 2\left({}_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3E_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3E_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + E_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) +$$

$$+ F_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p. \quad (95)$$

Această ecuație este analoagă cu ecuația cunoscută din teoria plăcilor plane de grosime variabilă [9], cu specificația că, în cazul plăcii, într-un punct rigiditatea este egală pe ori ce direcție, în funcție de înălțimea plăcii în punctul respectiv, avînd un caracter izotrop, în timp ce, în cazul structurii planare, rigiditatea într-un nod variază după direcția considerată, avînd deci un caracter anizotrop. Prin diverse particularizări ale elementelor care influențează variația rigidității, se pot obține structuri planare cu rigiditate variabilă, avînd caracter ortotrop sau izotrop. Practic, o analogie cu placa de înălțime variabilă se poate face numai în acest ultim caz. Se remarcă în această ecuație coeficienții cifrici, care se înscriu în triunghiul lui Pascal (coeficienți binomiali).

În ecuația (95) încărcarea uniform repartizată este conform relației (55).

c) *Eforturile mediului continuu.* Pentru momentele încovoietoare și de torsiune rămîn valabile relațiile corespunzătoare din (58). Forțele tăietoare în acest caz se exprimă cu următoarele relații:

$$T_x = D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} +$$

$$+ E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + E_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (96)$$

$$T_y = D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} +$$

$$+ E_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Relațiile între eforturi și încărcări rămîn valabile cu cele stabilite anterior (62) (63). Aceste relații au un caracter general, fiind valabile atît în cazul plăcilor plane, cît și în cazul structurilor planare, indiferent de geometria structurii sau de variația rigidității.

9. OBSERVAȚII FINALE ȘI CONCLUZII

În cadrul acestei lucrări, s-au analizat cazurile de structuri planare tridirecționale, cu rețelele formate, în cazul cel mai general, din triunghiuri scalene care, prin particularizare, pot deveni triunghiuri isoscele sau echilaterale.

Cele trei tipuri de structuri avute în vedere sînt reprezentate pentru simplificare numai prin geometria rețelelor în figura 8, unde se prezintă și sistemele de axe avute în vedere.

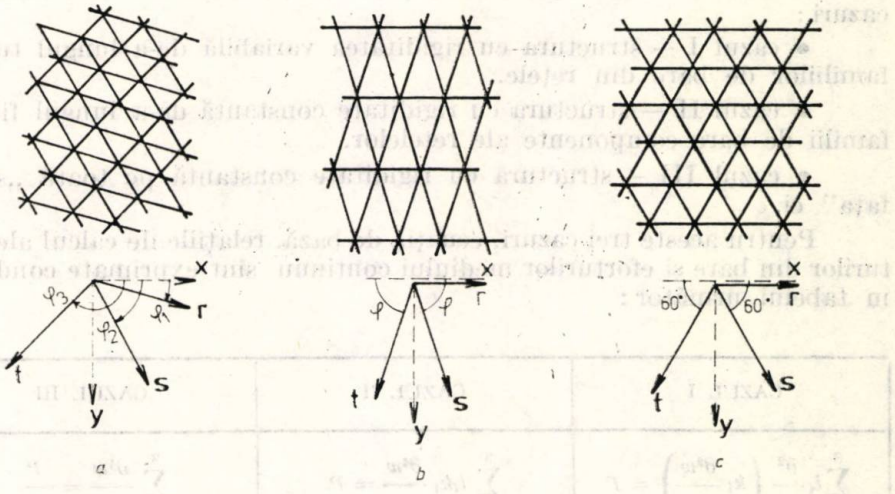


Fig. 8. — Tipurile de rețele analizate în lucrare și sistemele de axe aferente.

Geometria celor două rețele este identică, dar decalate între ele, astfel că un nod dintr-o rețea corespunde cu centrul cercului circumscris triunghiului component din cealaltă rețea.

Studiul s-a dezvoltat avînd la bază două sisteme de axe distincte și anume :

- sistemul de axe propriu structurii $r\ s\ t$, fiind deci orientat după direcțiile celor trei familii de bare care compun rețelele.
- sistemul cartezian de axe x, y, utilizat curent în mecanica construcțiilor și care permite o analogie între structurile planare analizate și un mediu continuu de tipul plăcilor plane.

Trecerea de la un sistem de axe la celălalt, se face cu relații de forma :

$$X = \sum_i \cos\varphi_i,\quad Y = \sum_i \sin\varphi_i. \tag{97}$$

a) *Studiul după sistemul de axe r s t* conduce la următoarele concluzii cu caracter general:

— Sistemul de axe fiind cel mai corespunzător pentru structura analizată, el furnizează relații de calcul simple, ușor de mînuit. Se pare că metoda diferențelor finite este cea mai adecuată în acest caz, permițînd elaborarea unor programe de calcul eficiente.

— Modelul de calcul propus, cu toate aproximațiile introduse, devine util și eficace în proiectare, întrucît se scrie o singură ecuație pentru fiecare nod dintr-o singură rețea, în locul a șase ecuații cîte se scriu în metoda deformațiilor (cîte trei ecuații pentru nodurile din ambele rețele). Acest lucru este foarte important dacă se are în vedere capacitatea actuală a calculatoarelor pe care le avem la dispoziție.

— În studiul după sistemul de axe *r s t*, relațiile de calcul nu sînt influențate de geometria structurii, ci numai de modul de variație a secțiunilor transversale a barelor din rețele. Astfel, se deosebesc următoarele cazuri:

- cazul I — structura cu rigiditatea variabilă de-a lungul tuturor familiilor de bare din rețele.
- cazul II — structura cu rigiditate constantă de-a lungul fiecărei familii de bare componente ale rețelelor.
- cazul III — structura cu rigiditate constantă pe toată „suprafața" ei.

Pentru aceste trei cazuri, ecuația de bază, relațiile de calcul ale eforturilor din bare și eforturilor mediului continuu sînt exprimate condensat în tabelul următor:

CAZUL I	CAZUL II	CAZUL III
$\sum_{i}^{3} l_i \frac{\partial^2}{\partial i^2}\left(k_i \frac{\partial^2 w}{\partial i^2}\right) = P$	$\sum_{i}^{3} l_i k_i \frac{\partial^4 w}{\partial i^4} = P$	$\sum_{i}^{3} \frac{\partial^4 w}{\partial i^4} = \frac{P}{kl}$
$N_i = \pm \frac{k_i}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial i^2}$		
$D_i = \frac{1}{\sin\alpha} \sum_{i}^{2}\left[\pm \frac{\partial}{\partial i}\left(k_i \frac{\partial^2 w}{\partial i^2}\right)\right]$	$D_i = \frac{1}{\sin\alpha} \sum_{i}^{2}\left(\pm k_i \frac{\partial^3 w}{\partial i^3}\right)$	$D_i = \frac{k}{\sin\alpha} \sum_{i}^{2}\left(\pm \frac{\partial^3 w}{\partial i^3}\right)$
$M_i = k_i \frac{\partial^2 w}{\partial i^2}$		
$T_i = \frac{\partial}{\partial i}\left(k_i \frac{\partial^2 w}{\partial i^2}\right)$	$T_i = k_i \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$	

b) *Studiul după sistemul de axe x y* permite tragerea următoarelor concluzii :

— Analiza după sistemul cartezian de axe permite generalizarea rezultatelor, datorită faptului că toate tipurile de structuri se studiază în raport cu același sistem de axe. Ecuațiile de bază, cît și relațiile de calcul pentru eforturi, au rezultate analoage sub aspect calitativ cu cele cunoscute din teoria plăcilor plane.

— Din acest punct de vedere, structurile planare tridirecționale analizate se împart similar cu categoriile din teoria plăcilor astfel :

- structuri anizotrope — în cazul rețelelor formate din triunghiuri scalene.
- structuri ortotrope — în cazul rețelelor formate din triunghiuri isoscele.
- structuri izotrope — în cazul rețelelor formate din triunghiuri echilaterale.

Deci această categorisire este dictată numai de geometria rețelelor. Pe lîngă aceste trei categorii apare și grupa mai generală a structurilor cu rigiditatea variabilă, la care se păstrează caracteristicile de tropie date de rețele, și apare în plus variația rigidității dată de variația secțiunii transversale a barelor. Ecuațiile obținute în acest caz sînt mai generale decît cele cunoscute din teoria plăcilor de înălțime variabilă.

— Analogia dintre structura planară și un mediu continuu de tipul plăcilor plane apare interesantă și sub aspectul studiului de ansamblu în teoria structurilor. Dacă procedeul de discretizare a unei structuri continue se utilizează relativ curent în vederea rezolvării prin metode numerice, procedeul de continuizare a unei structuri discontinue este mai rar întîlnit, deși reprezintă în fond cealaltă fațetă a aceluiași principiu.

c) *Concluziile finale* care se impun în urma efectuării prezentului studiu sînt următoarele :

— Structurile tridirecționale analizate permit realizarea unor acoperișuri de mare deschidere cu contururi diverse. În figura 9 sînt prezentate cîteva din aceste contururi posibile, gama lor fiind evident mai mare.

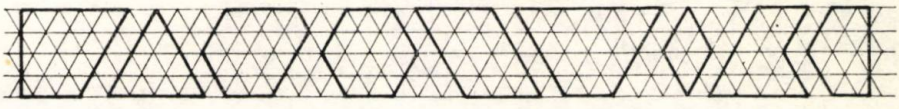


Fig. 9. — Exemplificări de contururi.

— Modelele de calcul prezentate în lucrare pot fi adoptate și pentru grupa structurilor planare bidirecționale sau la categoria structurilor tridirecționale cu o rețea rară. Această ultimă categorie poate furniza structuri economice, cînd se adoptă pentru rețeaua inferioară o rețea rară, barele fiind solicitate la întindere.

— Rezultatele obținute în lucrare sînt mai generale decît cele cunoscute din literatura de specialitate [1, 2, 4, 5, 6], care se limitează la studiul structurilor izotrope. În plus, în aceste lucrări analiza se face numai după sistemul cartezian de axe cu un volum de muncă mai mare decît în sistemul de axe propriu structurii, așa cum se face în modelul de calcul din lucrare.

— S-a demonstrat, de asemenea, că relațiile între eforturi și încărcări, cunoscute din teoria plăcilor plane, sînt valabile și pentru structurile planare. În plus, în lucrare s-au exprimat aceste relații și în sistemul de axe propriu structurii, ceea ce poate reprezenta un instrument eficace de muncă în proiectare.

— Este evident că modelele de calcul propuse sînt aplicabile numai în cazul unor structuri planare de mari dimensiuni și deci cu multe bare pe toate direcțiile, care să permită trecerea la limită din diferențe finite în derivate parțiale. De asemenea, studiul este valabil numai în cazul unor structuri avînd cele două rețele cu geometrie identică.

Primită la redacție la 15 martie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. P. BUENO, J. CALAVERA, *Flat roofs made of tubular space structures*, Space structures. R. M. Davies editor, London, 1967.
2. R. I. HISAMOV, *Priblijennii rascet prostranstrennîh sterjnevih pokritii*, Stroitelnaia mehanica i rascet soorujenii, Moskva, 1—65.
3. L. KOLLAR, I. HEGEDUS, *Solution of double — layer space trusses of general triangular grids by the equivalent continuum method*. Acta Technika, *3*, *4*, 73.
4. F. LEDERER, *Fachwerk und Rostplatten*, Werner Verlag, Düsseldorf, 1972.
5. J. D. RENTON, *The related behaviour of plate grids, space grids and plates*, Space structures, R. M. Davies editor, London, 1967.
6. J. D. RENTON, *General properties of space grids*, International Journal of mechanical sciences, *9* (1970).
7. M. SOARE, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul rețelelor spațiale planare pătrate*. St. cerc. mec. apl., *3* (1969).
8. M. SOARE, *Statica și dinamica rețelelor spațiale planar pătrate simple prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent*, St. cerc. mec. apl., *3* (1972).
9. M. SOARE, *Plăci plane*, Secțiunea VI din Manualul pentru calculul construcțiilor, Edit. tehnică, 1977.
10. Z. S. MAKOVSKI (Edited by) *Analysis, design and construction of double — layer grids*, Applied science publishers LTD, London, 1981.
11. D. ȚAROG, *Generalizarea analogiei structurilor planare cu un mediu continuu*, Sesiunea științifică a I.P.C.N. — Metode de calcul ale construcțiilor — octombrie 1978.
12. D. ȚAROG, *Analogia structură planară — mediu continuu*, Buletinul științific al Institutului de Construcții, București, 1980.

CALCULUL TABLIERELOR DE POD CU SECȚIUNE DEFORMABILĂ

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale și Aeriene.

Se prezintă un procedeu derivat din metoda elementului finit, pentru calculul tablierelor cu secțiune închisă sau semideschisă. Modelul de calcul utilizat recurge la o împărțire în tronsoane a tablierului, deplasările unor puncte din rosturile care separă tronsoanele fiind parametrii nedeterminați ai structurii. Prin micșorarea numărului acestor parametri, pe baza unor ipoteze simplificatoare, se obține o reducere însemnată a efortului de calcul.

1. INTRODUCERE

Considerente economice, estetice și de rezistență au impus utilizarea tablierelor cu secțiune deformabilă la construcția suprastructurilor de pod. Aceste tabliere, cu secțiune transversală închisă sau semideschisă, sînt structuri tridimensionale alcătuite din pereți longitudinali plini, placă sau contravîntuire inferioară, placă superioară și un număr redus de cadre, diafragme sau contravîntuiri transversale. Corecta dimensionare a tablierelor de acest tip nu se poate realiza fără a lua în considerație efectul deformării secționale în cadrul conlucrării de ansamblu a structurii.

Metoda elementului finit constituie cel mai complet instrument de calcul al acestor structuri [34, 20, 22, 13], domeniul ei de aplicabilitate cuprinzînd toate tipurile de tabliere. Pentru categoria tablierelor cu secțiune deformabilă, metoda se poate aplica pornind de la premisa că tablierul este constituit din elemente bidimensionale a căror stare de deformație este o rezultantă a două modalități de comportare a acestor elemente care întrunesc atît caracter de șaibă, cît și caracter de placă [22]. În acest caz, conexiunile nodale ale elementelor finite trebuie să asigure compatibilitatea unor deplasări generalizate cu minimum șase componente. Se ajunge astfel la sisteme de ecuații mari a căror soluționare este foarte costisitoare, practic prohibitivă. Din acest motiv, cel puțin în stadiile preliminare ale proiectării, este necesar să se utilizeze metode care, presupunînd o comportare structurală simplificată, solicită cheltuieli de calculator mai mici. Faptul că aceste metode pot fi programate pe calculatoare de mică capacitate, calculatoare aflate în dotarea multor institute de proiectare sau cercetare, constituie un argument suplimentar în favoarea utilizării lor.

2. METODE DE CALCUL SIMPLIFICAT

Metodele de acest tip, utilizate la proiectarea suprastructurilor de pod cu secțiune deformabilă, pot fi grupate în trei categorii.

2.1. Prima categorie include metodele obținute prin adaptarea la specificul podurilor a unor teorii sau metode cu caracter mai general, cum sînt teoria profilurilor subțiri, teoria plăcilor prismatice, teoria învelitorilor de rotație, teoria echivalenților, metoda fișiilor finite sau, chiar, teoria rețelelor de grinzi.

Teoria profilurilor subțiri [25] se aplică la calculul tablierelor relativ înguste prevăzute cu diafragme sau contravîntuiri transversale dese

și suficient de puternice pentru a împiedica deformarea secțiunii transversale [26]. Există și încercări de extindere a domeniului de utilizare a acestei teorii. Așa, de exemplu, în [1] este prezentat un procedeu care ține seama de flexibilitatea diafragmelor, procedeu derivat din metoda lui Vlasov de separare a variabilelor [27], capitolul 6. De asemenea, în [28] se prezintă o metodă în care efectul de cadru al secțiunii transversale este asimilat cu efectul pe care l-ar avea prezența unei diafragme deformabile continue pe toată lungimea grinzii. Calculul tablierelor semideschise se poate efectua de asemenea cu ajutorul teoriei profilurilor subțiri, aplicînd conceptul grosimii echivalente [14].

Teoria plăcilor prismatice [18] este folosită la calculul tablierelor relativ late, avînd un număr mic de diafragme. Numeroase metode de calcul simplificat au la bază această teorie. Unele pornesc de la „varianta elastică" a metodei, variantă elaborată pe baza elasticității plane și a teoriei plăcilor plane subțiri. Reprezentativă este metoda lui Scordelis [31] pentru calculul tablierelor casetate simplu rezemate sau continue. În această metodă fiecare placă componentă a tablierului este tratată ca un element structural separat căruia i se determină caracteristicile de rigiditate. Matricele de rigiditate ale plăcilor, solidarizate în lungul unor linii nodale, sînt apoi asamblate pentru a forma matricea globală. Sarcina exterioară este dezvoltată în serie Fourier, fapt care reclamă o reprezentare corespunzătoare a necunoscutelor-deplasări de la liniile nodale. Metoda are dezavantajul de a nu putea fi utilizată în situațiile în care geometria tablierului se modifică în lungul deschiderilor.

Varianta elementară a teoriei plăcilor prismatice, variantă elaborată pe baza ipotezelor rezistenței materialelor, se găsește la originea metodei secțiunilor nodale [29]. Aici se consideră că tablierul este format dintr-o succesiune de cadre transversale, susținute de pereții longitudinali constituiți într-un sistem de grinzi interconectate articulat în lungul muchiilor comune. Aceste grinzi, la rîndul lor, sînt susținute de diafragmele de reazem ale tablierului real. Metoda secțiunilor nodale este mai puțin exactă decît metoda lui Scordelis, dar are un domeniu de utilizare mai întins, putînd fi folosită și la calculul tablierelor cu secțiune variabilă.

Diverse aspecte ale calculului tablierelor din beton precomprimat pe baza teoriei plăcilor prismatice sînt discutate în [6].

Metoda de calcul prezentată în [4] poate fi considerată o aplicație a teoriei echivalenților la calculul tablierelor din beton armat. Dala și grinzile principale sînt înlocuite cu un sistem echivalent de grinzi cu zăbrele care, împreună cu „contravîntuirea orizontală", preia momentul de torsiune. „Contravîntuirea orizontală", sub formă de grindă Vierendel, este constituită din tălpile inferioare ale grinzilor principale și ale antretoazelor. Trecerea de la structura reală la cea echivalentă nu se face pe baza condiției de egalitate a densităților energiei de deformație, ca în teoria lui Absi, ci, într-o manieră mai directă, egalînd rigiditățile elementelor structurale echivalente.

Metoda fișiilor finite [7, 10, 35] este un procedeu semianalitic în care se admite că tablierul este alcătuit dintr-un număr de fîșii de placă cu secțiune constantă, fîșii interconectate în lungul unor rosturi longitudinale. Drept necunoscute figurează amplitudinile deplasărilor acestor rosturi.

Sarcina exterioară se descompune în serie Fourier, calculul efectuîndu-se ciclic pentru fiecare armonică. Tablierul trebuie să fie simplu rezemat la capete, și pentru a ține seama de prezența unor eventuale reazeme sau diafragme intermediare se aplică o tehnică de suprapunere a efectelor bazată pe un procedeu similar metodei forțelor din statica construcțiilor. În [17] metoda fîșiilor finite este utilizată pentru calculul tablierelor casetate curbe. Autorii aplică direct ecuațiile teoriei învelitorilor de rotație pentru a obține matricea de rigiditate a unei fîșii curbe în spațiu.

Modul în care analogia cu rețeaua de grinzi poate fi utilizată la calculul tablierelor cu secțiune deformabilă este prezentat în [12]. Autorii arată cum se determină dimensiunile și rigiditățile elementelor rețelei înlocuitoare pentru ca solicitările obținute să ofere imaginea distribuției eforturilor în structura casetată reală.

2.2. În a doua categorie de metode sînt incluse variantele simplificate ale metodei elementului finit, variante în care se caută să se păstreze în calcul numai acei parametri care contribuie la evidențierea particularităților statice care caracterizează comportarea unui anumit tablier [30, 9, 16, 19].

Metoda de calcul prezentată în [30] pleacă de la premisa că un tablier cu secțiune celulară poate fi reprezentat ca un ansamblu de elemente bidimensionale lucrînd în stare plană de eforturi. În acest fel, comparativ cu utilizarea în exténso a metodei elementului finit, numărul necunoscutelor se reduce la jumătate. Efectul încovoierii în sens transversal a fost simulat cu ajutorul unor diafragme fictive avînd o rigiditate de forfecare echivalentă cu rigiditatea la distorsiune a cadrului închis din secțiunea transversală a tablierului.

În [9] se prezintă o metodă de calcul în care numărul gradelor de libertate este substanțial redus prin luarea în considerație a proprietăților de simetrie ale tablierului celular în raport cu planul orizontal în care eforturile longitudinale din inimile grinzilor sînt nule. Autorul arată că metoda sa poate fi utilizată și în cazurile în care placa superioară și cea inferioară diferă într-o oarecare măsură.

Bazată pe ipotezele teoriei elementare a plăcilor prismatice, metoda segmentelor finite [16] poate fi interpretată ca o variantă simplificată a metodei elementului finit. Aici fiecare placă componentă a tablierului se consideră divizată în segmente dreptunghiulare interconectate la noduri situate la mijlocul laturilor. Compatibilitatea deplasărilor și echilibrul eforturilor sînt asigurate numai la nodurile de conexiune. Metoda este destinată analizei tablierelor casetate cu secțiune constantă .

Metoda de calcul prezentată în [19] are la bază procedeul lui Vlasov de separare a variabilelor. Rigiditățile elementelor finite se determină admițînd că starea de deformație a structurii se poate obține combinînd un număr finit de moduri de deformare caracteristice secțiunii transversale considerate. Influența lunecărilor asupra eforturilor normale nu poate fi determinată.

2.3. În a treia categorie de metode simplificate sînt incluse procedeele utilizate pentru soluționarea unor aspecte particulare caracteristice tablierelor cu secțiune deformabilă. Astfel, în [15] și [11] se studiază efectul lunecării asupra eforturilor normale, iar în [5], [3] și [6], efectul deformării secționale asupra repartiției transversale.

Metoda prezentată în [15] reprezintă o extindere, la cazul tablierelor monocasetate cu placă în consolă, a propunerii originale a lui Reissner pentru calculul grinzii monocasetate cu două axe de simetrie. Metoda utilizează principiul minimului energiei potențiale pentru a obține o ecuație diferențială guvernantă care are drept variabilă independentă derivata săgeții grinzii încovoiate. Aceeași problemă este rezolvată printr-un procedeu diferit în [11]. Aici se admite că eforturile normale din tălpi sînt preluate de niște elemente longitudinale solicitate axial, elemente interconectate prin intermediul unei șaibe capabile să preia numai eforturi tangențiale.

Metoda de calcul descrisă în [3] oferă un mijloc de a corecta repartiția transversală de la tablierele celulare, prin luarea în considerație a efectului deformării secționale. Acest efect este introdus în calcul cu ajutorul unor multiplicatori determinați pe baza teoriei plăcilor ortotrope [32]. De asemenea, efectul deformării secționale poate fi pus în evidență utilizînd analogia cu grinda rezemată pe mediu elastic . În [5] această analogie este folosită pentru a arăta modul în care se poate stabili poziția diafragmelor în lungul deschiderii în situațiile în care prezența acestora este necesară, iar în [6] sînt prezentate relații de calcul pentru unele ipoteze de încărcare care se întîlnesc în proiectarea curentă.

2.4. Cele arătate în paragrafele precedente constituie, fără a epuiza subiectul, o trecere în revistă a celor mai cunoscute metode de calcul simplificat utilizate la proiectarea tablierelor cu secțiune deformabilă. Se constată că nici una din aceste metode nu poate analiza cu aceeași acuratețe tabliere cu secțiune închisă sau semideschisă. De fapt, după cunoștințele autorului, nici un program de calculator, întocmit pe baza acestor metode, nu are proceduri specifice tablierelor semideschise. Excepție s-ar putea să facă metoda descrisă în [14].

În cele ce urmează, se va prezenta un procedeu care se încadrează în a doua categorie de metode de calcul simplificat, procedeu transpus într-un prgram de calculator, utilizabil în egală măsură la calculul tablierelor cu secțiune închisă și semideschisă. Procedeul folosește un model matematic cu un număr redus de parametri nedeterminați, ceea ce-l face foarte potrivit pentru calculatoare de capacitate mică.

3. METODA DE CALCUL PROPUSĂ

În esență, metoda propusă recurge la divizarea tablierului în tronsoane separate prin rosturi fictive. Împărțirea în tronsoane se face astfel încît secțiunile în care sînt amplasate elementele de solidarizare transversală, ca și secțiunile de reazem, să coincidă cu poziția rosturilor. Punctele de conexiune de la rosturi mențin atît compatibilitatea deplasărilor tronsoanelor, cît și compatibilitatea deplasărilor elementelor finite care modelează tronsoanele. În figura 1*a* este schematizată elevația unui tablier cu console, divizat în 14 tronsoane. În figura 1*b* este reprezentat un tronson oarecare, tipic pentru tablierul monocasetat. Tronsonul este modelat cu patru elemente, cîte unu pentru fiecare din cei patru pereți (două inimi și două tălpi). Deplasările longitudinale ale celor 16 puncte de conexiune

(cîte 8 la fiecare extremitate a tronsonului), împreună cu deplasările transversale de la capetele celor patru pereți, constituie parametri nedeterminați care condiționează starea de eforturi. Un tronson modelat în acest fel are 24 de grade de libertate. Pentru comparație, în figura 1*c*, este reprezentat

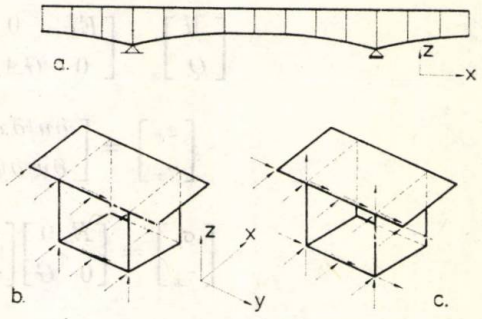


Fig. 1. *a* — Tablier casetat cu secțiune variabilă împărțit în tronsoane; *b* — Tronson cu 24 grade de libertate, *c* — Tronson cu 40 grade de libertate.

același tronson în ipoteza modelării standard, cu elemente finite avînd patru noduri cu cîte două grade de libertate la nod [30]. În acest caz numărul parametrilor nedeterminați este egal cu 40. Comparativ cu modelarea propusă (fig. 1*b*), schematizarea reprezentată în figura 1*c* conduce în final la o sporire de cel puțin 4,5 ori a timpului de rezolvare a sistemului global.

După cum se vede, comparînd figurile 1*b* și 1*c*, micșorarea numărului de parametri nedeterminați se realizează pe seama reducerii gradelor de libertate conținute în planul secțiunii transversale. Această reducere este consecința utilizării unor elemente finite de tip particular, elemente construite pe baza a 5 ipoteze simplificatoare:

— coeficientul de contracție transversală este nul [29, 15, 11];

— plăcile care alcătuiesc tablierul sînt inextensibile în planul median al secțiunii transversale [29, 19, 27, 28];

— diafragmele nu pot prelua decît eforturi tangențiale și sînt perfect flexibile după normala la planul lor [31, 29, 7, 10];

— inimile tablierului se deformează respectînd ipoteza secțiunilor plane [29, 9, 16]. (În [29] se admite că și tălpile tablierului respectă această ipoteză).

În afara acestor ipoteze, aflate de altfel la baza mai multor metode simplificate, cîteva fiind menționate mai sus, aici se utilizează o ipoteză suplimentară referitoare la comportarea sub sarcini a tălpilor tronsonului. Astfel, se admite că pentru componenta simetrică a încărcării, relațiile deformații-deplasări și relațiile constitutive sînt cele corespunzătoare stării plane de eforturi, iar pentru componenta antisimetrică, sînt cele corespunzătoare teoriei grinzii încovoiate. Aceasta înseamnă că matricea de rigiditate a elementului de talpă se va obține asamblînd două matrice independente, de tip diferit. Una, aferentă unui element de grindă încovoiată, corespunde modurilor de deformare antisimetrică, cealaltă, aferentă unei șaibe tensionate simetric, corespunde modurilor de deformare simetrică. Ținînd seama și de primele două ipoteze adoptate, relațiile

deformații-deplasări și eforturi-deformații se scriu astfel:

$$\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \Phi + \partial w/\partial x \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial u/\partial y \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_x \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Relațiile (1) și (2) corespund componentei antisimetrice, iar (3) și (4) componentei simetrice a încărcării. În aceste relații, w reprezintă deplasarea transversală, u — deplasarea longitudinală, χ — este pseudo-curbura, ψ — rotirea produsă de forța tăietoare, iar Φ rotirea din încovoiere.

Pentru modelarea inimilor se folosesc tot elemente de tip șaibă. Dar, spre deosebire de tălpi, caracteristicile de rigiditate ale inimilor se determină admițînd, în virtutea celei de a treia ipoteze, o distribuție liniară a eforturilor unitare pe înălțimea inimii.

În afara elementelor de tip șaibă, în modelarea tronsoanelor sînt incluse bare și diafragme de forfecare. Elementele de tip bară sînt folosite pentru a completa modelarea tronsoanelor în situațiile în care tablierele închise sînt prevăzute cu contravîntuiri transversale. De asemenea, în cazul tablierelor semideschise, elementele de acest tip sînt utilizate pentru modelarea contravîntuirilor transversale și a contravîntuirii orizontale. În acest ultim caz, procedeul de calcul prezentat aici se dovedește foarte potrivit pentru a scoate în evidență influența contravîntuirii asupra eforturilor din tablierele cu grinzi cu inimă plină [24].

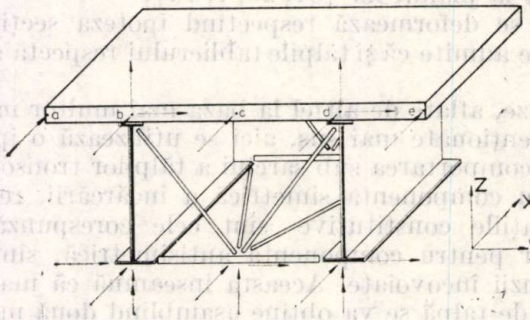


Fig. 2. — Tronson de tablier cu secțiune semideschisă.

În figura 2 este reprezentat un tronson tipic pentru un tablier mixt semideschis, avînd două grinzi principale. Tronsonul este constituit din trei elemente tip șaibă (inimile și placa superioară), și 12 elemente tip

bară (contravîntuirile). Montanții și diagonalele sînt bare dublu articulate iar tălpile contravîntuirii orizontale, care, în același timp, sînt și tălpi ale grinzilor principale, sînt bare de cadru. Un tronson modelat în acest fel are 35 de grade de libertate.

După cum se vede, atît în cazul tablierelor casetate (fig. 1*a*), cît și în cazul tablierelor semideschise (fig. 2), elementele finite de tip placă, care ar putea introduce efectul încovoierii locale, nu au fost luate în considerație. Acest lucru se justifică prin aceea că principalii parametri care condiționează comportarea de ansamblu a structurilor de acest tip sînt deplasări de tip translație. Altfel spus, energia acumulată prin încovoierea locală a plăcilor este neglijabilă în raport cu energia absorbită prin deformarea întregului sistem. Pe de altă parte, dimensionarea la încovoiere a cadrelor transversale sau a dalei tablierului nu poate fi omisă. Pentru aceasta, procedeul prezentat aici recurge la o a doua fază a calculului. Astfel, de exemplu, eforturile secționale din placa carosabilă a unui tablier mixt se vor determina considerînd placa, separată de restul structurii, încărcată simultan cu sarcina exterioară și cu deplasările determinate în prima fază a calculului. Procedînd în acest fel se realizează o mare economie de timp la calculator. Dacă pentru talpa tronsonului din figura 2 s-ar face o modelare cu elemente finite cu cîte 6 grade de libertate la nod [22], ceea ce ar crea posibilitatea obținerii momentelor din placă simultan cu celelalte eforturi, timpul de rezolvare a sistemului global de ecuații ar crește de cel puțin 9 ori.

În paragrafele care urmează vor fi prezentate pe rînd principalele tipuri de elemente utilizate pentru modelarea tronsoanelor.

4. TĂLPILE TRONSONULUI

Potrivit cu ipotezele adoptate anterior, cele două componente ale elementului utilizat pentru modelarea tălpilor, cea simetrică și cea antisimetrică, se studiază în mod independent.

4.1. COMPONENTA ANTISIMETRICĂ

Solicitarea antisimetrică este preluată de un element de grindă încovoiată în plan orizontal, element ale cărui secțiuni transversale se deplanează sub acțiunea forței tăietoare.

În mod curent, efectul forței tăietoare se introduce în calcul pe baza ipotezei lui Timoșenko : secțiunile transversale inițial plane, rămîn plane după deformare, dar nu neapărat perpendiculare pe fibra medie. Pe baza acestei ipoteze au fost obținute modele-deplasare cu patru grade de libertate [23] și cu șase grade de libertate [33]. Din figura 3*a* rezultă configurația deplasărilor generalizate ale elementului descris în [33]. W_1 și W_2 reprezintă deplasările transversale ale capetelor , ψ_1 și ψ_2 sînt rotirile provocate de forța tăietoare, iar Φ_1 și Φ_2 reprezintă rotirile totale ale secțiunilor de capăt. Variația săgeții W, a rotirii totale Φ și a rotirii din tăiere ψ,

în lungul fibrei deformate, sînt date de relaţiile :

$$\begin{bmatrix} W \\ \Phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2x & -3x^2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot [A], \tag{5}$$

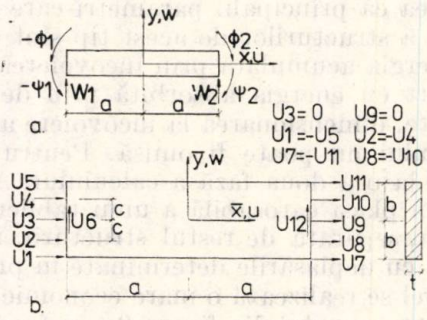


Fig. 3. *a* — Element de grindă încovoiată cu 6 grade de libertate ; *b* — Element de grindă cu 12 grade de libertate.

în care A este un vector coloană ale cărui componente reprezintă coordonatele generalizate ale cîmpului deplasărilor. Se vede imediat că relaţia (5) este compatibilă cu a doua ecuaţie din (1).

Coordonatele generalizate ale cîmpului deplasărilor se pot determina pe două căi. Dacă se condiţionează compatibilitatea punctuală a deplasărilor la extremităţile fibrei medii, se obţine un element conform cu ipoteza lui Timoşenko [33]. Dacă însă, condiţiile respective sînt puse luînd în consideraţie rotirile medii ale secţiunilor de capăt, se va obţine un element ale cărui secţiuni transversale nu rămîn neapărat plane după deformarea fibrei medii. Aceasta a doua cale va fi explorată în cele ce urmează.

Admiţînd că profilul deformat al secţiunii transversale este descris de un polinom impar în $\bar{y}$,

$$U = F(\bar{y}), \tag{6}$$

există cel puţin trei posibilităţi de a defini rotirea secţiunii transversale.

Definiţia tradiţională consideră drept rotire a secţiunii rotirea dreptei care, trecînd prin centrul secţiunii transversale, rămîne tot timpul perpendiculară pe aceasta :

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\bar{y}}\bigg|_{y=0}. \tag{7}$$

A doua definiţie, dată în [8], are în vedere o rotire medie a secţiunii. Se admite că rotirea Φ este dată de raportul dintre momentul static al deplasărilor tuturor punctelor secţiunii şi momentul de inerţie :

$$\Phi = \frac{1}{I}\int U\,\bar{y}\,\mathrm{d}A. \tag{8}$$

În sfîrșit, a treia definiție, folosită aici, admite că rotirea medie se obține făcînd raportul dintre suma derivatelor lui U, sumă extinsă la toate punctele secțiunii, și aria acestei secțiuni:

$$\Phi = \frac{1}{A}\int \frac{dU}{d\bar{y}}\,dA. \tag{9}$$

Elementul formulat pe baza celei de a treia definiții furnizează rezultate excelente, convergența soluției fiind practic independentă de finețea discretizării.

Adoptînd relația (9) și admițînd că elementul are secțiune dreptunghiulară, se constată că valoarea integralei depinde numai de mărimea lui U la limitele intervalului de integrare. Ținînd seama și de notațiile din figura 3*b*, unde este reprezentată o posibilă configurație a deplasărilor generalizate ale elementului cu secțiune deplanabilă, rotirea totală la capătul din stînga va fi

$$\Phi b = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} \frac{dU}{d\bar{y}}\,d\bar{y} = \frac{U5 - U1}{2b}, \quad \Phi 1 = \Phi b. \tag{10}$$

Pe de altă parte, dacă secțiunea nu se deplanează, trebuie să se obțină aceeași rotire, indiferent de poziția celor două puncte între care se efectuează integrarea. Prin urmare, rotirea corespunzătoare unui interval de integrare oarecare, $2c$,

$$\Phi c = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \frac{dU}{d\bar{y}}\,d\bar{y} = \frac{U4 - U2}{2c}, \tag{11}$$

ar trebui să fie egală cu Φb din (10). Dar cum, sub acțiunea forței tăietoare, cele două rotiri nu pot fi egale, este rezonabil să se admită că diferența lor reprezintă tocmai efectul lui T:

$$\psi 1 = \Phi b - \Phi c = \frac{U5 - U1}{2b} - \frac{U4 - U2}{2c}. \tag{12}$$

Dacă nu se pun condiții suplimentare, profilul secțiunii deplanate va putea fi descris de orice polinom impar care satisface ecuațiile (10) și (12).

Configurația deplasărilor reprezentate în figura 3*b* este echivalentă cu cea reprezentată în figura 3*a*, față de care are avantajul de a facilita luarea în considerație a poziției efective a punctelor de conexiune dintre elemente. Evident, pentru tronsoanele din figura 1*b* și figura 2, $2c$ se va lua egal cu distanța dintre inimile tablierului.

Coordonatele generalizate ale cîmpului deplasărilor se exprimă în funcție de deplasările nodale ale elementului prin relația

$$A = HU, \tag{13}$$

în care vectorul U are drept componente deplasările $U1$, $U2$, ... $U12$, iar

$$H^T = \frac{1}{8a^3bc}\begin{bmatrix} a^4c & -a^3c & -a^2c & ac & 2a^3c & -2a^2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a^3b & 2a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^3b & -2a^2b \\ -a^4c & a^3c & a^2c & -ac & -2a^3c & 2a^2c \\ 4a^3bc & -6a^2bc & 0 & 2bc & 0 & 0 \\ -a^4c & -a^3c & a^2c & ac & 2a^3c & 2a^2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a^3b & -2a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^3b & 2a^2b \\ a^4c & a^3c & -a^2c & -ac & -2a^3c & -2a^2c \\ 4a^3bc & 6a^2bc & 0 & -2bc & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Expresia energiei de deformație Π, pentru o grindă încovoiată care respectă ipoteza lui Timoșenko, este

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} EI\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} GA_e\,\psi^2 \mathrm{d}x. \quad (15)$$

După efectuarea integralelor, ținînd seama de (5), (13) și (14), energia de deformație se scrie

$$\Pi = \frac{1}{2}\,U\,K_a\,U, \quad (16)$$

în care K_a reprezintă componenta antisimetrică a matricei de rigiditate a elementului de talpă.

Folosind notațiile

$$\begin{aligned} A1 &= 3EI/(B^2L) + GA_eL/(3B^2), \\ A2 &= -GA_eL/(3C^2), \\ A3 &= 6EI/(B\,L^2), \\ A4 &= 3EI/(B^2L) + GA_eL/(6B^2), \\ A5 &= -GA_eL/(6BC), \\ A6 &= EI/(C^2L) + GA_eL/(3C^2), \\ A7 &= EI/(C^2L) - GA_eL/(6C^2), \\ A8 &= 12EI/L^3 \end{aligned} \quad (17)$$

și $B = 2b$, $C = 2c$, $L = 2a$, $A_e = kA$, în care k este coeficientul de formă al secțiunii, componenta antisimetrică a matricei de rigiditate este următoarea :

$$K_a = \begin{bmatrix}
A1 & & & & & & & & & & & \\
A2 & A6 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
-A2 & -A6 & 0 & A6 & & & & & & & & \\
-A1 & -A2 & 0 & A2 & A1 & & \text{simetric} & & & & & \\
A3 & 0 & 0 & 0 & -A3 & A8 & & & & & & \\
A4 & A5 & 0 & -A5 & -A4 & A3 & A1 & & & & & \\
A5 & -A7 & 0 & A7 & -A5 & 0 & A2 & A6 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
-A5 & A7 & 0 & -A7 & A5 & 0 & -A2 & -A6 & 0 & A6 & & \\
-A4 & -A5 & 0 & A5 & A4 & -A3 & -A1 & -A2 & 0 & A2 & A1 & \\
-A3 & 0 & 0 & 0 & A3 & -A8 & -A3 & 0 & 0 & 0 & A3 & A8
\end{bmatrix} \tag{18}$$

4.2. COMPONENTA SIMETRICĂ

Pentru preluarea solicitării simetrice, tălpile tronsonului se consideră alcătuite din cîte patru elemente finite, asamblate într-un macroelement tensionat simetric. Din figura 4*a* rezultă configurația deplasărilor nodale precum și modul în care au fost generate cele patru elemente ale unui macroelement. În figura 4*b* este reprezentat unul din aceste elemente împreună cu gradele sale de libertate și sistemul de referință propriu. Potrivit ipotezelor adoptate anterior, se iau în considerație numai deplasările longitudinale, polinomul de interpolare a deplasărilor nodale fiind reprezentat de

$$U_e = (\bar{U}1 + \bar{U}2 + \bar{U}3 + \bar{U}4)/4 + (\bar{U}3 - \bar{U}1 + \bar{U}4 - \bar{U}2)\bar{x}/4a +$$

$$+ (\bar{U}2 - \bar{U}1 + \bar{U}4 - \bar{U}3)\bar{y}/4e + (\bar{U}4 + \bar{U}1 - \bar{U}3 - \bar{U}2)\bar{x}\bar{y}/4ae. \tag{19}$$

Eforturile unitare longitudinale σ_x derivate din cîmpul deplasărilor (19) variază liniar în sens transversal și sînt constante în lungul elementului. Eforturile tangențiale variază liniar în sens longitudinal și sînt constante pe lățimea elementului.

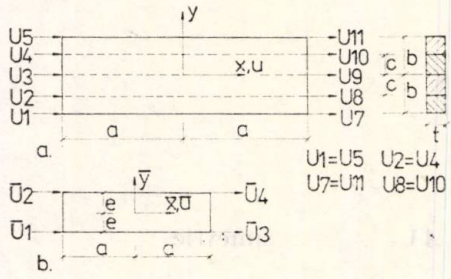


Fig. 4. *a* — Macroelement de șaibă tensionată simetric ; *b* — Element de șaibă tensionată simetric.

Energia de deformație a elementului este dată de relația

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v E\varepsilon_x^2 \mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_v G\gamma_x^2 \mathrm{d}v, \tag{20}$$

care, după integrare, ținînd seama de (3), (4) și (19), devine

$$\Pi = \frac{1}{2}\bar{U}^T K_e \bar{U}. \tag{21}$$

În (21), $\bar{U}$ este vectorul deplasărilor nodale, iar K_e este matricea de rigiditate a elementului finit.

Determinarea pe cale analitică a elementelor matricei K_e se face cu ușurință. La aceeași matrice se ajunge și dacă în locul integrării analitice se aplică formula lui Gauss de cvadratură numerică pentru două puncte de integrare. Pe de altă parte, este cunoscut faptul că prin integrare selectivă, cu un număr de puncte de integrare inferior numărului optim, uneori se obțin rezultate mai bune. În această idee, matricea K_e a fost determinată și în ipoteza că a doua integrală din (20) se evaluează folosind un singur punct de integrare. Matricea de rigiditate la care se ajunge pe această cale corespunde unui efort de forfecare constant pe element și, după cum se vede din figura 5, conduce la rezultate superioare. În figura 5 este reprezentată variația săgeților la capătul unei console, în funcție de numărul de elemente în direcția x. Rezultatele date de elementul cu două puncte de integrare (tip 1) ca și cele date de elementul cu un singur punct de integrare (tip 2) sînt comparate cu soluția obținută folosind elementul cu opt grade de libertate (G.D.L) descris în [21].

Matricea de rigiditate a macroelementului se obține reținînd componenta simetrică a matricei rezultate din asamblarea celor patru elemente componente :

$$K_s = (\sum K_e)\ T, \tag{22}$$

T este matricea care realizează transformarea

$$U_s = TU, \tag{23}$$

în care U_s este componenta simetrică a vectorului deplasărilor U.

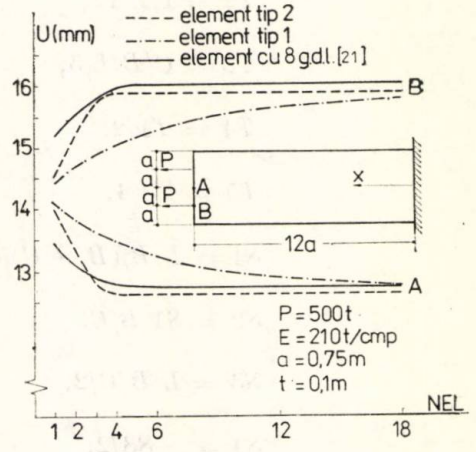


Fig. 5. — Variația deplasărilor șaibei (punctele A și B) în funcție de discretizarea longitudinală.

Dacă rigiditățile corespunzătoare celor două integrale din (20) se grupează astfel încît

$$K_s = K_\varepsilon + K_\gamma, \tag{24}$$

atunci

$$K_\varepsilon = \begin{bmatrix} K_t & -K_t \\ -K_t & K_t \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad K_\gamma = \begin{bmatrix} K_f & K_f \\ K_f & K_f \end{bmatrix}, \tag{25}$$

K_t și K_f fiind date de relațiile (26) și (27).

$$K_t = EBt' \begin{bmatrix} T1 & & & & & \\ T4 & T2 & \text{simetric} & & & \\ 0 & T5 & T3 & & & \\ T4 & T2 & T5 & T2 & & \\ T1 & T4 & 0 & T4 & T1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$K_f = G\,B\,t \begin{bmatrix} S1 & & & & & \\ -S1 & S2 & & \text{simetric} & & \\ 0 & S4 & S3 & & & \\ -S1 & S2 & S4 & S2 & & \\ S1 & -S1 & 0 & -S1 & S1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Au fost folosite notaţiile :

$$T1 = (B - C)/B/L/12,$$

$$T2 = 1/L/12,$$

$$T3 = C/B/L/3,$$

$$T4 = T1/2,$$

$$T5 = T3/4,$$

$$S1 = L/B/(B - C)/8, \tag{28}$$

$$S2 = S1\ B/C.$$

$$S3 = L/B/C/2,$$

$$S4 = -S3/2,$$

t este grosimea plăcii care preia eforturile tangenţiale, în timp ce t' reprezintă grosimea echivalentă a plăcii care preia eforturile normale, grosime obţinută prin netezirea eventualelor nervuri longitudinale.

Matricea de rigiditate a elementului de talpă se obţin însumînd cele două componente date de relaţiile (18) şi (24) :

$$K_p = K_a + K_s. \tag{29}$$

5. INIMILE TRONSONULUI

În figura 6 este reprezentat elementul cu secţiune variabilă utilizat pentru modelarea inimilor. Relaţiile (30) constituite legile după care va-

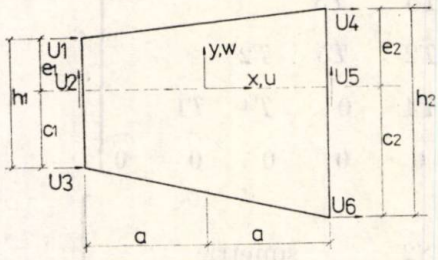


Fig. 6. — Element de inimă cu înălţime variabilă.

riază în lungul trsonsonului aria şi momentul de inerţie la încovoiere,

$$A_x = A_0 + \bar{A}x/a,$$

$$I_x = I_0 + \bar{I}x/a, \tag{30}$$

A_0, I_0, $\bar{A}$ și $\bar{I}$ se obțin prin particularizare.

Cîmpul deplasărilor elementului este reprezentat de

$$F = \begin{bmatrix} N_u \\ N_w \\ N_s \end{bmatrix} Z, \tag{31}$$

în care N_u, N_w și N_s sînt funcțiile de interpolare,

$$\begin{aligned} N_u &= [N1,\ 0,\ N2,\ N3,\ 0,\ N4,\ 0], \\ N_w &= [N5,\ N6,\ N7,\ N8,\ N9,\ N10,\ N11], \\ N_s &= [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ N12], \end{aligned} \tag{32}$$

iar Z reprezintă vectorul gradelor de libertate. În afara deplasărilor reprezentate în figura 6, mai este luat în considerație un grad de libertate suplimentar pentru a materializa efectul forței tăietoare [23].

Cele 12 funcții de interpolare se scriu astfel:

$$\begin{aligned} N1 &= (a - x)c1/(2h1a), \\ N2 &= (a - x)e1/(2ah1), \\ N3 &= (a + x)c2/(2ah2), \\ N4 &= (a + x)e2/(2ah2), \\ N5 &= (-a^3 + a^2x + ax^2 - x^3)/(4a^2h1), \\ N6 &= (2a^3 - 3a^2x + x^3)/(4a^3), \\ N7 &= (a^3 - a^2x - ax^2 + x^3)/(4a^2h1), \\ N8 &= (a^3 + a^2x - ax^2 - x^3)/(4a^2h2), \\ N9 &= (2a^3 + 3a^2x - x^3)/(4a^3), \\ N10 &= (-a^3 - a^2x + ax^2 + x^3)/(4a^2h2), \\ N11 &= (a^2x - x^3)/(4a^3), \\ N12 &= 1/(2a). \end{aligned} \tag{33}$$

Energia de deformație acumulată în element se calculează cu relația (34),

$$\Pi = Z^T\left(\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\mathrm{d}N_u}{\mathrm{d}x}\right]^T\left[\frac{\mathrm{d}N_u}{\mathrm{d}x}\right]EA_x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\mathrm{d}^2N_w}{\mathrm{d}x^2}\right]^T\left[\frac{\mathrm{d}^2N_w}{\mathrm{d}x^2}\right]EI_x\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{2}\int_{-a}^{a} GA_x[N_s]^T[N_s]\,\mathrm{d}x\right)Z, \tag{34}$$

care, după integrare, furnizează matricea de rigiditate K_i :

$$K_i = \frac{EA_0}{L}\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A1 + C1^2 & & & & & \\ \hline -A2 & A4 & & & \text{simetric} & \\ \hline -A1 + C1\ E1 & A2 & A1 + E1^2 & & & \\ \hline A3 - C1\ C2 & -A5 & -A3 - E1\ C2 & A6 + C2^2 & & \\ \hline A2 & -A4 & -A2 & A5 & A4 & \\ \hline -A3 - C1\ E2 & A5 & A3 - E1\ E2 & -A6 + C2\ E2 & -A5 & A6 + E2^2 \end{array}\right] \tag{35}$$

Au fost folosite notațiile :

$$\begin{aligned} A1 &= H(4 + F - Z)\,(L/h1)^2, \\ A2 &= H(6 - Z)\,L/h1, \\ A3 &= H(2 - F)\,L^2/h1/h2, \\ A4 &= 12H, \\ A5 &= (6 + Z)\,L/h2\,H, \\ A6 &= (4 + F + Z)\,(L/h2)^2H, \\ H &= I_0/A_0/L^2/(1 + F), \\ F &= 12\,EI_0/(G\bar{A}_0L^2), \\ Z &= 2\bar{I}/I0, \\ E1 &= e1/h1, \\ C1 &= 1 - E1, \\ E2 &= e2/h2, \\ C2 &= 1 - E2, \\ L &= 2a, \end{aligned} \tag{36}$$

$h1$, $h2$, $c1$, $c2$, $e1$, $e2$, sînt definite în figura 6, iar I_0, A_0 și $\bar{I}$ rezultă din (30). $\bar{A}_0$ reprezintă aria medie, redusă pentru a ține seama de distribuția neuniformă a eforturilor tangențiale pe secțiune.

6. DIAFRAGMELE TRONSONULUI

Așa cum s-a admis anterior, diafragmele nu pot prelua decît eforturi tangențiale. Considerînd un element dreptunghiular acționat de forțe de forfecare în lungul laturilor (fig. 7*a*), matricea de rigiditate echivalentă

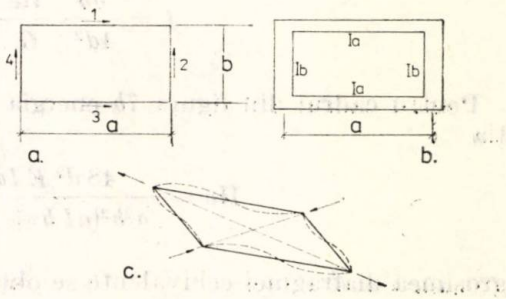


Fig. 7. *a* — Diafragmă de forfecare; *b* — Cadru transversal. *c* — Deformata antisimetrică a secțiunii transversale.

unui flux de forfecare constant pe contur este dată de relația

$$K_d = \frac{Gt}{ab}\begin{bmatrix} a^2 & & \text{simetric} & \\ ab & b^2 & & \\ -a^2 & -ab & a^2 & \\ -ab & -b^2 & ab & b^2 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

în care t reprezintă grosimea diafragmei, iar a și b sînt lungimile laturilor.

Acest element este folosit atît pentru modelarea diafragmelor reale, cît și pentru modelarea cadrelor de rigidizare transversală sau a cadrului continuu constituit din inimile și tălpile secțiunilor casetate.

În situațiile în care un cadru transversal este înlocuit în calcul printr-o diafragmă, trebuie să existe o echivalență, din punctul de vedere al rigidității la deformare secțională, între aceste două elemente. Această echivalență se poate stabili egalînd energiile de deformație acumulate de cadrul real și diafragma înlocuitoare, în urma unei deformări de tip distorsiune.

În figura 7*b* este reprezentat un cadru transversal, iar în figura 7*c* este schițată deformata cadrului și deformata diafragmei înlocuitoare. Dacă vectorul deplasărilor nodurilor difragmei este

$$\delta = [-a/d,\ -b/d,\ \ a/d,\ \ b/d]^T, \tag{38}$$

în care $d = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, atunci energia de deformație acumulată de diafragmă va fi

$$\Pi d = \frac{1}{2} \delta^T K_d \delta = 2Gt \frac{d^2}{ab}. \tag{39}$$

Energia de deformație Πc acumulată în cadru se poate determina făcînd semisuma produselor rotire-moment pentru toate capetele barelor. Egalînd cele două energii, se obține grosimea diafragmei înlocuitoare

$$t = \frac{ab}{4d^2} \frac{\Pi c}{G}. \tag{40}$$

Pentru cadrul din figura 7*b* energia de deformație se calculează cu relația

$$\Pi c = \frac{48\, d^2\, E\, Ia\, Ib}{a^2 b^2 (aI\, b + bI\, a),}, \tag{41}$$

iar grosimea diafragmei echivalente se obține înlocuind (41) în (40):

$$t = \frac{24\, E\, Ia\, Ib}{ab(a\, Ib + bIa)\, G}. \tag{42}$$

În [30] s-a ajuns la aceeași relație pe o altă cale.

7. MATRICEA DE RIGIDITATE GLOBALĂ

Matricea de rigiditate a întregii structuri se obține în urma asamblării matricelor de rigiditate ale tronsoanelor. Acest mod de lucru are cel puțin două avantaje. În primul rînd tronsonul poate fi tratat ca o substructură, ceea ce înseamnă că înainte de a asambla matricea globală, mai multe tronsoane vecine pot fi grupate într-un macrotronson. Raportînd prin condensare statică, rigiditățile macrotronsonului la gradele de libertate de interfață, se va obține o matrice de rigiditate avînd aceleași dimensiuni ca matricea unui tronson curent. Astfel se obține o reducere însemnată a timpului de prelucrare la calculator. În plus, în cazul tablierelor semideschise, se creează posibilitatea de a include rigiditățile contravîntuirii orizontale direct în matricele de rigiditate ale macrotronsoanelor.

Al doilea avantaj al tronsonării îl constituie faptul că matricea de rigiditate a unui tronson, sau macrotronson, odată construită, poate fi reutilizată ori de cîte ori, în cursul operației de asamblare a matricei globale, se întîlnesc tronsoane (macrotronsoane) cu alcătuire similară.

Asamblarea matricei globale, rezolvarea sistemelor de ecuații și determinarea eforturilor din elementele care compun modelul de calcul se face urmînd procedeele standard.

8. EXEMPLE ILUSTRATIVE

8.1 Se consideră o grindă simplu rezemată, avînd secțiune monocasetată cu dală în consolă, în două ipoteze de încărcare simetrică. În figura 8 este reprezentată variația rapoartelor dintre eforturile longitu-

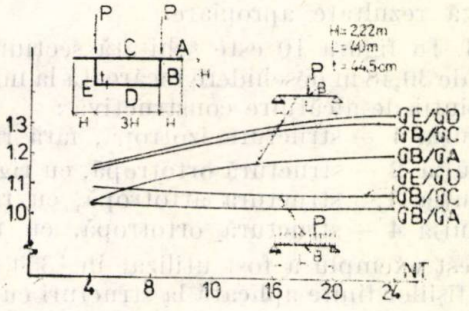


Fig. 8. — Variația rapoartelor eforturilor unitare longitudinale în funcție de discretizarea în lungul deschiderii.

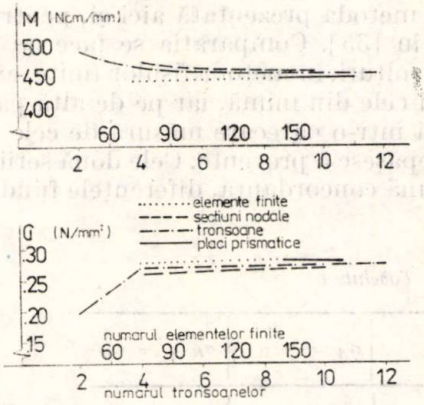


Fig. 9. — Variația eforturilor unitare longitudinale maxime și a momentului încovoietor de la colțul casetei, în funcție de discretizarea longitudinală.

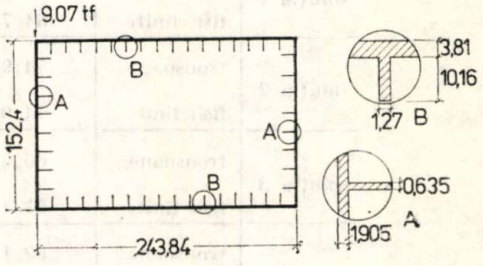


Fig. 10. — Secțiunea transversală a unui tablier casetat rigidizat excentric.

dinale din cîteva puncte caracteristice, în funcție de numărul tronsoanelor (NT). Punctele considerate se găsesc pe secțiunea de la mijlocul deschiderii. Se constată că în ipoteza încărcării cu sarcini distribuite convergența soluției este mai bună decît în ipoteza încărcării cu sarcini concentrate.

8.2. Un studiu de convergență este prezentat și în figura 9. Pentru grinda din exemplul precedent, de data aceasta fără dală în consolă, se

examinează variația efortului unitar longitudinal maxim și variația momentului încovoietor transversal de la colțul casetei, în secțiunea de la mijlocul deschiderii. Este luată în considerație o încărcare excentrică, sarcină uniform repartizată în lungul unui perete vertical. Pentru comparație, sînt date rezultatele obținute prin metoda elementelor finite și prin metoda secțiunilor nodale [29]. Se constată că cele trei metode comparate furnizează rezultate apropiate.

8.3. În figura 10 este schițată secțiunea transversală a unei grinzi casetate de 30,48 m deschidere încărcată la mijloc. Sînt luate în considerație patru soluții de alcătuire constructivă :

soluția 1 — structură izotropă, fără rigidizări,

soluția 2 — structură ortotropă, cu rigidizări longitudinale,

soluția 3 — structura artotropă, cu rigidizări transversale,

soluția 4 — structură ortotropă, cu rigidizări în ambele direcții.

Acest exemplu a fost utilizat în [35] pentru a demonstra eficiența metodei fîșiilor finite aplicată la structuri cu rigidizări excentrice.

În tabelul 1 sînt trecute eforturile unitare longitudinale din punctele A, A', B și B', calculate cu metoda prezentată aici și, pentru comparație, eforturile medii obținute în [35]. Comparația se face cu eforturile medii deoarece, pe de o parte, la colțuri, în metoda fîșiilor finite, există diferențe între eforturile din talpă și cele din inimă, iar pe de altă parte, eforturile din talpa superioară diferă într-o oarecare măsură de cele din talpa inferioară. Aceste diferențe nu depășesc 5 procente. Cele două serii de rezultate date în tabelul 1 indică o bună concordanță, diferențele fiind mai mici de 2%.

Tabelul 1

		$\sigma_A = -\sigma_{A'}$	$\sigma_B = -\sigma_{B'}$
soluția 1	tronsoane	85,5	42,2
	fîșii finite	84,7	42,5
soluția 2	tronsoane	74,9	35,9
	fîșii finite	74,0	35,2
soluția 3	tronsoane	60,6	42,2
	fîșii finite	61,4	42,0
soluția 4	tronsoane	52,1	35,2
	fîșii finite	52,5	35,1

8.4. În [24] a fost examinată influența pe care o are modul de alcătuire a contravîntuirilor asupra distribuției eforturilor într-un tablier mixt de 50 m lungime. A fost luată în discuție o singură ipoteză de încărcare, vehicul greu V80 așezat la mijlocul deschiderii la bordură. În [24] calculele au fost efectuate considerînd că eforturile unitare longitudinale au o varia-

ție liniară pe lățimea dalei tablierului. În cele ce urmează se scoate în evidență influența distribuției neliniare a eforturilor longitudinale pe lățimea dalei. Se vor prezenta comparativ cîteva rezultate obținute luînd în considerație efectul lunecărilor din dală. Comparația se va face cu un tablier avînd o alcătuire similară celui din [24]. Inimile, tălpile inferioare și contravîntuirile (tip A) sînt identice la cele două tabliere. Diferă tălpile superioare, dala din beton armat din [24] fiind înlocuită cu o placă ortotropă metalică. Pentru a face comparația mai elocventă, secțiunea plăcii ortotrope a fost astfel aleasă încît produsele E-metal A-metal și E-metal I-metal ale plăcii ortotrope să fie egale cu produsele E-beton A-beton și respectiv E-betoni I-beton ale dalei tablierului mixt. La tablierul metalic, raportul dintre aria nervurilor longitudinale ale plăcii ortotrope și aria totală a plăcii ortotrope, este egal cu 0,685. Tipul A de contravîntuire, comun celor două tabliere, corespunde reprezentării din figura 2. Din tabelul 2 se poate deduce modul în care variază eforturile unitare longitudinale pe lățimea tălpii superioare, în secțiunea de la mijlocul deschiderii. Eforturile σ din punctele a, b, c, d și e (vezi fig. 2) sînt date sub formă de procente din efortul maxim obținut în punctul în care se intersectează talpa cu inima direct încărcată. Se constată că efectul eforturilor tangențiale este mai important în cazul tablierului metalic. Aceasta se datorește faptului că materialul din placa ortotropă nu contribuie în întregime la preluarea eforturilor τ. Eforturile unitare longitudinale din dala de beton armat a tablierului mixt au o distribuție mai apropiată de variația liniară.

Tabelul 2

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
tablier mixt	81,7%	91,1%	86,9%	100%	97,4%
tablier metalic	76,1%	91,4%	79,1%	100%	91,4%

Din tabelul 3 rezultă variația în lungul deschiderii a efortului unitar longitudinal maxim din talpa superioară. Sînt date, în procente din efortul obținut la mijlocul deschiderii, valorile eforturilor de la douăsprezecimi.

Tabelul 3

	L/12	*L*/6	*L*/4	*L*/3	5*L*/12	*L*/2
tablier mixt	17,7%	33,7%	48,9%	64,3%	85,1%	100%
tablier metalic	17,1%	32,7%	47,4%	63,8%	84,4%	100%

Variația efortului axial, în tone, din talpa inferioară rezultă din tabelul 4. Eforturile date sînt cele din talpa solicitată mai puternic. Re-

prezintă valorile medii pe bolţar, tablierele fiind constituite din 12 bolţari de lungime egală.

Tabelul 4

	numărul bolţarului					
	1	2	3	4	5	6
tablier mixt	8,49	25,88	42,22	59,03	77,49	92,70
tablier metalic	8,49	25,88	42,22	59,03	77,54	92,44

Rezultatele din tabelele 3 şi 4 arată că variaţia eforturilor normale în lungul tălpilor este foarte puţin influenţată de acţiunea eforturilor tangenţiale din talpa superioară.

9. CONCLUZII

Procedeul descris reprezintă o abordare simplificată a metodei elementului finit, aplicată la calculul tablierelor cu secţiune închisă sau semideschisă. Modelul de calcul utilizat recurge la o tronsonare a tablierului, deplasările unui număr limitat de puncte din rosturile dintre tronsoane reprezentînd parametrii nedeterminaţi ai structurii. Comparativ cu utilizarea in exténso a metodei elementului finit, procedeul are avantajul unui efort de calcul mult diminuat, ceea ce-şi dovedeşte importanţa mai ales atunci cînd nu se dispune decît de un calculator de mică capacitate.

Primită la redacţie la 22 februarie 1984.

NOTAŢII

A reprezintă Vectorul coordonatelor generalizate;
A_x — Suprafaţa secţiunii;
E — Modul de elasticitate longitudinală;
G — Modul de elasticitate transversală;
I_z — Moment de inerţie;
K — Matrice de rigiditate;
N_i — Funcţie de interpolare;
U — Cîmpul deplasărilor longitudinale;
W — Cîmpul deplasărilor transversale;
Z — Vectorul gradelor de libertate;
Φ — Cîmpul rotirilor totale;
ψ — Cîmpul rotirilor din tăiere;
Π — Energia de deformaţie.

BIBLIOGRAFIE

1. S. R. ABDEL-SAMAD et al., *Analysis of Box Girders with Diaphragms*, ASCE Jrn., **94**, *ST10*, p. 2231—2255 (1968).
2. C. AVRAM, V. BOTA, *Structuri compuse oțel-beton și beton precomprimat-beton armat*, Edit. tehnică, București, 1975.
3. B. BAKHT et al., *Cellular and Voided Slab Bridges*, ASCE Jrn., **107**, *ST10*, p. 1797—1813 (1981).
4. L. BRUMER M. PERJESCU, *Calculul podurilor din beton armat cu luarea în considerație a deformației secționale*, Revista transporturilor, *3*, 125—130 (1968).
5. D. CAMPBELL-ALLEN, R. J. L. WEDGWOOD, *Need for Diaphragms in Concrete Box Girders*, ASCE Jrn., **97**, *ST3*, p. 825—842 (1971).
6. C. CAPATU, *Poduri din beton precomprimat*, Edit. tehnică, 1983,
7. Y. K. CHEUNG, *Analysis of Box Girder Bridges by the Finite Strip Method*, ACI Proc., *SP26—15*, Detroit, p. 357—378 (1971).
8. G. R. COWPER, *On the Accuracy of Timoshenko's Beam Theory*, *ASCE Jrn.*, **94**, *EM6*, p. 1447—1453 (1968).
9. M. A., CRISFIELD, *Finite Element Method for the Analysis of Multicellular Structures*, Proc. Instn. Civ. Engrs., **48**, March p. 413—437 (1972).
10. A. R. CUSENS, Y. C. LOO, *Applications of the Finite Strip Method in the Analysis of Concrete Box Bridges*, Proc. Instn. Civ. Engrs. **57**, June, p. 251—273 (1974).
11. H. R. EVANS, A. R. TAHERIAN, *The Prediction of the Shear Lag Effect in Box Girders*, Proc. Instn. Civ. Engrs., **63**, Mar., p. 69—92 (1977).
12. E. C. HAMBLY, E. PENNELLS, *Grillage Analysis Applied to Cellular Bridge Decks*, The Structural Engineer, **53**, 7, p. 267—275 (1975).
13. J. JIROUSEK, A. BOUBERGUIG, *A Macro-element Analysis of Prestressed Box-Girder Bridges*, Computers & Structures, **10**, *2*, p. 367—482 (1979).
14. M. A. N. KHAN, B. STAFFORD SMITH, *Restraining Action of Bracing in Thin-walled Open Section Beams*, Proc. Instn. Civ. Engrs., **59**, Mar., p. 67—78 (1975).
15. B. O. KUZMANOVIC, H. J. GRAHAM., *Shear Lag in Box Girders*, ASCE Jrn., **107**, *ST 9*, p. 1701—1712 (1981).
16. K. S. LO, A. C. SCORDELIS, *Finite Segment Analysis of Folded Plates*, ASCE Jrn., **95**, *ST5*, p. 831—852 (1969).
17. C. MEYER, A. C. SCORDELIS, *Analysis of Curved Folded Plate Structures*, ASCE Jrn., **97**, *ST10*, p. 2459—2480 (1971).
18. M. MIHĂILESCU, *Învelitori subțiri*, secțiunea V11, *Manual pentru calculul construcțiilor* (coord. A. D. Caracostea), Edit. tehnică, București, 1959.
19. M. J. MIKKOLA, J. PAAVOLO, *Finite Element Analysis of Box Girders*, ASCE Jrn., **106**, *ST6*, p. 1343—1357 (1980).
20. K. R. MOFFATT, P. T. K. LIM, *Some Finite Elements Having Particular Application to Box Girder Bridges*, IASBE Proceedings, P. 1/77.
21. G. ONU, *Calculul diafragmelor cu buiandrugi subțiri prin metoda elementelor finite*, St. cerc. mec. apl., **36**, *6*, p. 837—854 (1977).
22. G. ONU, *Calculul podurilor cu luarea în considerație a conlucrării dintre elementele principale de rezistență și platelaj*, teză de doctorat, I. C. București, 1975.
23. G. ONU, *Shear Effect in Beam Stiffness Matrix*, Journal of Structural Engineering, **109**, *9*, p. 2216—2221 (1983),

— *Includerea efectului forței tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă*, St. cerc. mec. apl., **41**, *4*, p. 31—41 (1982)

24. G. ONU, *Influența contravîntuirilor asupra eforturilor din tablierele cu grinzi cu inimă plină*, A VI-a conferință națională a specialiștilor din transporturi, Tușnad, dec., 1982.
25. A. PETRE, M. ATANASIU, *Bare cu pereți subțiri*, Edit. tehnică, București, 1960.
26. N. I. POLIVANOV, *Poduri de beton armat pentru drumuri auto*, Edit. tehnică, București, 1959.
27. V. G. REKACH, *Static Theory of Thin-walled Space Structures*, Mir Publishers, Moscow, 1978.
28. B. RICHMOND, *Trapezoidal Boxes with Continuous Diaphragms*, Proc. Instn. Civ. Engrs., **43**, Aug., p. 641—650 (1969).

29. K. C. ROCKEY, H. R. EVANS, *The Nodal Section Method for the Analysis of Box Girders*, IABSE Proceedings, 35, P. 1/75.

30. SAWKO F., R. J. COPE, *Analysis of Multi-cell Bridges without Transverse Diaphragms*, Struct. Engineer, **47**, *11*, p. 455—460, 1969.

31. A. C. SCORDELIS, R. E. DAVIS, *Stresses in Continous Box Girder Bridges*. ACI Proc.,*SP 26—13*, Detroit, p. 284—318 (1971).

32. M. SOARE, *Plăci plane*, secțiunea VI, *Manual pentru calculul construcțiilor* (coord.: A. D. Caracostea), Edit. tehnică, București, 1975.

33. D. L. THOMAS et al., *Timoshenko Beam Finite Elements*, J. Sound Vib., **31**, *3*, p. 315—330 (1973).

34. K. J. WILLAM, A. C. SCORDELIS, *Cellular Structure of Arbitrary Plan Geometry*, ASCE Jrn., **98**, *ST7*, p. 1377—1393 (1972).

35. K. J. WILLAM, A. C. SCORDELIS. *Analysis of Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffeners*, Report No. SESM 70—2, Berkeley Univ., 1970.

METODĂ DE CALCUL AL ÎMBINĂRILOR FILETATE CU UMĂR. II

de DORIN CONSTANTINESCU, TUDOR-VASILE HUNCKER, ION MOHORA, MARINEL PETRE

Institutul de cercetări și inginerie tehnologică pentru utilaj petrolier (IPCUP), Ploiești.

Lucrarea prezintă o metodă completă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr, utilizate în special în industria petrolieră, la asamblarea etanșă a materialului tubular.
Partea a doua a lucrării cuprinde sinteza studiului deformațiilor axiale ale elementelor îmbinării, aplicat în cele două etape funcționale de solicitare, din care au rezultat relațiile analitice de calcul necesare ridicării nedeterminării statice, precum și conideraţiile generale ale calculului de rezistență.

4. DEFORMAȚIILE AXIALE

Studiul deformațiilor axiale s-a realizat în vederea ridicării nedeterminării statice, rezultată corespunzător celei de a doua etape funcționale de solicitare și datorată lipsei unei relații suplimentare pentru variația forței din umăr F', în raport cu forța (totală) de tracțiune G, aplicată în exploatare [4.1].

Schemele de deformație ale elementelor de îmbinare sînt arătate în figura 4.1, pentru îmbinările cu umăr exterior și în figura 4.2, pentru cele

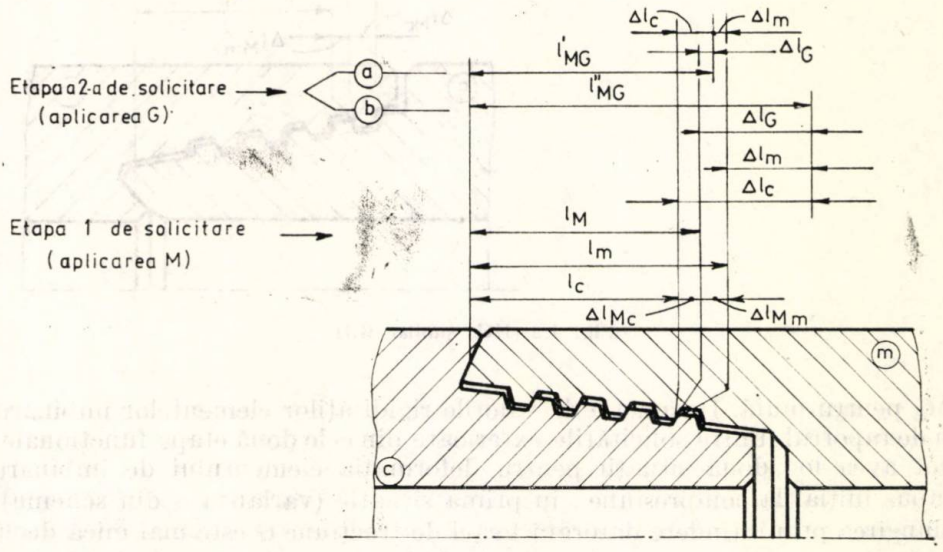


Fig. 4.1 (IKE, similar ICE)

cu umăr interior. Considerînd lungimile inițiale, a cepului l_c și a mufei l_m, după aplicarea momentului de înșurubare M, din prima etapă de solicitare, lungimea comună deformată a elementelor de îmbinare devine l_M, rezultînd deformațiile axiale, de alungire a cepului Δl_{Mc} și de scurtare a mufei Δl_{Mm}, sau invers, corespunzător tipului constructiv al îmbinării.

În etapa a doua de solicitare, datorită aplicării forței de tracțiune G, elementele de îmbinare se alungesc împreună în continuare cu Δl_G, de la lungimea l_M la l_{MG}, deformațiile finale fiind Δl_c, pentru cep, respectiv

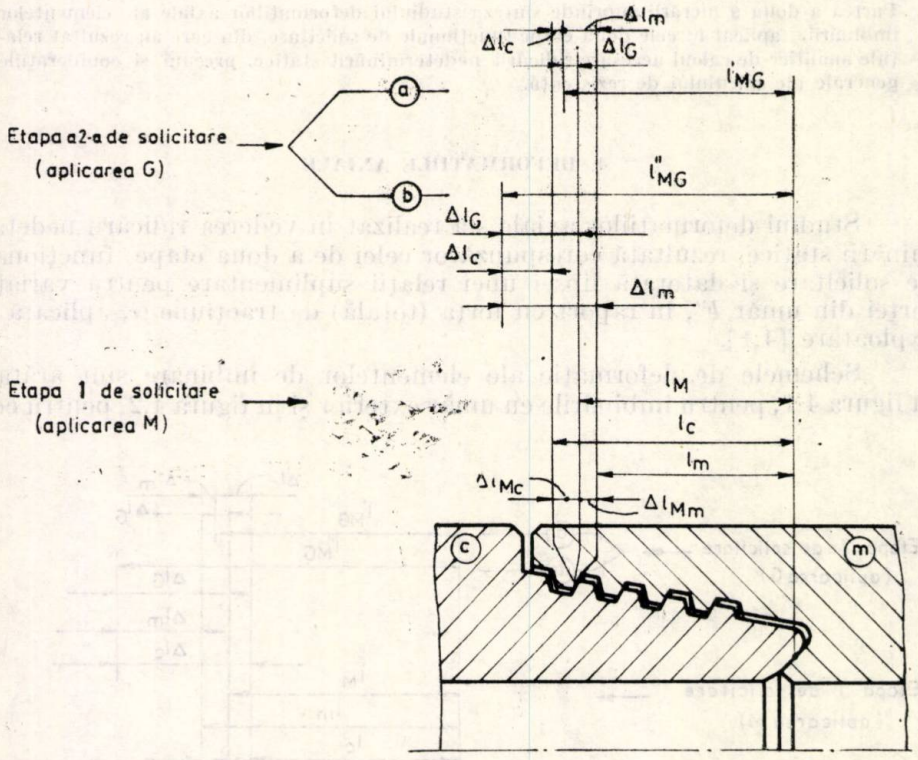


Fig. 4.2 (IKI, similar ICI)

Δl_m pentru mufă. În funcție de valorile rigidităților elementelor îmbinării și de raportul dintre solicitările exterioare din cele două etape funcționale, pot avea loc două situații pentru deformația elementului de îmbinare supus inițial la compresiune: în prima situație (varianta a din scheme), alungirea prin întindere datorată forței de tracțiune G este mai mică decît scurtarea inițială, elementul respectiv de îmbinare rămînînd în final scurtat, iar în a doua situație (varianta b din scheme), invers.

Rezultă deci următoarele corelații între deformațiile axiale ale cepului și mufei:

$$\Delta l_c = \Delta l_{Mc} + \Delta l_G$$

și, respectiv, (4.1)

$$\Delta l_m = \Delta l_{Mm} + \Delta l_G.$$

La determinarea expresiilor pentru calculul deformațiilor, s-a utilizat relația generală de calcul a deformațiilor axiale, exprimată prin integrala definită

$$\Delta l_x = \frac{1}{E}\int_0^{l_x} \frac{N_x}{A_x}\,\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

în care

x este argumentul reprezentînd cota poziției oarecare de pe axa îmbinării (în unități de lungime, cu originea în extremitatea din stînga zonei de solicitare și cu sensul de creștere spre dreapta), corespunzătoare secțiunii cu aria A_x, normală pe axa îmbinării;

E — modulul de elasticitate longitudinal al materialului elementului de îmbinare considerat;

l_x — lungimea (axială) a elementului de îmbinare pentru care se calculează deformația Δl_x, iar

N_x — variația solicitării axiale, în zona considerată;

notîndu-se cu $C_i = \dfrac{A_i}{l_i}$ coeficienții (medii) de rigiditate axială, pentru zonele i de solicitare, în care A_i este aria (medie, în cazul îmbinărilor conice) a secțiunii din zonă, iar l_i — lungimea corespunzătoare, rezultă pentru zonele de solicitare ale cepului și ale mufei

$$C_{cu} = A_{cu}/l_u\,;\; C_{cf} = A_{cf}/l_f,$$
$$C_{mu} = A_{mu}/l_u \text{ și } C_{mf} = A_{mf}/l_f. \tag{4.3}$$

Analiza corelațiilor dintre deformațiile elementelor de îmbinare, în zonele și pe etapele distincte de solicitare, a evidențiat faptul că în zonele filetate variațiile eforturilor interioare axiale N_x(și în mod corespunzător ale solicitărilor la torsiune M_t) nu sînt liniare. Într-adevăr, considerîndu-se, spre exemplu, cazul ipotetic în care îmbinarea cu număr exterior ar fi încărcată cu forța de tracțiune G fără prestrîngere și eforturile interioare ar varia liniar, ca în figura 4.3 *a*, adică

$$N_{xca} = -Gx/l_f + G \text{ pentru cep, și}$$
$$N_{xma} = Gx/l_f \text{ pentru mufă,}$$

ar rezulta deformațiile

$$\Delta l_{ca} = \frac{1}{E_c \cdot A_{cf}}\int_0^{l_f} (-Gx/l_f + G)\,\mathrm{d}x = \frac{G}{2E_c \cdot C_{cf}}$$

pentru cep, și (4.4)

$$\Delta l_{ma} = \frac{1}{E_m \cdot A_{mf}}\int_0^{l_f} Gx\;\mathrm{d}x/l_f = \frac{G}{2E_m \cdot C_{mf}}$$

pentru mufă, deci neegale (întrucît chiar dacă elementele de îmbinare sînt realizate din același material, adică dacă $E_c = E_m$, în general $C_{cf} \neq C_{mf}$), ceea ce este imposibil (lungimile zonelor filetate de la cep și mufă, în contact activ, fiind comune atît inițial, cît și după deformare).

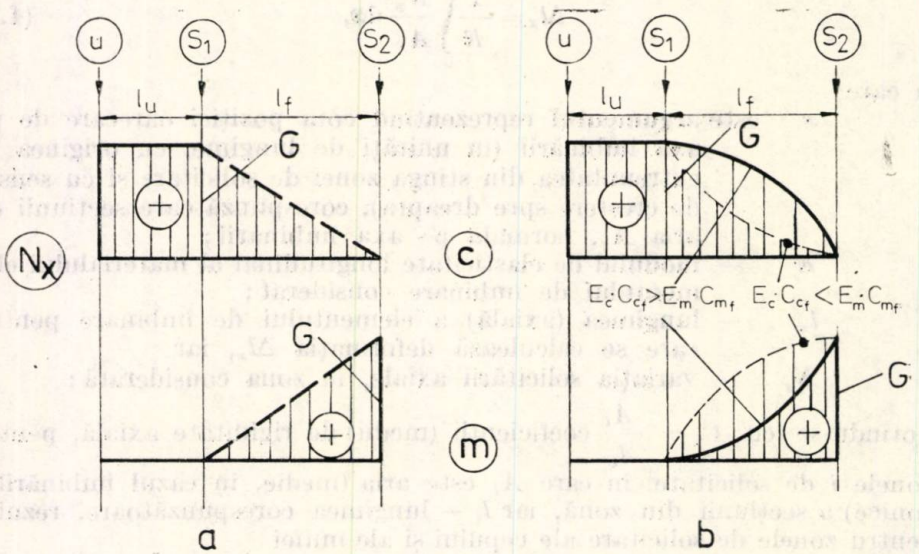


Fig. 4.3

Admițîndu-se pentru funcția $N_x(x)$ variații de ordinul doi, de exemplu parabolice, adică de forma

$$N_x = \alpha x^2 + \beta x + \delta,$$

se obține

$$N_{xcb} = ax^2 + bx + c \text{ pentru cep și}$$

$$N_{xmb} = Ax^2 + Bx + C \text{ pentru mufă.}$$

Determinarea coeficienților argumentelor acestor funcții se face punîndu-se condițiile cunoscute, astfel:

— pentru $x = 0$ rezultă

$N_{xcb} = G = c$ și

$N_{xmb} = 0 = C$,

— pentru $x = l_f$ rezultă

$N_{xcb} = 0 = al_f^2 + bl_f + G$, de unde $a = \dfrac{G + bl_f}{l_f^2}$ și

$N_{xmb} = G = Al_f^2 + Bl_f$, de unde $A = \dfrac{G - Bl_f}{l_f^2}$,

— pentru $N_{xcb} + N_{xmb} = G$, adică

$$ax^2 + bx + G + Ax^2 + Bx = G \text{ sau}$$

$ax^2 + bx = -(Ax^2 + Bx)$, rezultă, prin identificarea termenilor, $A = -a$ și $B = -b$,

— pentru $\Delta l_{cb} = \Delta l_{mb}$ sau

$$\frac{1}{E_c \cdot A_{cf}} \int_0^{l_f} (ax^2 + bx + G)\,dx = \frac{1}{E_m \cdot A_{mf}} \int_0^{l_f} (Ax^2 + Bx)\,dx,$$

adică

$$\frac{1}{E_c \cdot A_{cf}} \left(\frac{al_f^3}{3} + \frac{bl_f^2}{2} + Gl_f \right) = \frac{1}{E_m \cdot A_{mf}} \left(\frac{Al_f^3}{3} + \frac{Bl_f^2}{2} \right).$$

și, substituind corespunzător, rezultă

$$a = \frac{3G}{l_f^2} \cdot \frac{E_m \cdot C_{mf} - E_c \cdot C_{cf}}{E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}} \text{ și}$$

$$b = -\frac{2G}{l_f} \cdot \frac{2E_m \cdot C_{mf} - E_c \cdot C_{cf}}{E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}}.$$

Deci, la aplicarea forței G de tracțiune, fără prestrîngere, variațiile solicitărilor axiale interioare în zona filetelor, au expresiile

$$N_{xcb} = \frac{3G}{l_f^2} \cdot \frac{E_m \cdot C_{mf} - E_c \cdot C_{cf}}{E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}} x^2 - \frac{2G}{l_f} \cdot \frac{2E_m \cdot C_{mf} - E_c \cdot C_{cf}}{E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}} x + G \text{ și}$$

$$N_{xmb} = -\frac{3G}{l_f^2} \cdot \frac{E_m \cdot C_{mf} - E_c \cdot C_{cf}}{E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}} x^2 + \frac{2G}{l_f} \cdot \frac{2E_m \cdot C_{mf} - E_c \cdot C_{cf}}{E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}} x,$$

iar deformația comună

$$\Delta l_b = G/(E_c \cdot C_{cf} + E_m \cdot C_{mf}). \tag{4.5}$$

Se constată că dacă $E_m \cdot C_{mf} < E_c \cdot C_{cf}$, adică dacă cepul este mai rigid, variațiile N_x conduc la o încărcare mai mare a spirelor filetate dinspre zona opusă umărului de strîngere, respectiv dacă $E_m \cdot C_{mf} > E_c \cdot C_{cf}$, deci dacă mufa este mai rigidă, spirele filetate dinspre umăr sînt mai încărcate (fig. 4.3 *b*), precum și faptul că deformația rezultată ține cont de rigiditățile ambelor elemente de îmbinare (comparînd relațiile (4.4) și (4.5), diferențele valorice sînt nesemnificative).

Procedîndu-se în mod similar și avîndu-se în vedere zonele distincte de solicitare și tipurile constructive ale îmbinărilor, se determină, cu caracter informativ, expresiile variațiilor N_x și ale deformațiilor Δl corespunzător celor două etape de solicitare (spre comparație, în variante pentru

tipul de variație al solicitărilor interioare în zonele filetate, liniare sau parabolice), astfel :

— la aplicarea momentului de strîngere M (conform diagramelor de solicitări interioare din fig. 3.1 și 3.2), tabelul 4.1 și

Tabelul 4.1 Deformațiile axiale datorate momentului de strîngere M

Nr crt	Tipul îmbinării (simbol)	Varianta	N_{xMc}		N_{xMm}		Δl_{Mc}	Δl_{Mm}
			N_{xMcu}	N_{xMcf}	N_{xMmu}	N_{xMmf}		
1	cu număr exterior (IKE și ICE)	1	$F\sin u$	$-\frac{F\sin u}{l_f}x + F\sin u$	$-F\sin u$	$\frac{F\sin u}{l_f}x - F\sin u$	$\frac{F\sin u}{E_c}\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{1}{2C_{cf}}\right)$	$-\frac{F\sin u}{E_m}\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{1}{2C_{mf}}\right)$
2		2		$-\frac{3F\sin u}{l_f^2}x^2+\frac{2F\sin u}{l_f}x+F\sin u$		$\frac{3F\sin u}{l_f^2}x^2-\frac{2F\sin u}{l_f}x-F\sin u$	$\frac{F\sin u}{E_c}\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{1}{C_{cf}}\right)$	$-\frac{F\sin u}{E_m}\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{1}{C_{mf}}\right)$
3		3		$-\frac{F\sin u}{l_f^2}x^2+F\sin u$		$\frac{F\sin u}{l_f^2}x^2-F\sin u$	$\frac{F\sin u}{E_c}\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{2}{3C_{cf}}\right)$	$-\frac{F\sin u}{E_m}\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{2}{3C_{mf}}\right)$
4	cu număr interior (IKI și ICI)	1	$-F\sin u$	$-\frac{F\sin u}{l_f}x$	$F\sin u$	$\frac{F\sin u}{l_f}x$	$-\frac{F\sin u}{E_c}\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{1}{2C_{cf}}\right)$	$\frac{F\sin u}{E_m}\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{1}{2C_{mf}}\right)$
5		2		$\frac{3F\sin u}{l_f^2}x^2-\frac{2F\sin u}{l_f}x-F\sin u$		$-\frac{3F\sin u}{l_f^2}x^2+\frac{2F\sin u}{l_f}x+F\sin u$	$-\frac{F\sin u}{E_c}\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{1}{C_{cf}}\right)$	$\frac{F\sin u}{E_m}\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{1}{C_{mf}}\right)$
6		3		$\frac{F\sin u}{l_f^2}x^2-F\sin u$		$-\frac{F\sin u}{l_f^2}x^2+F\sin u$	$-\frac{F\sin u}{E_c}\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{2}{3C_{cf}}\right)$	$\frac{F\sin u}{E_m}\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{2}{3C_{mf}}\right)$

— la aplicarea forței de tracțiune G, considerîndu-se efectele cu care contribuie această forță după aplicarea momentului de strîngere, conform

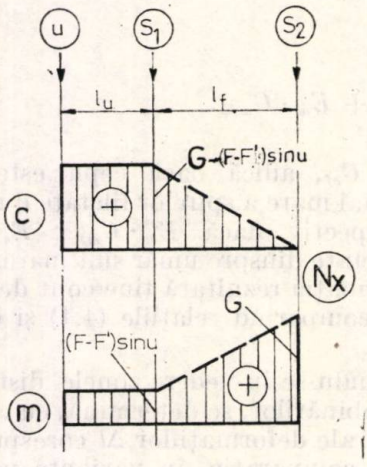


Fig. 4.4 (IKE și ICE)

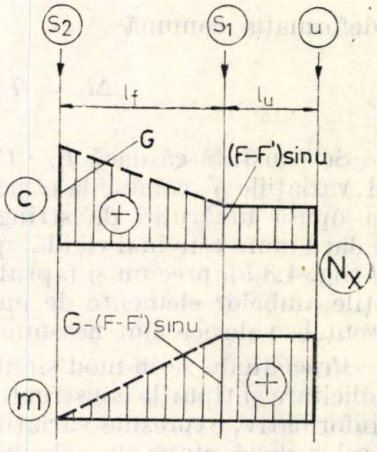


Fig. 4.5 (IKI și ICI)

diagramelor solicitărilor axiale din figurile 4.4 și 4.5, pentru îmbinările cu umăr exterior și respectiv interior, tabelul 4.2 în care

Tabelul 4.2 Deformațiile axiale datorate forței de tracțiune G

Nr. crt.	Tipul îmbinării (simbol)	Varianta	N_{xGc}		N_{xGm}		Δl_{Gc}	Δl_{Gm}
			N_{xGcu}	N_{xGcf}	N_{xGmu}	N_{xGmf}		
1	cu umăr exterior (IKE și ICE)	1	$G+$	$-\frac{G-(F-F')\sin u}{l_f}x+G+$	$(F-F')\sin u$	$\frac{G-(F-F')\sin u}{l_f}x+$	$\frac{G-(F-F')\sin u}{E_c}$	$\frac{G}{2E_mC_{mf}}+\frac{(F-F')\sin u}{E_m}\cdot$
				$-(F-F')\sin u$		$+(F-F')\sin u$	$\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{1}{2C_{cf}}\right)$	$\cdot\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{1}{2C_{mf}}\right)$
2		2	$-(F-F')\sin u$	$a_ex^2+b_ex+G-(F-F')\sin u$		$-a_ex^2-b_ex+(F-F')\sin u$	$\frac{E_cC_{cu}+E_cC_{cf}+E_mC_{mu}+E_mC_{mf}}{(E_cC_{cu}+E_mC_{mu})(E_cC_{cf}+E_mC_{mf})}\cdot G$	
3	cu umăr interior (IKI și ICI)	1	$G+(F-F')\sin u$	$\frac{G+(F-F')\sin u}{l_f}x-G$	$G+$	$\frac{G-(F-F')\sin u}{l_f}x$	$\frac{G}{2E_cC_{cf}}+\frac{(F-F')\sin u}{E_c}$	$\frac{G-(F-F')\sin u}{E_c}\cdot$
							$\cdot\left(\frac{1}{C_{cu}}+\frac{1}{2C_{cf}}\right)$	$\cdot\left(\frac{1}{C_{mu}}+\frac{1}{2C_{mf}}\right)$
4		2	$(F-F')\sin u$	$a_ix^2+b_ix+G$	$-(F-F')\sin u$	$-a_ix^2-b_ix$	$\frac{E_cC_{cu}+E_cC_{cf}+E_mC_{mu}+E_mC_{mf}}{(E_cC_{cu}+E_cC_{mu})(E_cC_{cf}+E_mC_{mf})}G$	

$$a_e=\frac{3}{l_f}\times$$

$$\times\frac{G\left(\frac{2}{E_c\cdot C_{cu}}+\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}-\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}\right)-(F-F')\sin u\left(\frac{2}{E_c\cdot C_{cu}}+\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}+\frac{2}{E_m\cdot C_{mu}}+\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}\right)}{\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}+\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}},$$

$$b_e=-\frac{2}{l_f}\times$$

$$\times\frac{G\left(\frac{3}{E_c\cdot C_{cu}}+\frac{2}{E_c\cdot C_{cf}}-\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}\right)-(F-F')\sin u\left(\frac{3}{E_c\cdot C_{cu}}+\frac{2}{E_c\cdot C_{cf}}+\frac{3}{E_m\cdot C_{mu}}+\frac{2}{E_m\cdot C_{mf}}\right)}{\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}+\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}},$$

$$a_i=-\frac{3}{l_f}\times \qquad (4.6)$$

$$\times\frac{G\left(\frac{2}{E_m\cdot C_{mu}}+\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}-\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}\right)-(F-F')\sin u\left(\frac{2}{E_c\cdot C_{cu}}+\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}+\frac{2}{E_m\cdot C_{mu}}+\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}\right)}{\frac{1}{E_c\cdot C_{cf}}+\frac{1}{E_m\cdot C_{mf}}},$$

$$b_i = \frac{2}{l_f} \times$$

$$\times \frac{G\left(\frac{3}{E_m \cdot C_{mu}} + \frac{1}{E_m \cdot C_{mf}} - \frac{2}{E_c \cdot C_{cf}}\right) - (F - F') \sin u \left(\frac{3}{E_c \cdot C_{cu}} + \frac{1}{E_c \cdot C_{cf}} + \frac{3}{E_m \cdot C_{mu}} + \frac{1}{E_m \cdot C_{mf}}\right)}{\frac{1}{E_c \cdot C_{cf}} + \frac{1}{E_m \cdot C_{mf}}}.$$

Aşa cum s-a arătat (fig. 4.1 şi 4.2), deformaţiile axiale provocate cepului şi mufei de forţa de tracţiune G, compuse din deformaţiile parţiale, corespunzătoare zonelor umărului şi filetului, adică

$$\Delta l_{Gc} = \Delta l_{Gcu} + \Delta l_{Gcf} \text{ şi}$$

$$\Delta l_{Gm} = \Delta l_{Gmu} + \Delta l_{Gmf},$$

sau

$$\Delta l_{Gc} = \frac{G - (F - F') \sin u}{E_c C_{cu}} + \frac{1}{E_c C_{cf}} \left[\frac{a_c l_f^2}{3} + \frac{b_c l_f}{2} + G - (F - F') \sin u\right] \text{şi}$$

$$\Delta l_{Gm} = \frac{(F - F') \sin u}{E_m C_{mu}} + \frac{1}{E_m C_{mf}} \left[-\frac{a_c l_f^2}{3} - \frac{b_c l_f}{2} + (F - F') \sin u\right] \qquad (4.7)$$

pentru îmbinările cu umăr exterior, respectiv

$$\Delta l_{Gc} = \frac{(F - F') \sin u}{E_c C_{cu}} + \frac{1}{E_c C_{cf}} \left(\frac{a_i l_f^2}{3} + \frac{b_i l_f}{2} + G\right), \text{ şi}$$

$$\Delta l_{Gm} = \frac{G - (F - F') \sin u}{E_m C_{mu}} - \frac{1}{E_m C_{mf}} \left(\frac{a_i l_f^2}{3} + \frac{b_i l_f}{2}\right)$$

pentru îmbinările cu umăr inferior,
sînt egale între ele, ca şi deformaţiile lor parţiale, adică

$$\Delta l_{Gc} = \Delta l_{Gm} = \Delta l_G, \text{ respectiv}$$

$$\Delta l_{Gcu} = \Delta l_{Gmu} \text{ şi} \qquad (4.8)$$

$$\Delta l_{Gcf} = \Delta l_{Gmf}.$$

Din această condiţie de egalitate, rezultă ecuaţia suplimentară de echilibru necesară

$$\frac{G - (F - F') \sin u}{E_c C_{cu}} = \frac{(F - F') \sin u}{E_m C_{mu}}$$

pentru îmbinările cu umăr exterior, şi

$$\frac{(F - F') \sin u}{E_c C_{cu}} = \frac{G - (F - F') \sin u}{E_m C_{mu}} \qquad (4.9)$$

pentru îmbinările cu umăr interior, adică

$$G = K_F(F - F') \text{ sau } F' = F - K_G \cdot G \tag{4.10}$$

și, utilizînd relațiile (2.3),

$$P' = F \sin u + K_p \cdot G = G + F' \sin u, \tag{4.11}$$

în care coeficienții K_F, K_G și K_p, corelați prin

$$K_G = 1/K_F = (1 - K_p)/\sin u \text{ și} \tag{4.12}$$

$$K_p = 1 - K_G \sin u = 1 - \frac{\sin u}{K_F}$$

și cu valori depinzînd de rigiditățile zonelor umerilor cepului și mufei, precum și de semiunghiul tronconului umărului u al îmbinării, au expresiile de calcul indicate în tabelul 4.3, pentru cele două categorii principale de îmbinări.

Expresiile K_F, K_G, K_P

Tabelul 4.3

Nr. crt.	Simbolul coeficientului	Simbolul tipului îmbinării constructive	
		IKE și ICE	IKI și ICI
1.	K_F	$\left(1 + \frac{E_c C_{cu}}{E_m C_{mu}}\right) \sin u$	$\left(1 + \frac{E_m C_{mu}}{E_c C_{cu}}\right) \sin u$
2.	K_G	$\frac{E_m C_{mu}}{(E_c C_{cu} + E_m C_{mu}) \sin u}$	$\frac{E_c C_{cu}}{(E_c C_{cu} + E_m C_{mu}) \sin u}$
3.	K_P	$\frac{E_c C_{cu}}{E_c C_{cu} + E_m C_{mu}}$	$\frac{E_m C_{mu}}{E_c C_{cu} + E_m C_{mu}}$

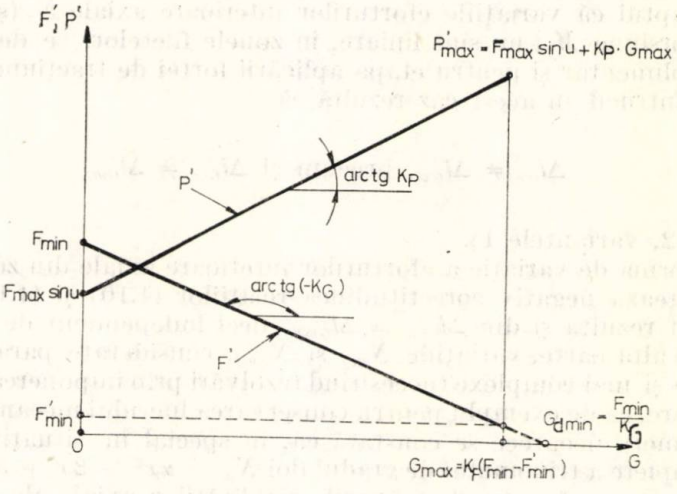


Fig. 4.6

Funcţie de valorile forţei de tracţiune G, forţele din umeri F' şi din filete P' variază deci liniar, coeficienţii unghiulari fiind $-K_G$, pentru F' şi K_p, pentru P (fig. 4.6). Diferenţele dintre aceste variaţii sînt proporţionale cu $(E_c \cdot C_{cu} - E_m \cdot C_{mu} \sin u)$, adică F' scade, iar P' creşte, cu atît mai mult cu cît rigiditatea zonei umărului cepului este mai mare, în raport cu a umărului mufei, în cazul îmbinărilor cu umăr exterior. Dimpotrivă, la îmbinările cu umăr interior, diferenţa dintre variaţiile forţelor F' şi P' este cu atît mai evidentă, cu cît rigiditatea zonei umărului cepului este mai redusă, în comparaţie cu a mufei. Cu condiţia ca limitările să nu fie impuse de rezistenţă, din motive funcţionale :

— forţa de tracţiune maximă admisă este de

$$G_{max} = K_F(F_{min} - F'_{mim}), \tag{4.13}$$

F_{min} rezultînd prin aplicarea momentului de strîngere M minim prescris şi F'_{min} din condiţia de presiune minimă a forţei pe umărul de strîngere, iar forţa maximă din filet nu poate depăşi valoarea

$$P'_{max} = F_{max} \sin u + K_p \cdot G_{max}, \tag{4.14}$$

F_{max} corespunzînd momentului de strîngere maxim aplicat M_{max}, iar

— forţa minimă la desprinderea din umăr este

$$G_{dumin} = F_{min}/K_p. \tag{4.15}$$

Observaţii

— Faptul că variaţiile eforturilor interioare axiale N_x (şi corespunzător de torsiune M_t) nu sînt liniare, în zonele filetelor, se demonstrează în mod suplimentar şi pentru etapa aplicării forţei de tracţiune G cu prestrîngere, întrucît în acest caz rezultă că

$$\Delta l_{Gc} \neq \Delta l_{Gm}, \text{ precum şi } \Delta l_{Gcf} \neq \Delta l_{Gmf}$$

(tabelul 4.2, variantele 1).

— Forma de variaţie a eforturilor interioare axiale din zona filetelor nu influenţează negativ corectitudinea relaţiilor (4.10) şi (4.11), întrucît acestea pot rezulta şi din $\Delta l_{Gcu} = \Delta l_{Gmu}$, deci independent de zonele filetate. Pe de altă parte, variaţiile N_{xcf} şi N_{xmf}, considerate parabolice, sînt în realitate şi mai complexe (necesitînd rezolvări prin impunerea de condiţii suplimentare, ca de exemplu pentru conservarea lucrului mecanic de schimbare a formei), deoarece se constată că, în special în situaţiile utilizării formei complete a trinomului de gradul doi $N_x = \alpha x^2 + \beta x + \delta$, pot apare valori extreme, în funcţie de mărimile rigidităţilor axiale ale elementelor de îmbinare.

— Pentru îmbinările filetate conice, la care secțiunile cepului și mufei au ariile variabile

$$A_{xc} = \frac{\pi}{4}(d_{xc}^2 - d^2) \text{ și } A_{xm} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d_{xm}^2), \text{ în care}$$

$$d_{xc} = d_{0c} - 2x \operatorname{tg}\gamma,$$

$$d_{xm} = d_{0m} - 2x \operatorname{tg}\gamma, \text{ iar}$$

d_{0c} și d_{0m} reprezintă diametrele maxime ale zonelor conice corespunzătoare, expresiile coeficienților de rigiditate se determină, conform (4.1) (N_x fiind considerat constant),

$$C_i = \int_0^{l_i} \frac{dx}{A_{xi}}.$$

Descompunîndu-se în factori și în termeni,

$$A_{xc} = \pi \operatorname{tg}^2\gamma \left(x - \frac{d_{0c} + d}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right)\left(x - \frac{d_{0c} - d}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right) \text{ și}$$

$$A_{xm} = -\pi \operatorname{tg}^2\gamma \left(x - \frac{D + d_{0m}}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right)\left(x + \frac{D - d_{0m}}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right), \text{ respectiv}$$

$$\frac{\frac{1}{\pi \operatorname{tg}^2\gamma}}{\left(x - \frac{d_{0c} + d}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right)\left(x - \frac{d_{0c} - d}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right)} = \frac{K_{1c}}{x - \frac{d_{0c} + d}{2 \operatorname{tg}\gamma}} + \frac{K_{2c}}{x - \frac{d_{0c} - d}{2 \operatorname{tg}\gamma}} \text{ și}$$

$$\frac{-\frac{1}{\pi \operatorname{tg}^2\gamma}}{\left(x - \frac{D + d_{0m}}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right)\left(x - \frac{D - d_{0m}}{2 \operatorname{tg}\gamma}\right)} = \frac{K_{1m}}{x - \frac{D + d_{0m}}{2 \operatorname{tg}\gamma}} + \frac{K_{2m}}{x + \frac{D - d_{0m}}{2 \operatorname{tg}\gamma}},$$

identificîndu-se coeficienții K_{1c}, K_{2c}, K_{1m}, K_{2m} și integrîndu-se definit pe lungimile l_i corespunzătoare de zonelor de solicitare considerate pentru cep și pentru mufă, rezultă relațiile coeficienților de rigiditate

$$C_{ci} = \frac{\pi d \operatorname{tg}\gamma}{\ln \frac{(d_{0c} - d)(d_{0c} + d - 2l_i \operatorname{tg}\gamma)}{(d_{0c} + d)(d_{0c} - d - 2l_i \operatorname{tg}\gamma)}} \text{ și}$$

$$C_{mi} = \frac{\pi D \operatorname{tg}\gamma}{\ln \frac{(D + d_{0m})(D - d_{0m} + 2l_i \operatorname{tg}\gamma)}{(D - d_{0m})(D + d_{0m} - 2l_i \operatorname{tg}\gamma)}} \tag{4.16}$$

recomandate a se aplica în cazul îmbinărilor cu conicități mari.

— Pentru îmbinările filetate la care se aplică forţa de apăsare G_0, diagramele de solicitări axiale, datorate contribuţiei forţei de apăsare după aplicarea momentului de strîngere M, fiind prezentate în figura 4.7

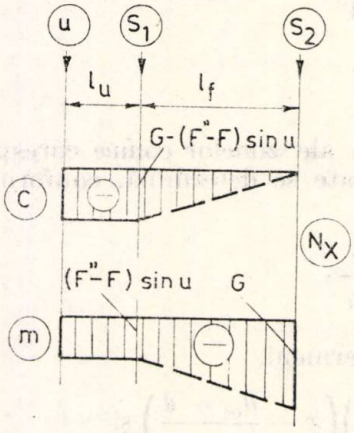


Fig. 4.7 (IKE, ICE)

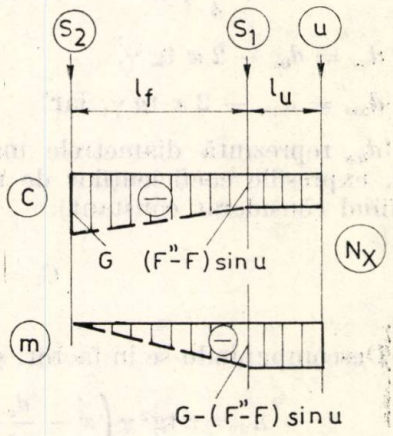


Fig. 4.8 (IKI, ICI)

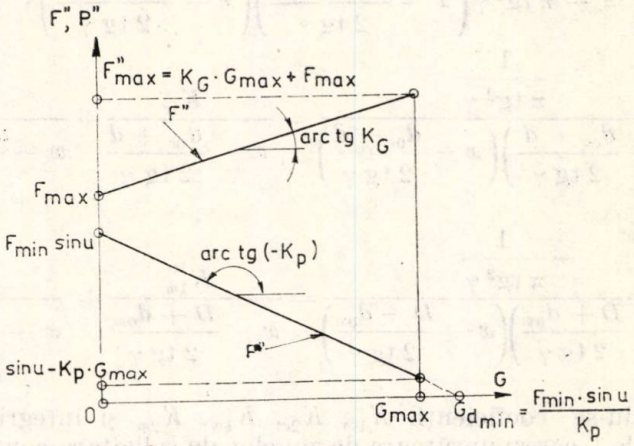


Fig. 4.9

(respectiv în fig. 4.8), ecuaţia suplimentară de echilibru dedusă similar relaţiilor (4.9) este

$$G = K_F(F'' - F)$$

sau (4.17)

$$F'' = K_G \cdot G + F,$$

de unde, utilizînd relaţiile (2.11),

$$P'' = F'' \sin u - G = F \sin u - K_p \cdot G \qquad (4.18)$$

coeficienții K_F, K_G, K_p menținîndu-și corelațiile și expresiile, conform (4.12) și tabelul (4.3). Variațiile F'' și P'' sînt prezentate schematic în figura 4.9, constatîndu-se că forței maxime de apăsare G_{max} îi corespunde forța maximă din umeri

$$F''_{max} = K_G \cdot G_{max} + F_{max} \tag{4.19}$$

și forța minimă din filet

$$P''_{min} = F_{min} \cdot \sin u - K_p \cdot G_{max}, \tag{4.20}$$

iar desprinderea din filet are loc pentru forța minimă

$$G_{dfmin} = F_{min} \cdot \sin u / K_p. \tag{4.21}$$

5. CALCULUL DE REZISTENȚĂ

În funcție de scopul urmărit prin calculul de rezistență, adică verificarea, determinarea capacității portante sau dimensionarea îmbinării, se stabilește o anumită ordine a operației de calcul.

Definindu-se *secțiunea critică* (periculoasă) ca fiind secțiunea cu eforturile unitare maxime și deci cu coeficient minim de siguranță (pe zone, elemente de îmbinare și/sau ansamblul îmbinării), analiza etapelor și categoriilor de solicitare, pe tipuri și pe elemente de îmbinare, a pus în evidență următoarele secțiuni (posibil) critice, pentru care este deci necesar aplicarea calculului de rezistență, tabelul 5.1 (conform notațiilor

Tabelul 5.1 **Secțiunile critice**

Nr. crt.	Simbolul tipului constructiv al îmbinării	Secțiunile (posibil) critice ale elementelor de îmbinare	Tipul eforturilor unitare (simbolul secțiunii critice) corespunzatoare etapelor de solicitare: 1 (aplicarea momentului de strîngere M)	2 (aplicarea forței de tracțiune G_q, a momentului M_F și a presiunii P_i)
1	IKE, ICE	Suprafața umărului de strîngere	strivire (S_U)	
2		Secțiunea cepului	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)
3		Secțiunile mufei	compres., eforturi radiale și torsiune (S_1)	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_2)
4		Secțiunea filetului cepului	–	încovoiere și forfecare (S_{fc})
5		Secțiunea filetului mufei	–	încovoiere și forfecare (S_{fm})
6		Suprafața de contact a filetelor	–	strivire (S_{Sf})
7	IKI, ICI	Suprafața umărului de strîngere	strivire (S_U)	—
8		Secțiunile cepului	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_2)
9		Secțiunea mufei	compres., eforturi radiale și torsiune (S_1)	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)
10		Secțiunea filetului cepului	–	încovoiere și forfecare (S_{fc})
11		Secțiunea filetului mufei	–	încovoiere și forfecare (S_{fm})
12		Suprafața de contact a filetelor	–	strivire (S_{Sf})

din fig. 3.1 ... 3.5, s_{fc} şi s_{fm} reprezentînd secţiunile critice ale filetului şi respectiv — mufei) :

— suprafaţa de contact a umărului de strîngere (în etapa întîia de solicitare),

— secţiunile cepului (în ambele etape de solicitare),

— secţiunile mufei (în ambele etape de solicitare),

— secţiunea filetului cepului (în etapa a doua de solicitare),

— secţiunea filetului mufei (în etapa a doua de solicitare) şi

— suprafaţa de contact a filetului (de asemenea, în etapa a doua de solicitare).

Pentru îmbinările filetate la care numărul de înşurubări-deşurubări este mare, ca în cazul îmbinărilor pentru prăjinile de foraj, rezistenţele admisibile au valorile raportate la limitele de curgere respective. Întrucît elementele îmbinării pot fi realizate din materiale cu caracteristici mecanice diferite, s-au adoptat notaţii distincte pentru limitele de curgere σ_c şi pentru coeficienţii de siguranţă prescrişi c (în raport cu limitele de curgere), adică σ_{co} şi c_c pentru cep, respectiv σ_{cm} şi c_m pentru mufă, coeficientul de siguranţă la strivire fiind simbolizat cu c_s.

Considerîndu-se valorile maxime ale solicitărilor exterioare, constînd din :

— forţa de prestrîngere F sin u(depinzînd de momentul de strîngere M, adică, conform (2.4), $F = M/K_u$),

— forţa de tracţiune G_0,

— momentul de lucru $M_F \leqslant M$ şi din

— presiunea de circulaţie p_i, inclusiv din efectul acesteia, forţa de tracţiune G_{pi}, conform (2.5),

compunerea eforturilor unitare σ şi τ din secţiunile critice s-a făcut în ipoteza a V-a de calcul, conform căreia ruperea este atribuită lucrului mecanic de schimbare a formei, adică

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant \tau_c/c \qquad (5.0)$$

Primită la redacţie la 23 noiembrie 1983

BIBLIOGRAFIE

4.1. — D. CONSTANTINESCU, T. V. HUNCKER, I. MOHORA, M. PETRE. *Metodă de calcul a imbinărilor filetate cu umăr. I*, St. Cerc. Mec. Apl, **43**, *4* (1984).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL INFLUENȚEI STRATULUI LIMITĂ ASUPRA DINAMICII SUPAPELOR DE SIGURANȚĂ

de I. SPULBER

Institutul Politehnic, București

C. SPULBER

Intreprinderea Optică Română — IOR, București

În lucrare se analizează influența pe care o are stratul limită, ca fenomen hidrodinamic specific funcționării supapelor de presiune și rolul exercitat de ele în dinamica mașinilor. Pentru punerea în evidență a fenomenului, am luat în considerare o supapă de presiune aleasă arbitrar însă în conexiune cu grosimea stratului limită pe care o admitem ca variabilă hidrodinamică.

Efectuînd calculele pentru trei performanțe dinamice ale supapelor ale căror rezultate sînt cuprinse în tabele și prezentate în grafice, se ajunge la concluzia că dacă se neglijează efectul stratului limită care se formează pe pistonul supapei și pe scaunul lui în timpul curgerii fluidului, ca fenomen specific al acestei curgeri, se aduc prejudicii însemnate în funcționarea mașinilor.

Neajunsurile provenite din neluarea în considerare a stratului limită nu pot fi eliminate decît parțial în lucrarea de față, însă sperăm ca în studiile pe care le vom efectua în viitor să aducem elemente noi în vederea elucidării fenomenului.

1. INTRODUCERE

În sistemele dinamice cu legătură elastică, în anumite condiții apar destul de frecvent autooscilații cu consecințe negative asupra întregii instalații și cu repercusiuni grave în funcționare.

Pentru înlăturarea autooscilațiilor, mașinile și instalațiile sînt prevăzute cu supape de siguranță, ele constituind elementele principale în majoritatea circuitelor hidraulice, care, pe lîngă funcția de stabilitate dinamică, au și rolul de protecție atunci cînd apar suprapresiuni în sistem. Excesul de presiune din sistem se elimină prin expulzarea lichidului suplimentar (excedentar) p in supapele de siguranță în rezervor.

În general, performanțele dinamice ale supapelor de siguranță reprezintă un criteriu decisiv în exploatare, din această cauză înainte de proiectarea lor se fac deobicei studii pe baza modelelor matematice și experiențe pe machete. Modelele experimentale au parametrii de lucru și formele cît se poate de apropiate de ale instalațiilor din întreprinderi și se fac observații asupra comportării lor în timp.

Pînă în prezent, în literatura de specialitate au fost publicate multe rezultate ale cercetătorilor privind influența parametrilor dinamici ai supapelor de siguranță. O analiză mai atentă a rezultatelor acestor cercetări ne arată că deși s-a obținut o sensibilă apropiere între rezultatele obținute pe modelele matematice și cele măsurate pe standurile experimentale, totuși apar unele dificultăți care se datoresc faptului că în calcul au fost luați numai principalii parametrii dinamici și geometrici și acestea nu cu pondere suficientă pentru stabilirea performanțelor dinamice ale mașinilor. Unul din factori ne luat în considerare suficient este de natură hidrodinamică și anume stratul limită de care ne vom ocupa în această lucrare

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 44, NR. 1, 1985, P. 65—75

2. CONSIDERAȚII FENOMENOLOGICE

Dacă considerăm că la un moment dat apare un exces de lichid în came a supapei, ca urmare apare și o variație a presiunii p, care este mai mare decît presiunea de deschidere a supapei, pistonul se deplasează cu distanța x ca în figura 1a și b. Surplusul de lichid este împins în rezervor

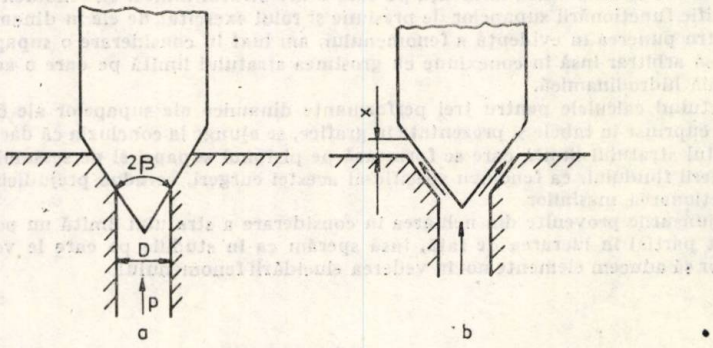


Fig. 1

prin interstițiul creat între piston și scaun, iar ca rezultat al acestei curgeri se formează un strat limită pe peretele pistonului AA' și pe scaunul lui, BB', figura 2.

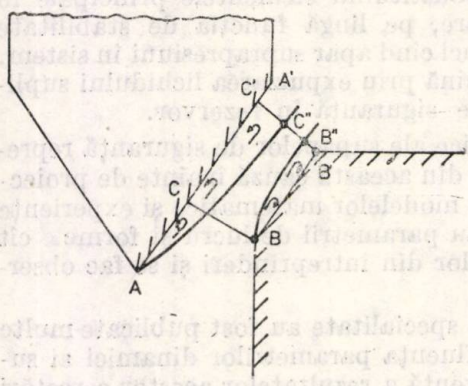


Fig. 2

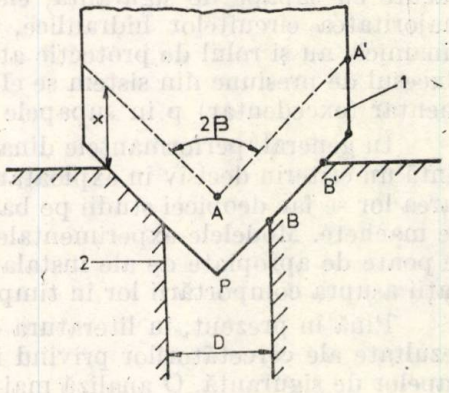


Fig. 3

În studiile făcute pînă în prezent prin neluarea în considerare a stratului limită, interstițiul de curgere x este mai mic decît în cazul interstițiului format real x_1, unde se ține seama de grosimea de deplasare a stratului limită. Este evident că în ambele cazuri trebuie să treacă același debit Q, iar presiunea lichidului va trebui să aibă o valoare mai mare pentru a învinge forța suplimentară a arcului care a luat naștere în urma deplasării reale a pistonului.

3. CONSIDERAȚII ANALITICE

3.1. *Calculul variației grosimii de deplasare a stratului limită.* Admițînd o supapă de siguranță axial simetrică ca în figura 3, în conformitate cu [5] relația de calcul a debitului care circulă prin fanta conică este

$$Q = \frac{\pi p x^3 \operatorname{tg}^4\beta}{6\eta}, \tag{1}$$

unde η este viscozitatea dinamică a lichidului, p fiind presiunea de intrare a lichidului în camera etanșe a pistonului 1, iar x este mărimea orificiului creat între piston și scaunul său 2.

Totodată, admitem că lichidul are o viteză de deplasare constantă în tot timpul funcționării mașinii care este dată de relația

$$v_\infty = \frac{4Q}{\pi(4Dx\operatorname{tg}\beta - 4x^2\operatorname{tg}^2\beta)}. \tag{2}$$

În relația (2) se poate neglija al doilea termen de la numitor, deoarece se observă ușor că $x^2\operatorname{tg}^2\beta \ll Dx\operatorname{tg}\beta$, iar relația de mai sus devine

$$v_\infty = \frac{Q}{\pi Dx\operatorname{tg}\beta}. \tag{3}$$

Așa cum am arătat mai înainte, admitem că în instalații debitul de lichid care circulă prin orificiul real x_l, cît și cel care circulă prin orificiul ideal x, este același. Acest lucru ne obligă ca în continuarea calculelor noastre să ținem seama de grosimea de deplasare a stratului limită.

Dacă facem notația

$$\xi = x_l - x, \tag{4}$$

din figura 2 se observă că relația (4) mai poate fi scrisă

$$\xi = \frac{B'B'' + C'C''}{\sin\beta}, \tag{5}$$

în care, așa după cum rezultă din [6], $B'B''$ și $C'C''$ se pot aproxima cu relațiile

$$B'B'' \simeq 1{,}73\sqrt{\frac{\eta BB'}{\rho v_\infty}} \tag{6}$$

și

$$C'C'' \simeq 1{,}73\sqrt{\frac{\eta AC'}{\rho v_\infty}},$$

unde ρ este densitatea lichidului din instalaţie. După citeva calcule elementare se obţine

$$\xi = \frac{1{,}73}{\sin\beta}\sqrt{\frac{\eta}{\rho}\frac{\pi D x \operatorname{tg}\beta}{Q}\left(\frac{D}{2\sin\beta} - x\cos\beta\right)}, \tag{7}$$

în care s-a neglijat BB', deoarece $BB' \ll AC'$. (În construcţiile supapelor pentru maşini unelte $BB' = 0{,}1 - 1$ mm, iar $AC' = 10 \ldots 20$ mm). În continuare, dacă ţinem seama de relaţia (1) şi de faptul că, la curgerea printr-un difuzor, cu gradient de presiune, relaţia (7) se majorează, prin similitudine cu [7] devenind

$$\xi \simeq \frac{1{,}73\eta}{\sin\beta\operatorname{tg}\beta}\sqrt{\frac{6D}{\rho\operatorname{tg}\beta}\left(\frac{D}{2\sin\beta} - x\cos\beta\right)\cdot\frac{1}{x\sqrt{p}}}. \tag{8}$$

Pentru a pune în evidenţă variaţia grosimii de deplasare a stratului limită în funcţie de deplasarea supapei şi de presiunea de lucru a lichidului din instalaţie, vom lua la întîmplare o supapă de presiune care are următorii parametrii: $D = 15$ mm, $\beta = 38°$, $\eta = 8{,}8 \cdot 10^{-2}$ Ns/m^2, $\rho = 880$ kg/m^3 $m = 100$ g şi $b = 80$ Ns/m.

Cu valorile parametrilor de mai sus, expresia (8) devine

$$\xi = \frac{0{,}8\sqrt{12{,}175 - 0{,}788\,x}}{x\sqrt{p}}, \tag{9}$$

şi dacă vom considera valorile reale de deplasare a stratului limită date de relaţiile,

$$\xi_0 = \frac{0{,}8\sqrt{12{,}175 - 0{,}788x}}{x\sqrt{p}},$$

şi, respectiv,

$$\xi_a = \frac{0{,}8\sqrt{12{,}175}}{k\,x\sqrt{p}},$$

unde ξ_0 este grosimea iniţială, iar ξ_a grosimea finală de deplasare a stratului limită.

Constanta k se poate determina dacă se admite o eroare Δ de maximum 5% şi o deplasare a supapei de siguranţă de maximum 3 mm ($x = 3$ mm).

Pentru calculul erorii utilizăm relaţia

$$\Delta\% = \left|\frac{\xi_0 - \xi_a}{\xi_0}\right| 100, \tag{10}$$

după efectuarea calculelor se obţine $k = 1{,}07$.

Formula de calcul a variației grosimii de deplasare a stratului limită capătă forma simplificată

$$\xi = \frac{2{,}7}{x\sqrt{p}}. \tag{11}$$

Analizînd mai îndeaproape influența variației grosimii stratului limită asupra dinamiccii supapelor de presiune, vom considera trei cazuri pentru care efectuăm calculele cu ajutorul relației (11) al căror rezultat sînt cuprinse în tabelul 1, și care n-au servit la trasarea graficelor din figura 4 și figura 5.

În figura 4 se observă variația grosimii stratului limită în funcție de presiune și de interstițiul de deschidere x al supapei, iar în figura 5 este prezentată variația grosimii stratului limită în funcție, de asemenea, de presiune și de mărimea interstițiului x. Din ambele grafice rezultă că grosimea stratului limită este invers proporțională cu presiunea cît și cu deschiderea supapei, ceea ce rezultă dealtfel și din relația (11).

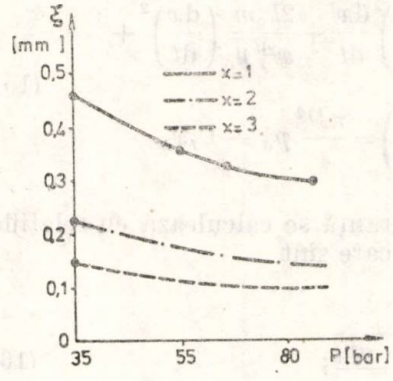


Fig. 4

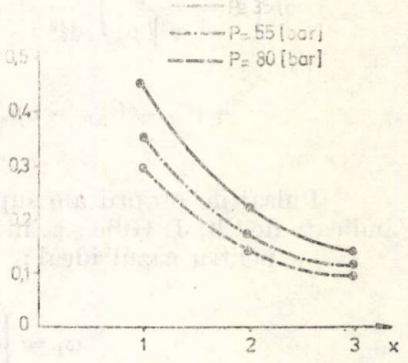


Fig. 5

3.2. *Dinamica supapelor de siguranță.* Să considerăm pentru început ecuația de mișcare a supapei aceea dată de W. Brodowski în lucrarea [1], care este de forma

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + C_f x = \frac{\pi D^2}{4}p - C_f x_0 + C_{hd0}x + \sigma p x \tag{12}$$

în care m este masa pistonului supapei, b este un coeficient de amortizate viscoasă proporțională cu viteza, C_f este constantă de elasticitate a arcului supapei, $C_f x_0$ reprezintă pretensionarea arcului, iar C_{hd0} și σ sînt coeficienți hidrodinamici.

Această ecuație este neliniară, produsul px este termenul de neliniaritate, de asemenea reprezintă cazul ideal în care nu se ia în considerare stratul limită.

Dacă ţinem seama de rezultatele relaţiei (3) şi o combinăm cu relaţiile (11) şi (12) ecuaţia de mişcare a supapei pentru cazul real este

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x+\frac{k_0}{x\sqrt{p}}\right)+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x+\frac{k_0}{x\sqrt{p}}\right)+C_f\left(x+\frac{k_0}{x\sqrt{p}}\right)=$$

$$=\frac{\pi D^2}{4}p-C_f x_0+C_{hd0}\left(x+\frac{k_0}{x\sqrt{p}}\right)+\sigma p\left(x+\frac{k_0}{x\sqrt{p}}\right), \tag{13}$$

unde $k_0 = 2{,}7$.

Pentru a putea face o analiză a dinamicii supapei de siguranţă vom utiliza o mărime de intrare treaptă, adică putem să considerăm presiunea constantă, $p = p_0$. În acest caz ecuaţiile de mişcare (12) şi (13) devin

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(C_f-C_{hd0}-\sigma p_0)x=\frac{\pi D^2}{4}p_0-c_f x_0 \tag{14}$$

şi, respectiv,

$$m\left(1-\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\left(1-\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{2k_0m}{x^2\sqrt{p_0}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+$$

$$+(C_f-C_{hd0}-\sigma p_0)\left(1+\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right)=\frac{\pi D^2}{4}p_0-C_f x_0. \tag{15}$$

Pulsaţiile proprii ale supapei de siguranţă se calculează cu relaţiile indicate de Ch. J. Gille ş.a. în lucrarea [3] care sînt

— pentru cazul ideal:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{C_f-C_{hd0}-\sigma p_0}{m}}; \tag{16}$$

— pentru cazul real:

$$\omega_2=\sqrt{\frac{(C_f-C_{hd0}-\sigma p_0)\left(1+\frac{k_0}{x_0\sqrt{p_0}}\right)}{m\left(1-\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right)}}. \tag{17}$$

Făcînd raportul relaţiilor (16) şi (17) se obţine

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{1+\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}}{1-\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}}}. \tag{18}$$

și dacă ținem din nou seama de expresia (11) în care

$$\frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}} = \frac{\xi}{x},$$

expresia (18) devine

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}\sqrt{\frac{x+\xi}{x-\xi}}. \tag{19}$$

În figura 6 sînt reprezentate raportul pulsațiilor proprii calculate cu ajutorul expresiei (19), în funcție de grosimea stratului limită. Rezultatul calculelor sînt cuprinse în tabelul 1. Se observă că odată cu creșterea stratului limită, pulsația proprie are o evoluție rapidă pentru toate supapele care lucrează la presiunile considerate (p = 35, 55 și 80 bari).

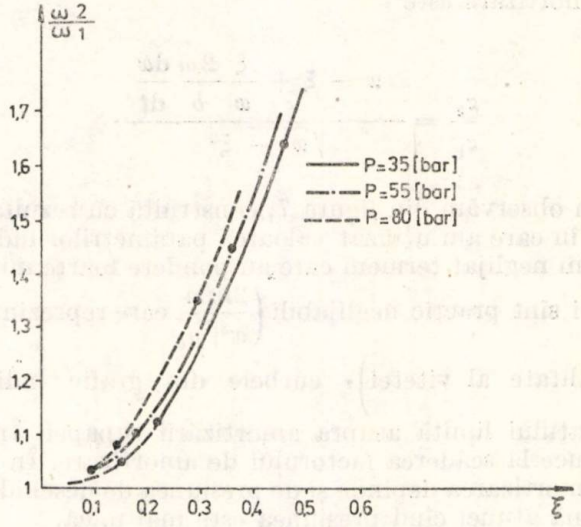


Fig. 6

Tabelul 1

p[bar]	35			55			80		
x[mm]	1	2	3	1	2	3	1	2	3
ξ[mm]	0,47	0,23	0,15	0,36	0,18	0,12	0,3	0,15	0,1
ω_2/ω_1	1,64	1,12	1,05	1,45	1,1	1,04	1,35	1,07	1,03
ω_R/ω_{R1}	1,08	1,94	0,96	1,03	0,96	0,98	0,99	0,96	0,97
Z_2/Z_1	0,61	0,89	0,95	0,69	0,91	0,96	0,74	0,93	0,97

O altă performanță dinamică a supapelor de siguranță este indicată tot în lucrarea [3] a lui Ch. J. Gille cunoscută sub denumirea de *factor relativ de amortizare*, notat cu Z.

Expresia factorului relativ de amortizare pentru cazul ideal este

$$Z_1 = \frac{b}{2\sqrt{m(C_f - C_{hd0} - \sigma p_0)}}, \tag{20}$$

iar pentru cazul real, expresia factorului de amortizare este

$$Z_2 = \frac{b\left(1 - \frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right) + \frac{2k_0 m}{x^3\sqrt{p_0}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{m\left(1 - \frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right)\left(1 + \frac{k_0}{x^2\sqrt{p_0}}\right)(C_f - C_{hd0} - \sigma p_0)}}. \tag{21}$$

Dacă şi în acest caz ţinem seama de rezultatele relaţiei (11), expresia factorului de amortizare este

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x - \xi + \frac{\xi}{x}\frac{2m}{b}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}. \tag{22}$$

După cum observăm din figura 7, construită cu rezultatele obţinute din relaţia (22) în care am utilizat valoarea parametrilor indicaţi mai înainte şi în care am neglijat termeni care au pondere foarte mică în procesul de amortizare şi sînt practic neglijabili $\left(\frac{2k_0 m}{x^3\sqrt{p_0}}\right.$ care reprezintă coeficientul de proporţionalitate al vitetei$\left.\right)$, curbele din grafic indică ponderea deosebită a stratului limită asupra amortizării supapei. În primul rînd stratul limită duce la scăderea factorului de amortizare. În al doilea rînd se constată că amortizarea depinde şi de presiunea de deschidere a supapei, ea fiind mai bună atunci cînd presiunea este mai mică.

Valorile factorului relativ de amortizare din tabelul 1 au fost calculate ţinîndu-se seama şi de viteza supapei de siguranţă $\frac{\Delta x}{xt}$, dar am constatat că cele trei mărimi ale vitezei $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40\,;\ 80 \text{ şi } 120\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}\right)$ nu modifică cu nimic factorul de amortizare, el rămînînd constant pentru aceeaşi presiune şi pentru aceeaşi mărime a orificiului de deschidere x, pentru asta n-a fost prins în tabel.

În aceeaşi lucrare [3] a cercetătorului Ch. J. Gille se indică modul de calcul a pulsaţiei de rezonanţă ω_{R2}/ω_{R1}. Formula de calcul pe care o indică are forma

$$\frac{\omega_{R2}}{\omega_{R1}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\sqrt{1 - z_2^2}}{\sqrt{1 - z_1^2}}, \tag{23}$$

unde se observă ușor că pentru obținerea ei s-a folosit de rezultatele relațiilor (19) și (22), în care a notat cu ω_{R1} pulsația de rezonanță a supapei în cazul ideal, iar cu ω_{R2} pulsația de rezonanță a supapei în cazul real.

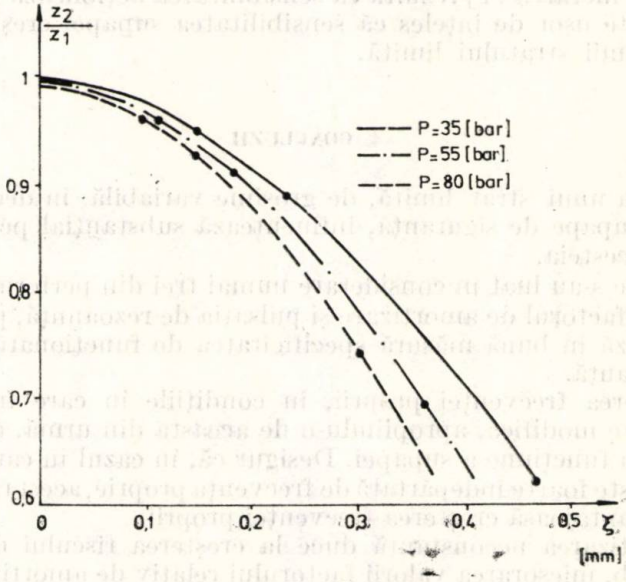


Fig. 7

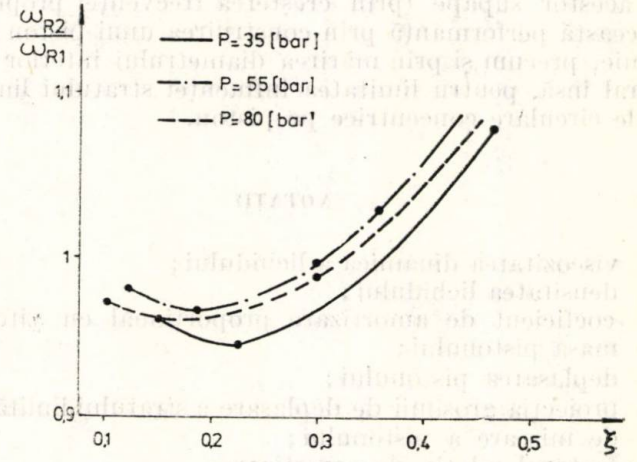


Fig. 8 (mm)

Din figura 8 se observă mici variații ale pulsației de rezonanță care sînt în funcție de variațiile stratului limită și de presiunea de deschidere a supapei. Variația pulsației de rezonanță este cu atît mai mică cu cît este

mai mare presiunea de deschidere a supapei. În general pulsația de rezonanță nu suferă modificări subspanțiale.

O altă performanță dinamică a supapei de siguranță este *sensibilitatea* care poate fi dedusă cu ușurință din relația (22). Din cercetările lui W. Bordowski din lucrarea [1] rezultă că sensibilitatea acționează polar amortizării, deci este ușor de înțeles că sensibilitatea supapei crește odată cu creșterea grosimii stratului limită.

4. CONCLUZII

Existența unui strat limită, de grosime variabilă, în decursul funcționării unei supape de siguranță, influențează substanțial performanțele dinamice ale acesteia.

În lucrare s-au luat în considerare numai trei din performanțe : frecvența proprie, factorul de amortizare și pulsația de rezoannță, performanțe care sintetizează în bună măsură specificitatea de funcționare a unei supape de siguranță.

1. Creșterea frecvenței proprii, în condițiile în care frecvența de rezonanță nu se modifică, apropiindu-o de aceasta din urmă, crește riscul de scoatere din funcțiune a supapei. Desigur că, în cazul în care frecvența de rezonanță este foarte îndepărtată de frecvența proprie, acest risc nu există și este deci avantajoasă creșterea frecvenței proprii.

2. Amortizarea neconstantă duce la creșterea riscului de instabilitate. În schimb, micșorarea valorii factorului relativ de amortizare duce la creșterea timpului de stabilizare al supapei.

3. Pentru cazurile concrete în care stratul limită influențează pozitiv dinamica acestor supape (prin creșterea frecvenței proprii) se poate îmbunătăți această performanță prin construirea unui piston cu unghi la vîrf cît mai mic, precum și prin mărirea diametrului interior al carcasei.

În general însă, pentru limitatea influenței stratului limită se pot practica canale circulare concentrice pe piston.

NOTAȚII

η — vîscozitatea dinamică a lichidului ;
ρ — densitatea lichidului ;
b — coeficient de amortizare proporțional cu viteza ;
m — masa pistonului ;
x — deplasarea pistonului ;
ξ — proiecția grosimii de deplasare a stratului limită pe direcția de mișcare a pistonului ;
z — factorul relativ de amortizare ;
ω_n — pulsația proprie ;
ω_{Rn} — pulsația de rezonanță ;
C_f — constantă elastică a arcului supapei ;
C_{hd0}, σ — coeficienți hidrodinamici ;
p — presiunea de intrare în supapă ;
β — unghiul de vîrf al pistonului ;

D — diametrul interior al carcasei supapei;
Q — debitul care curge prin supapă;
t — timpul.

Primită la redacție la 3 februarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. W. BRODOWSKI, *Das stationäre und dynamische Verhalten einstufiger Druckbegrenzungsventile*, Industrie — Anzeiger, *54* (1972).
2. W. BRODOWSKI, *Stabilitätsbedingungen direktwirkender Druckbegrenzungsventile*, Industrie—Anzeiger, *80* (1973).
3. CH. J. GILLE ș.a., *Dinamique de la commande linéaire*, Dunod, Paris, 1967.
4. C. MATEESCU, *Hidraulica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1963, p. 356.
5. A. OPREAN ș.a., *Acționări hidraulice*, Edit. tehnică, București, 1976.
6. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1967, p. 242.
7. A. J. REYNOLDS, *Curgeri turbulente în tehnică*, Edit. tehnică, București, 1981.

METODĂ MATRICEALĂ PENTRU STUDIUL ÎNCOVOIERII GRINZII CONTINUE PE REAZEME ELASTICE INTERDEPENDENTE

de SORIN D-TRU MUȘAT,
Universitatea din Galați

În lucrare se prezintă o metodă de studiu a încovoierii grinzii drepte rezemată în mai multe puncte pe o structură elastică. Se pornește de la ecuațiile *Clapeyron* (ecuațiile de trei săgeți și trei momente) scrise pentru reazemele intermediare, folosind o formulare matriceală a sistemului de ecuații. Interdependența dintre reazeme este luată în considerare folosind fie matricea coeficienților de influență pentru deplasări, fie matricea de rigiditate a structurii de reazem. Se prezintă atît o formulare cu necunoscute momentele de continuitate cît și o formulare cu necunoscute săgețile în punctele de rezemare.

1. ASPECTE INTRODUCTIVE

Se consideră o grindă dreaptă rezemată în mai multe puncte pe structura elastică de rezemare (fig. 1 *a*); asupra grinzii acționează numai sarcini transversale. Singurele forțe active care acționează asupra structurii de reazem sînt reacțiunile din reazemele grinzii, cu direcție perpendiculară pe grindă. Rigiditatea la încovoiere se consideră constantă pe o deschidere, putînd varia de la o deschidere la alta. Structura elastică de rezemare asigură pentru grindă un sistem de *reazeme elastice interdependente.*

Fie sistemul de bază obținut prin eliberarea momentelor de continuitate M_i, $i = 1, \ldots n$, din secțiunile de reazem. Fie v_i, $i = 0, 1, \ldots n$, $n + 1$, săgețile grinzii în secțiunile de reazem (fig. 1*b*) și diagramele de momente obținute pe deschideri din forțele aplicate considerate ca acționînd pe sistemul de bază (fig. 1*c*). Se notează :

$$\alpha_i = \frac{l_i}{I_i}, \quad T_i = \frac{\mathcal{R}_i'}{I_i} + \frac{\mathcal{R}_i''}{I_{i+1}} = \frac{1}{I_i}\frac{A_i d_i'}{l_i} + \frac{1}{I_{i+1}}\frac{A_{i+1} d_i''}{l_{i+1}}, \quad i = 1, \ldots n, \quad (1)$$

unde $\mathcal{R}_i'$, $\mathcal{R}_i''$ reprezintă componente ale „reacțiunii" obținute în reazemul din secțiunea (i) pentru sistemul de bază considerat încărcat cu diagramele de momente din figura 1*c* ca sarcini; A_i, A_{i+1} sînt ariile diagramelor de momente, d_i', d_i'' sînt distanțele de la centrele de greutate ale acestor arii, respectiv la punctele de reazem $(i - 1)$, $(i + 1)$.

Ecuația lui *Clapeyron* (ecuația de trei săgeți și trei momente) pentru fiecare reazem intermediar (i) duce la sistemul de ecuații

$$M_{i-1}\alpha_i + 2M_i(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + M_{i+1}\alpha_{i+1} + 6T_i = 6E\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} + \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right), \quad (2)$$

$$i = 1, \ldots n.$$

Reacțiunile din reazeme se exprimă:

$$R_i = R_i^0 + \frac{1}{l_i} M_i - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) M_i + \frac{1}{l_{i+1}} M_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots n, n+1, \tag{3}$$

unde R_i^0 sînt reacțiunile obținute pe sistemul de bază numai din sarcini aplicate; eventuale forțe concentrate acționînd chiar în secțiunile de reazem sînt incluse în R_i^0.

Se introduc matricele:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2(\alpha_2+\alpha_3) & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 2(\alpha_3+\alpha_4) & \alpha_4 & & \\ 0 & 0 & \alpha_4 & & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 2(\alpha_{n-1}+\alpha_n) & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_n & 2(\alpha_n+\alpha_{n+1}) \end{bmatrix}_{n\times n}, \tag{4}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1^{-1} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ -(l_1^{-1}+l_2^{-1}) & l_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ l_2^{-1} & -(l_3^{-1}+l_3^{-1}) & & & \\ 0 & l_3^{-1} & & 0 & \\ \vdots & 0 & & l_{n-1}^{-1} & 0 \\ & \vdots & & -(l_{n-1}^{-1}+l_n^{-1}) & l_n^{-1} \\ & & & l_n^{-1} & -(l_n^{-1}+l_{n+1}^{-1}) \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & l_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}_{(n+2)\times n}, \tag{5}$$

cu care relațiile (2) și (3) se scriu în formă matriceală:

$$[A]\{M\} + 6\{T\} = -6E[L]^T\{v\}, \tag{6}$$

$$\{R\} = \{R^0\} + [L]\{M\}. \tag{7}$$

S-a notat :

$$\{M\} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}^T, \quad \{T\} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}^T,$$

$$\{R\} = \{R_0, R_1, \ldots, R_n, R_{n+1}\}^T, \quad \{R^0\} = \{R_0^0, R_1^0, \ldots R_n^0, R_{n+1}^0\}^T,$$

unde T indică operaţia de transpunere.

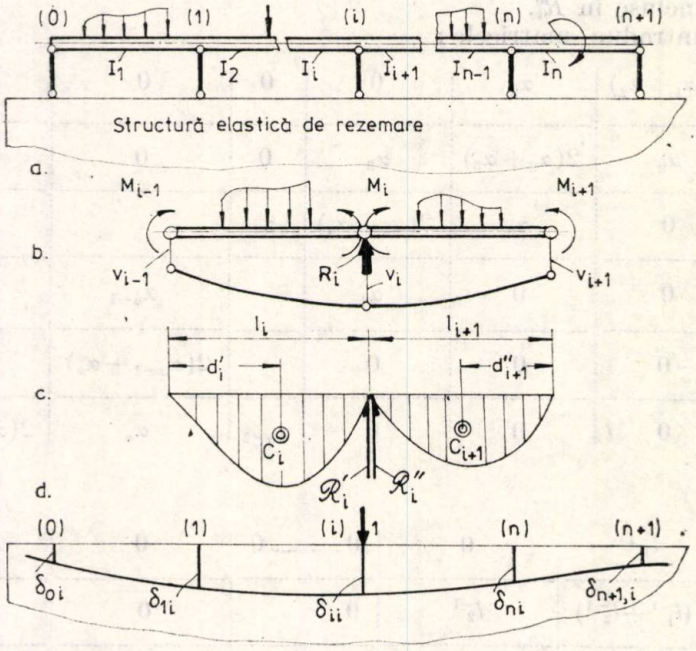


Fig. 1

2. FORMULAREA ECUAŢIILOR CU NECUNOSCUTE MOMENTE

Fie $[D]$ matricea construită cu coeficienţii de influenţă pentru deplasări δ_{ij}, $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$, referitoare la structura elastică de reazem (fig. 1*d*),

$$[D] = [\delta_{ij}].$$

Notînd cu $\{v\} = \{v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}^T$ vectorul construit cu săgeţile grinzii în secţiunile de reazem, acesta se poate exprima

$$\{v\} = [D]\{R\} \tag{8}$$

sau, ţinînd cont de relaţia (7),

$$\{v\} = [D]\{R^0\} + [D][L]\{M\}. \tag{9}$$

În baza relaţiei (9), relaţia (6) se va scrie

$$[A]\{M\} + 6\{T\} = -6E[L]^T([D][R^0] + [D][L]\{M\})$$

sau

$$([A] + 6E[L]^T [D] [L]) \{M\} = -6([T] + E[L]^T [D] \{R^0\}). \quad (10)$$

Notînd

$$[\tilde{A}] = [A] + 6E[L]^T[D][L], \quad (11)$$

$$\{B\} = -6(\{T\} + E[L]^T[D]\{R^0\}), \quad (12)$$

relația (10) se va scrie condensat

$$[\tilde{A}]\{M\} = \{B\}, \quad (13)$$

care reprezintă, în formă matriceală, sistemul de ecuații al problemei, cu necunoscute momentele de continuitate.

Matricele $[A]$ și $[D]$ sînt simetrice; produsul $[L]^T[D][L]$ are ca rezultat tot o matrice simetrică, astfel că matricea $[\tilde{A}]$ este de asemenea simetrică.

Dacă grinda prezintă și reazeme rigide, acestea se includ în numerotare, iar în matricea $[D]$ vor apare, corespunzător numărului fiecărui reazem rigid, cîte o linie și o coloană cu elemente nule.

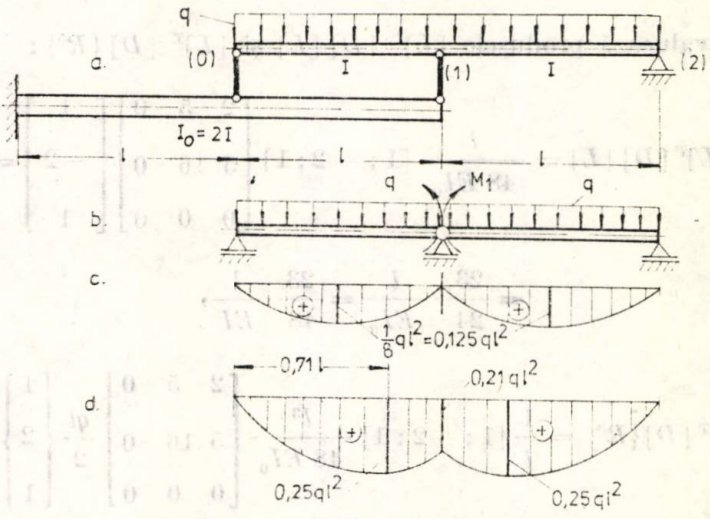


Fig. 2

Fie, pentru exemplificare, situația din figura 2*a* cu sistemul de bază din figura 2*b*; structura de reazem este grinda în consolă. Vom avea:

$$[A] = [2(\alpha_1 + \alpha_2)] = \left[4\frac{l}{I}\right],$$

$$[L] = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [L]^T = \frac{1}{l}\,[1\,;\,-2\,;\,1].$$

Pe baza figurilor $2b$ şi c se evaluează vectorii $\{R^0\}$ şi $\{T\}$:

$$\{R^0\} = \begin{Bmatrix} R_0^0 \\ R_1^0 \\ R_2^0 \end{Bmatrix} = \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad \{T\} = \{T_1\} = \left\{ \frac{ql^3}{12\,I} \right\}.$$

Coeficienţii de influenţă pentru deplasări ai grinzii de reazem sînt :

$$\delta_{00} = \frac{2l^3}{48\,EI_0}; \quad \delta_{11} = \frac{16l^3}{48\,EI_0}, \quad \delta_{01} = \delta_{10} = \frac{5l^3}{48\,EI_0},$$

cu care, ţinînd cont şi de existenţa reazemului rigid, matricea $[D]$ se scrie :

$$[D] = \frac{l^3}{48\,EI_0} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se evaluează produsele $[L]^T\,[D]\,[L]$ şi $[L]^T\,[D]\,\{R^0\}$:

$$[L]^T\,[D]\,[L] = \frac{l}{48\,EI_0}\,[1\,;\,-2\,;1] \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{23}{24} \cdot \frac{l}{EI_0} = \frac{23}{48} \cdot \frac{l}{EI},$$

$$[L]^T\,[D]\,\{R^0\} = \frac{1}{l}\,[1\,;\,-2\,;\,1]\,\frac{l^3}{48\,EI_0} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= -\frac{31}{48} \cdot \frac{ql^3}{EI_0} = -\frac{31}{96} \cdot \frac{ql^3}{EI},$$

cu care se obţin :

$$[A] = \left[\frac{55}{8} \cdot \frac{l}{I} \right], \quad \{B\} = \left\{ \frac{23}{16} \cdot \frac{l}{I} \right\}.$$

Sistemul de ecuaţii (13) se reduce la o singură ecuaţie, în necunoscuta M_1, care rezultă $M_1 = 0{,}21\ ql^2$.

Vectorul reacţiunilor din reazeme va fi :

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{R^0\} + [L]\{M\} =$$

$$= \frac{ql}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} 0{,}21\ ql^2 = \begin{Bmatrix} 0{,}71 \\ 0{,}58 \\ 0{,}71 \end{Bmatrix} ql,$$

iar vectorul săgeţilor în secţiunile de reazem,

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = [D]\{R\} =$$

$$= \frac{l^3}{48\,EI_0}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}71 \\ 0{,}58 \\ 0{,}71 \end{Bmatrix} ql = \frac{ql^4}{96\,EI}\begin{Bmatrix} 0{,}090 \\ 0{,}247 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

În figura 2*d* este dată diagrama de momente pentru grinda studiată.

3. FORMULAREA ECUAŢIILOR CU NECUNOSCUTE SĂGEŢI

Fie $[K]$ matricea de rigiditate a structurii de reazem corespunzătoare deplasărilor v_i, $i = 0,1, \ldots, n, n+1$; există relaţia $[K] = [D]^{-1}$. Vectorul reacţiunilor se poate exprima

$$\{R\} = [K]\{v\}. \tag{14}$$

Din relaţia (6) vectorul $\{M\}$ se poate scrie

$$\{M\} = -6[A]^{-1}(\{T\} + E[L]^T\{v\}). \tag{15}$$

Se preînmulţeşte relaţia (15) cu matricea $[L]$,

$$[L]\{M\} = -6[L][A]^{-1}(\{T\} + E[L]^T\{v\}). \tag{16}$$

Din relaţia (7),

$$[L]\{M\} = \{R\} - \{R_0\} = [K]\{v\} - \{R^0\}, \tag{17}$$

astfel că din (16) şi (17) rezultă

$$[K]\{v\} - \{R^0\} = -6[L]\ [A]^{-1}\ \{T\} - 6E[L]\,[A]^{-1}\ \ L]^T\{v\},$$

sau

$$(6E[L]\,[A]^{-1}[L]^T + [K])\,\{v\} = \{R^0\} - 6[L]\,[A]^{-1}\,\{T\}. \tag{18}$$

Se notează :

$$[\tilde{K}] = 6E[L]\,[A]^{-1}[L]^T + [K], \tag{19}$$

$$\{C\} = \{R^0\} - 6[L]\,[A]^{-1}\,\{T\}, \tag{20}$$

cu relaţia (18) se scrie :

$$[\tilde{K}]\,\{v\} = \{C\}, \tag{21}$$

care reprezintă, în formă matriceală, sistemul de ecuaţii al problemei cu necunoscute săgeţile din punctele de rezemare. Matricea $[\tilde{K}]$ este simetrică.

Odată determinate săgeţile, din relaţia (14) se pot determina reacţiunile, iar din relaţia (15) momentele de continuitate din secţiunile de reazem.

Folosirea matricei de rigiditate $[K]$ permite luarea în considerare şi a situaţiilor în care grinda prezintă variaţii de secţiune în cadrul unei deschideri. Se consideră în secţiunea de trecere un reazem fictiv care se include în numerotare ; în matricea $[K]$ se introduce corespunzător o linie şi o coloană cu elemente nule, ceea ce este echivalent cu anularea reacţiunii din reazemul fictiv.

Într-o astfel de situaţie, valorile obţinute pentru deplasări în dreptul reazemelor fictive caracterizează structura de reazem şi nu grinda de studiat, astfel că pentru determinarea momentelor de continuitate nu mai poate fi folosită relaţia (15), care presupune folosirea vectorului $\{v\}$; este necesară exprimarea momentelor din relaţia (7). Se poate scrie

$$[L]\,\{M\} = \{R\} - \{R^0\},$$

care se preînmulţeşte cu $[L]^T$,

$$[L]^T[L]\,\{M\} = [L]^T(\{R\} - \{R^0\}).$$

Produsul $[L]^T[L]$ are ca rezultant o matrice pătrată (şi simetrică) încît vectorul momentelor se va exprima :

$$\{M\} = ([L]^T\,[L])^{-1}\,[L]^T\,(\{R\} - \{R^0\}). \tag{22}$$

Relaţia (22) are, în legătură cu evaluarea momentelor, un caracter mai general decît relaţia (15), putînd fi folosită în toate situaţiile.

Fie, pentru exemplificare, situaţia din figura 3 *a* cu sistemul de bază din figura 3*b*, structura de reazem fiind o grindă simplu rezemată. Vom avea :

$$[A] = [2(\alpha_1 + \alpha_2)] = \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{l}{I}\right],\ [A]^{-1} = \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{I}{l}\right],$$

$$[L] = \frac{4}{l}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad [L]^T = \frac{4}{l}\,[1\,;\,-2\,;\,1].$$

Pe baza figurilor 3 *b* și *c* se evaluează vectorii $\{R^0\}$ și $\{T\}$:

$$\{R^0\} = \frac{ql}{8}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}, \quad \{T\} = \{T_1\} = \left[\frac{ql^3}{3\cdot 2^{10} I}\right].$$

Coeficienții de influență pentru deplasări ai grinzii de reazem sînt:

$$\delta_{00} = \delta_{22} = 9\alpha, \quad \delta_{02} = \delta_{20} = 7\alpha, \quad \text{cu} \quad \alpha = \frac{l^3}{768\, EI_0} = \frac{l^3}{3\cdot 2^{10} EI}.$$

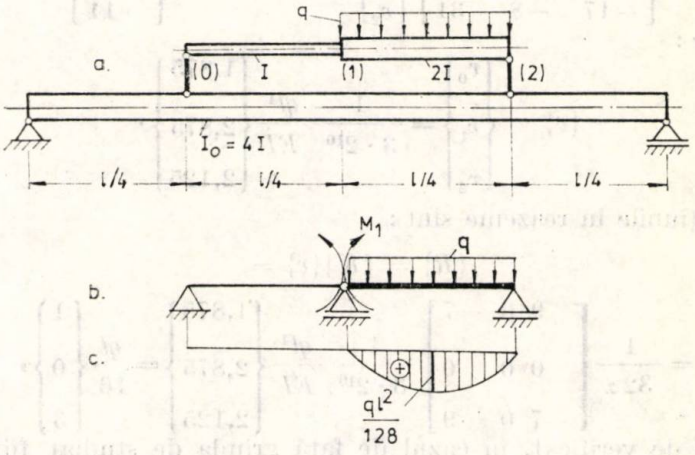


Fig. 3

Matricea de rigiditate $[K] = [D]^{-1}$, cmpletată cu elementele nule corespunzător secțiunii (1) este

$$[K] = \frac{1}{32\,\alpha}\begin{bmatrix}9 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0\\ -7 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

Se evaluează produsele $[L]\,[A]^{-1}\,[L]^T$ și $[L]\,[A]^{-1}\{T\}$:

$$[L]\,[A]^{-1}[L]^T = \frac{4}{l}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\frac{4}{3}\frac{I}{l}\frac{4}{l}[1\,;\,-2\,;\,1] =$$

$$= \frac{64}{3}\frac{I}{l^3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix},$$

$$[L]\,[A]^{-1}\{T\} = \frac{4}{l}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{4}{3}\frac{I}{l}\frac{ql^3}{3\cdot 2^{10} I} = \frac{ql}{6\cdot 96}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Introducînd rezultatele în (19) şi (20), se obţin $[\tilde{K}]$ şi $\{C\}$ cu care sistemul (21) devine

$$\begin{bmatrix} 31 & -8 & -17 \\ -8 & 16 & -8 \\ -17 & -8 & 31 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3\cdot 2^{10}}\frac{ql^4}{EI}\begin{Bmatrix} -1 \\ 14 \\ 11 \end{Bmatrix},$$

cu soluţiile:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3\cdot 2^{10}}\frac{ql^4}{EI}\begin{Bmatrix} 1{,}875 \\ 2{,}875 \\ 2{,}125 \end{Bmatrix}.$$

Reacţiunile în reazeme sînt:

$$\{R\} = [K]\{v\} =$$

$$= \frac{1}{32\alpha}\begin{bmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 9 \end{bmatrix}\frac{1}{3\cdot 2^{10}}\frac{ql^4}{EI}\begin{Bmatrix} 1{,}875 \\ 2{,}875 \\ 2{,}125 \end{Bmatrix} = \frac{ql}{16}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix},$$

valori uşor de verificat, în cazul de faţă grinda de studiat fiind static determinată.

Se evaluează $([L]^T[L])^{-1}$:

$$[L]^T[L] = \frac{4}{l}[1\,;\,-2\,;\,1]\frac{4}{l}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{96}{l^2},\quad ([L]^T[L])^{-1} = \frac{l^2}{96},$$

astfel că din relaţia (22) rezultă:

$$\{M\} = \{M_1\} = \frac{l^2}{96}\frac{4}{l}\,[1\,;\,-2\,;\,1]\left(\frac{ql}{16}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} - \frac{ql}{8}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) = \frac{ql}{64},$$

valoare de asemenea uşor de verificat.

Primită la redacţie la 22 februarie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. N. BESCHEA, *Rezistenţa materialelor*, capitole speciale, E.D.P., Bucureşti, 1971.
2. I. DEUTSCH, *Rezistenţa materialelor*, E.D.P., Bucureşti, 1979.
3. P. C., WANG, *Metode numerice şi matriceale în mecanica construcţiilor, cu aplicaţii la calculatoare*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1970.

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA DEZVOLTĂRII MODELELOR MATEMATICE ALE MECANICII. I

de P.P. TEODORESCU
Universitatea din București

După introducerea noțiunilor fundamentale de spațiu, timp, mișcare, repaus, reper, masă, forță, cîmp, se trece la definirea sistemelor mecanice. Aceasta permite, utilizînd și principiile lui Newton, să se construiască modelul matematic al mecanicii clasice, cea mai matematizată știință a naturii. De altfel, se constată că ideile de sistem și model fundamentează orice știință a naturii.

1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

1.1. **Mecanica, știință a naturii.** Toate fenomenele din natură sînt caracterizate prin *mișcare*; aceasta este o *proprietate esențială* a materiei, avînd aspecte infinite. De exemplu, mișcarea poate fi: *mecanică*, *fizică*, *chimică* sau *biologică*, corespunzînd diferite *științe ale naturii*. Dintre acestea, *mecanica* studiază legile obiective ale *mișcării mecanice* a corpurilor materiale, cea mai simplă formă de mișcare a materiei.

Studiul științific al materiei a pus în evidență existența ei sub forma unor *sisteme fizice*. Cel mai simplu sistem fizic este *substanța*, care se întîlnește în natură sub formă de *corpuri materiale*; vom considera aceste corpuri atît sub forma lor reală, cît și sub forma lor idealizată de *sisteme discrete de particule* (atomi, molecule, corpuri uzuale, planete etc.) sau de *sisteme continue* (solide, fluide), sub denumirea de *sisteme mecanice*.

În studiul unei științe a naturii se pune din ce în ce mai mult în evidență legătura dintre metodele moderne ale *teoriei sistemelor* și *modelarea matematică* a acestei științe. În această ordine de idei, trebuie lămurită întîi noțiunea de sistem, care poate diferi de cea pe care ne-o sugerează limbajul obișnuit; de altfel, noțiunea de sistem trebuie utilizată totdeauna atunci cînd se tratează fenomene complexe și dificil de cercetat. În același timp trebuie luată în considerare posibilitatea de *cuplare* a unor fenomene caracteristice diferitelor științe ale naturii (mecanică, fizică, chimie, biologie etc.).

Un *sistem* se definește ca o *mulțime de elemente* (părți, componente) care se influențează (condiționează) reciproc (*care interacționează*), asupra cărora au loc influențe (acțiuni) exterioare (numite *intrări*) și ale căror acțiuni spre exterior (asupra altor sisteme) sînt numite *ieșiri*.

Printre cele mai importante proprietăți ale unui sistem trebuie să menționăm schimbarea (transformarea, mișcarea) sa, precum și posibili-

tatea de a fi influențat (condus) printr-o alegere convenabilă a intrărilor (forțelor). În mecanica clasică, legătura dintre influențele (acțiunile) ce se exercită asupra sistemului și schimbările survenite se numește *dinamica sistemelor*. Se subînțelege că aceste considerații se referă, în primul rînd, la *sistemele mecanice*; în general însă, ținînd seama de legătura dintre diferite sisteme, dinamica sistemelor este o știință interdisciplinară.

În legătură cu studiul acestor sisteme se pun următoarele probleme:

(i) Construirea modelelor matematice corespunzătoare unui sistem dat.

(ii) Studiul modelului astfel construit (punerea în evidență a proprietăților sistemului; adesea, datorită dificultății problemelor puse, nu se poate rezolva în întregime problema mișcării, punîndu-se în evidență numai unele proprietăți ale ei, sau nu se pot da decît soluții aproximative (de exemplu, prin liniarizarea fenomenelor neliniare).

(iii) Alegerea intrărilor principale (dominante) care guvernează fenomenele considerate.

(iv) Simularea comportării sistemului studiat; în felul acesta se pun în evidență lipsurile modelului ales și ale intrărilor considerate, îmbunătățindu-se apoi atît modelul cît și intrările.

Matematica joacă astfel un rol deosebit de important în studiul unei științe a naturii. *Mecanica* a fost *prima știință a naturii* care a fost matematizată, prin considerarea a diferite modele matematice ce s-au dovedit corespunzătoare realității înconjurătoare. Sistemele mecanice sînt modele matematice ale materiei organizate, avînd anumite proprietăți de structură, de formă etc. În felul acesta, dezvoltarea mecanicii a fost mult influențată de utilizarea unui aparat matematic puternic; de altfel, observăm că și mecanica a influențat, la rîndul ei, introducerea și dezvoltarea a multe noțiuni matematice.

1.2. **Spațiu. Timp.** *Spațiul* și *timpul* sînt noțiuni fundamentale ce apar într-un model matematic al mecanicii. Pentru studiul mișcării mecanice este necesară o reprezentare a spațiului și a timpului; astfel, în mecanica clasică spațiul fizic este spațiul euclidian tridimensional E_3, iar timpul este asimilat tot unui spațiu euclidian, dar unidimensional E_1. În felul acesta, modelele geometrice pentru spațiu și timp, folosite în mecanica clasică, reflectă proprietăți ale spațiului și timpului real, ca forme obiective de existență ale materiei.

Într-un model clasic al mecanicii se consideră că *spațiul* este *infinit*, *continuu*, *omogen*, *izotrop* și *absolut*, fiind independent de materie. Corpurile materiale sînt cufundate în spațiu, în care ocupă un anumit *loc*, fiind situate într-un anumit mod în raport cu alte obiecte ale lumii materiale; de asemenea, ele au o anumită *întindere*. În acest sens se poate spune că spațiul reprezintă un *suport al materiei*. Dacă, după o serie de fenomene de ordin mecanic (de exemplu, după o succesiune de mișcări), corpurile materiale își mențin proprietățile de întindere și situare relativă față de alte obiecte materiale, se consideră că ele ocupă același loc. *Spațiul fizic* este alcătuit din totalitatea acestor locuri, el avînd astfel un *caracter absolut*. Proprietățile de *omogenitate* și *izotropie* pun în evidență faptul că proprietățile locale ale acestui spațiu sînt independente de loc, respectiv de direcție.

Un observator care percepe fenomenele mecanice ale lumii materiale dintr-un „laborator" poate să efectueze o anumită „ordonare" a lor; în felul acesta apare noțiunea de *timp fizic individual*. Prin sincronizarea scărilor temporale a doi observatori se trece de la timpul fizic individual la *timpul fizic universal*; transmisia semnalelor avînd, în acest caz, un caracter *instantaneu*, rezultă că, într-un model clasic al mecanicii, timpul are un *caracter absolut*, fiind același pentru toți observatorii care studiază un anumit fenomen mecanic. Orice proces material are o anumită *durată*. Vom spune că un proces material elementar care nu are durată (este de durată nulă) este un *eveniment*. Dacă două evenimente au loc la același moment, ele sînt *simultane*; în caz contrar, ele sînt *succesive*, unul dintre ele avînd loc înaintea celuilalt. În felul acesta, mulțimea evenimentelor este *ordonată*, ceea ce justifică faptul că timpul, caracterizat prin durată, simultaneitate și succesiune, este unidimensional. Admițînd, într-un model clasic al mecanicii, că timpul este independent de materie, rezultă că el este lipsit de structură, ca și spațiul; deci timpul „se scurge" uniform, fiind *omogen*. Menționăm și faptul că timpul este *infinit*, *continuu* și *ireversibil*.

Atît modelarea spațiului, cît și modelarea timpului reprezintă, în mecanica clasică, o aproximare a realității materiale; ele corespund numai în cazul unor distanțe mici și a unor viteze mici în raport cu viteza de propagare a luminii în vid.

1.3. **Mișcare. Repaus. Repere.** Prin mișcare mecanică înțelegem schimbarea poziției unui corp material $\mathcal{C}_1$ în raport cu un alt corp material $\mathcal{C}_2$. În acest caz, cel puțin o distanță de la un punct al corpului $\mathcal{C}_1$ la un punct al corpului $\mathcal{C}_2$ variază în timp; spunem că punctele respective suferă anumite *deplasări*. Acest fenomen mecanic are un *caracter relativ*; într-adevăr, dacă corpul $\mathcal{C}_1$ se mișcă în raport cu corpul $\mathcal{C}_2$ atunci și corpul $\mathcal{C}_2$ se mișcă în raport cu corpul $\mathcal{C}_1$.

Dacă raportăm mișcarea (în cele ce urmează vom omite adjectivul „mecanică", avînd de-a face numai cu asemenea mișcări) unui corp $\mathcal{C}$ (omitem, de asemenea, adjectivul „material" în formulările ulterioare) la un alt corp $\mathcal{R}$, acesta din urmă se va numi *reper* sau *sistem de referință*; în cele ce urmează reperul $\mathcal{R}$ va fi considerat *rigid* (distanțele între oricare două puncte ale reperului sînt constante în timp), fiind alcătuit din cel puțin trei puncte necoliniare. Dacă distanțele tuturor punctelor corpului $\mathcal{C}$ la reperul $\mathcal{R}$ (la trei puncte necoliniare ale acestui reper) sînt constante în timp, atunci spunem că acest corp este în *repaus* față de reperul respectiv.

Nu putem vorbi de *mișcare absolută* (decît în sensul că materia este în continuă mișcare), neavînd un *reper absolut*, ci numai de mișcare relativă. De asemenea, nu putem vorbi de *repaus absolut*, ci numai de *repaus relativ*. În același sens, nu putem vorbi de *spațiu absolut* și de *timp absolut*, ci numai de *spațiu relativ* (la un reper spațial) și de *timp relativ* (la un reper temporal).

În decursul timpului, oamenii de știință au căutat un reper absolut în univers, admițînd că în raport cu un asemenea reper modelul matematic al mecanicii trebuie să capete forma cea mai simplă. Astfel, în *reperul geocentric* (reperul lui Ptolemeu) se admite că originea se găsește în centrul de masă al Pămîntului; de obicei, se ia ca plan principal planul ecuatorial, una din axele cuprinse în acest plan fiind îndreptată în direcția *punctului*

vernal (la intersecția planului ecuatorial cu planul ecliptic care cuprinde traiectoria descrisă de Pămînt), a treia axă fiind normală la acest plan (fiind deci axa de rotație a Pămîntului). Mai tîrziu s-a considerat *reperul heliocentric* (reperul lui Copernic), în care originea este în centrul de masă al Soarelui. Într-un asemenea reper, se ia ca plan principal planul elipsei descrise de Pămînt, deci planul ecliptic (*reper heliocentric ecliptic*), sau un plan paralel cu planul ecuatorial al Pămîntului (*reper heliocentric ecuatorial*), a treia axă fiind normală la planul principal respectiv; în ambele cazuri, una din axele cuprinse în planul principal este după direcția punctului vernal (la intersecția planului ecliptic cu un plan paralel cu planul ecuatorial al Pămîntului, trecînd prin centrul de masă al Soarelui), deci este paralelă cu axa similară considerată în cazul reperului geocentric. Evident, acest ultim reper a constituit un progres față de cel anterior, conducînd la proprietăți mult mai simple ale mișcării planetelor. Dar Soarele este numai una din cele peste două sute de miliarde de stele care alcătuiesc galaxia noastră, avînd, în prezent, o poziție relativ periferică în această galaxie; toate aceste stele, inclusiv Soarele, se mișcă în raport cu centrul de masă al galaxiei. Sîntm astfel conduși la un reper cu originea în centrul de masă al galaxiei (*reper galactocentric*); se ia ca plan principal planul median galactic, una din axele cuprinse în acest plan fiind la intersecția, sa cu un plan paralel cu planul ecuatorial al Pămîntului. În toate aceste cazuri se utilizează așa-numitele „stele fixe" (stele foarte îndepărtate, a căror poziție este aproximativ fixă în raport cu observațiile care se pot efectua de pe Pămînt); cunoscînd poziția acestor stele (coordonatele lor), putem preciza oricare din reperele menționate mai sus. S-a alcătuit un catalog de circa 1500 de asemenea stele, numite *stele fundamentale*. Teoretic, ar fi suficiente numai patru asemenea stele pentru identificarea unui reper; în practică se consideră însă un număr mult mai mare de stele, deoarece pozițiile lor variază totuși în timp, determinarea acestora fiind afectată de erori.

Legile modelelor clasice ale mecanicii se verifică suficient de bine într-un reper galactocentric. Observăm însă că mișcarea reperului heliocentric față de reperul galactocentric poate fi considerată, cu o foarte bună aproximație, ca fiind o translație rectilinie și uniformă, chiar pentru un interval de timp relativ lung; putem deci, în multe cazuri, să utilizăm reperul heliocentric cu rezultate foarte bune, de exemplu pentru studiul mișcării obiectelor lansate în spațiul cosmic. Pentru mișcările mecanice obișnuite, care au loc la suprafața Pămîntului, reperul geocentric dă, de asemenea, rezultate foarte bune; influența mișcărilor de rotație și de revoluție ale Pămîntului se poate introduce ulterior, atunci cînd este necesar.

Reperele față de care se verifică legile fundamentale ale mecanicii se numesc *repere inerțiale*. Într-un model clasic al mecanicii, dacă legile acesteia se verifică față de un anumit reper, atunci ele se verifică față de orice alt reper care se află în mișcare de translație rectilinie și uniformă în raport cu primul reper; se obține astfel o *clasă* de repere inerțiale. În felul acesta nu se poate identifica un „spațiu absolut", în sensul dat de Newton, pe baza unei experiențe de mecanică.

Reperul galactocentric este un reper inerțial; după cum am văzut mai sus, în diferite cazuri de mișcare mecanică, putem admite că și reperul heliocentric sau chiar reperul geocentric sînt repere inerțiale. De altfel,

putem construi, pe această cale, și alte repere (considerînd o regiune mai întinsă din Univers, la o scară mai mare), care sînt, de asemenea, inerțiale; acest lucru nu este însă necesar din punct de vedere al modelelor clasice ale mecanicii.

1.4. **Masă. Forță. Cîmp.** *Masa* este o mărime de stare (mărime care depinde de starea actuală a corpului, dar nu de modul în care s-a ajuns la această stare), care se manifestă în toate fenomenele de mișcare, fiind o *proprietate importantă a materiei*; ea există în mod obiectiv și este independentă de locul în care se măsoară, ca și sarcina electrică în prezența cîmpurilor electromagnetice. Newton a conceput masa ca o *măsură a cantității de materie*; această concepție are un caracter static. Observăm însă că masa se manifestă și în diferite fenomene de mișcare, putînd fi pusă, mai ales, în legătură cu inerția și atracția universală a corpurilor. *Inerția* este o tendință generală a materiei de a-și conserva starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă; din acest punct de vedere, masa reprezintă *măsura inerției unui corp* aflat în mișcare.

Un alt element care intervine în modelarea matematică a unui fenomen mecanic este cauza care produce mișcarea mecanică. Corpurile acționează din punct de vedere mecanic unul asupra altuia și de multe ori este greu de stabilit esența fizică a acestei acțiuni; în mod generic i s-a atribuit numele de *forță*. Această denumire, provenită din acțiunea organismului omenesc asupra lumii exterioare, capătă în mecanică un sens precis; ea este o măsură pentru transmiterea mișcării. Originea forțelor nu este, în general, de natură mecanică, dar mecanica nu-și propune să determine natura lor; mecanica presupune forțele date.

Ținînd seama de proprietatea de inerție a unui punct material, starea naturală a acestuia este starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă; forța este cauza care modifică această stare. Apare astfel legătura dintre forță și variația vitezei (sau variația *impulsului*, vectorul produs dintre masă și viteză). Impulsul este o *măsură a mișcării mecanice*, rămînînd constant atunci cînd sistemul mecanic nu suferă o acțiune din partea altui sistem mecanic; dacă se exercită o asemenea acțiune asupra sistemului mecanic, apare o variație a impulsului, deci o variație a vitezei (o accelerație). Forța $\mathbf{F}$ aplicată unui punct al sistemului mecanic este astfel o mărime vectorială (ca și variația impulsului căruia îi corespunde). Se constată experimental că, în cazul cel mai general, forța poate fi modelată printr-un vector legat de forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \tag{1}$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului de aplicație (aparținînd sistemului mecanic), iar $\mathbf{v}$ este viteza sa la momentul t. Forța corespunde interacțiunii corpurilor, interacțiune care se poate manifesta în moduri foarte diverse; vom distinge astfel între *acțiuni de contact* și *acțiuni la distanță*.

Unei acțiuni la distanță i se atribuie denumirea de *cîmp*. În general, cîmpul este un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiu, care constituie o zonă de influență a unui sistem mecanics $\mathcal{S}$ sau a unui anumit fenomen mecanic; astfel, în prezența lui $\mathcal{S}$, domeniul $\mathcal{D}$ capătă o anumită stare care face ca orice alt sistem mecanic ce are proprietăți care să-i permită să fie influențat de $\mathcal{D}$

şi care trece prin $\mathcal{D}$ să fie afectat în evoluţia sa. De exemplu, prin proprietatea de masă sau de sarcină electrică, un corp generează un cîmp gravitaţional, respectiv un cîmp electric; orice alt corp care străbate un asemenea cîmp este influenţat în mişcarea sa. Într-un model continuu al mecanicii acţiunea pe care un cîmp o exercită asupra unui sistem mecanic se caracterizează prin forţă; se admite că această acţiune se propagă instantaneu (în caz contrar, în modelarea matematică a fenomenului ar trebui introdus un factor de întîrziere). În felul acesta, nu introducem în calcul acţiunea reală, care a avut loc cu un decalaj în timp; într-un model neclasic se utilizează ipoteza propagării din aproape în aproape, experienţa arătînd că nici o acţiune nu se propagă instantaneu. De fapt, ipoteza propagării instantanee corespunde ipotezei timpului universal (absolut).

Modelînd forţa printr-un vector legat (forţa este caracterizată prin intensitate, direcţie, sens şi punct de aplicaţie, proprietăţi corespunzătoare definiţiei intrinseci a unei asemenea entităţi matematice), aceasta se va bucura de toate proprietăţile vectorilor legaţi (de exemplu, modul de sumare a vectorilor). Astfel, acţiunea a două forţe aplicate asupra unui punct al unui sistem mecanic $\mathcal{S}$ poate fi înlocuită prin acţiunea unei forţe aplicată în acelaşi punct, după diagonala paralelogramului format cu forţele menţionate; reciproca acestei afirmaţii este, evident, de asemenea, adevărată: acţiunea unei forţe într-un punct dat poate fi înlocuită prin acţiunea, în acelaşi punct, a două forţe reprezentate de laturile paralelogramului a cărui diagonală este forţa dată.

Forţele care acţionează asupra sistemelor mecanice sînt reprezentate prin *vectori legaţi*, punctele de aplicaţie fiind chiar punctele sistemului (punctele în care se găsesc particulele unui sistem discret sau punctele unui sistem continuu). În cazul unui solid rigid forţele sînt modelate prin *vectori alunecători*. Rezultă deci că o forţă care acţionează asupra unui solid rigid poate să fie aplicată în orice punct al rigidului, dacă acest punct se găseşte pe suportul forţei; acest rezultat poate fi aplicat şi unui sistem discret nedeformabil, dacă două sau mai multe particule ale sistemului se găsesc pe suportul forţei.

1.5. **Sisteme mecanice.** Modelele matematice ale corpurilor au adesea caracteristici ideale; se pot considera astfel *puncte materiale* (fără dimensiune), *linii materiale* (varietăţi unidimensionale) sau *suprafeţe materiale* (varietăţi bidimensionale) în spaţiul E_3. De exemplu, un corp ale cărui dimensiuni sînt neglijabile în raport cu dimensiunile ce intervin în problema considerată (o planetă în raport cu dimensiunile sistemului solar, un electron în raport cu dimensiunile atomului) şi pentru care nu interesează mişcarea de rotaţie, admite ca model matematic un punct material; materializarea mecanică a conceptului abstract de punct material se mai numeşte *particulă*.

Un *mediu continuu* (*continuum material*) constituie un model matematic al unui corp alcătuit dintr-un domeniu (uni-, bi- sau tridimensional) căruia îi ataşăm o masă; toate mărimile legate de un asemenea mediu vor fi reprezentate prin funcţii continue. Particula va reprezenta un caz limită de mediu continuu (cazul în care domeniul se reduce la un punct geometric, căruia îi ataşăm o masă finită pozitivă). În calcule obişnuim să ne referim

la un punct al unui mediu continuu ; acesta însă nu este o particulă, neavînd o masă finită.

Printr-un *sistem mecanic* $\mathcal{S}$ înțelegem o mulțime de corpuri, modelate ca medii continue sau ca particule ; deci , un sistem mecanic va fi alcătuit, în cazul cel mai general, dintr-un număr finit de medii continue și dintr-un număr finit de particule. Vom considera, de obicei, *sisteme mecanice discrete de particule* (alcătuite dintr-un număr finit de particule) sau *sisteme mecanice continue*. Rezultatele importante de ordin mecanic care se obțin pentru un sistem mecanic au aceeași formă, fie că acesta este discret sau continuu. Un sistem mecanic este în interacțiune mecanică cu alte sisteme ; în caz contrar avem de-a face cu un *sistem mecanic izolat*.

1.6. **Clasificarea corpurilor.** La punctul precedent am văzut că putem modela corpurile prin sisteme mecanice (discrete sau continue). În cazul în care toate perechile de puncte ale unui sistem mecanic rămîn la o distanță între ele invariabilă în timp, spunem că avem de-a face cu un *sistem mecanic nedeformabil* (în particular, cu un *solid rigid*, care este un mediu continuu nedeformabil) ; în caz contrar, avem un *sistem mecanic deformabil* (în particular, un *mediu continuu deformabil*).

Mediile continue deformabile se pot împărți în *solide deformabile* (care își schimbă puțin forma sub acțiunea unor cauze exterioare, de exemplu sub acțiunea forțelor) și *fluide* (care își schimbă mult forma, luînd forma corpurilor care le înconjoară, sub acțiunea cauzelor exterioare). De asemenea, fluidele se împart în *lichide* (care își schimbă puțin volumul) și *gaze* (care își schimbă mult volumul, fiind expansive). Aceste tipuri clasice de medii continue deformabile nu se pot delimita perfect (așa cum ar părea, în baza definițiilor clasice de mai sus), deoarece există medii care au simultan, de exemplu, atît proprietăți de corp solid, cît și proprietăți de corp lichid (în aceleași condiții fizice).

În ceea ce privește solidele deformabile, se pun în evidență proprietățile de *elasticitate* (dacă încetează cauzele care au condus la deformarea solidului, acesta revine la forma inițială ; deformarea este reversibilă), *plasticitate* (are loc în cazul în care, după îndepărtarea cauzelor ce au condus la fenomenul de deformare, se obține o deformare remanentă) și *vîscozitate* (variația deformării solidului în timp) ; menționăm astfel solidele elastice, solidele elastoplastice, solidele vîscoelastice, solidele elastovîscoplastice etc. De altfel, proprietăți de elasticitate sau de vîscozitate pot avea și fluidele, ceea ce justifică afirmația făcută cu privire la corpurile care pot avea simultan proprietăți corespunzătoare celor două stări de agregare.

Menționăm și faptul că s-a pus în evidență o a patra stare de agregare a materiei : *plasma*. Aceasta este o formă de stare a materiei la temperaturi ridicate ; pe porțiuni ea este electroconductoare, iar în ansamblu neutră. Materia se prezintă astfel ca un amestec de particule (unele avînd o sarcină electrică pozitivă sau negativă, altele fiind neutre), care se orientează după liniile de forță ale unui cîmp magnetic. Plasma apare deci ca un mediu continuu (sau discret) deformabil și electroconductor (de exemplu, un gaz parțial sau total ionizat).

Dacă corpul nu își schimbă volumul în timpul mișcării, atunci spunem că acesta este *incompresibil* ; aceasta reprezintă o aproximare a realității fizice. În general, corpurile sînt *compresibile*.

2. MODELAREA MATEMATICĂ A MECANICII

2.1. **Principiile lui Newton.** Sintetizînd rezultatele obținute de înaintașii săi, în special pe cele ale lui Galileo Galilei (căruia i se datoresc principiul inerției și principiul condițiilor inițiale), Isaac Newton a enunțat în celebra sa operă „Philosophiae naturalis principia mathematica" (apărută la Londra la 5 iulie 1686) cele trei legi care stau la baza modelelor clasice ale mecanicii:

Lex I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare* (Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare uniformă în linie dreaptă, dacă nu este constrîns de forțe imprimate să-și schimbe starea).

Lex II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresse et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur* (Variația mișcării (a cantității de mișcare) este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța).

Lex III. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi* (Reacțiunea este totdeauna contrară și egală cu acțiunea sau acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale și dirijate în sensuri contrare).

În *legile* (principiile) *lui Newton* (numite uneori și *principiile Galilei — Newton*, datorită importanței contribuției a lui Galilei la edificarea modelului clasic al mecanicii), prin corp înțelegem o particulă (punct material). De asemenea, admitem existența unui reper inerțial în care se verifică aceste principii și față de care este descrisă mișcarea. În aceste condiții se pot enunța principiile mecanicii clasice într-o formă nouă.

2.2. **Sistemul complet de principii al mecanicii clasice.** În felul acesta, sistemul complet de principii al mecanicii clasice cuprinde cinci principii și anume:

i) **Principiul inerției.** *O particulă care nu este supusă acțiunii unei forțe este în mișcare rectilinie și uniformă sau este în repaus.*

Mișcarea sau repausul se consideră față de reperul inerțial a cărui existență, independentă de particulă, a fost postulată. Practic, nu putem scoate un corp de sub influența celorlalte corpuri din Univers; putem să reducem însă această influență, observînd că ea se micșorează odată cu îndepărtarea celorlalte corpuri de cel asupra căruia ne-am fixat atenția, că o acțiune poate fi anulată prin altă acțiune, alte acțiuni (de exemplu, frecarea, rezistența mediului etc.) putînd fi mult micșorate prin diferite mijloace tehnice. Putem astfel imagina unele experiențe (reducînd frecările, experimente în vid etc.) care să ne conducă cît mai aproape de condițiile ideale din acest principiu; acesta este astfel verificat cu o bună aproximație. Rezultă deci că poate să existe mișcare (mișcare inerțială) chiar în absența unei forțe date; observăm că accelerația **a** a unei particule care nu este în interacțiune cu alte particule este nulă. Prin urmare, nu mișcarea (deci nu viteza), ci variația mișcării (deci variația vitezei, respectiv variația impulsului) este cea care trebuie pusă în legătură cu forța, după cum s-a văzut și la punctul 1.4.

ii) **Principiul acțiunii forțelor.** *Între o forță ce acționează asupra unei particule și accelerația care îi este imprimată de aceasta are loc o relație de forma*

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \tag{2}$$

unde m este masa particulei.

Aceasta constituie *legea fundamentală a mecanicii*, găsită de Newton în urma observării a diferite fenomene de ordin mecanic : căderea corpurilor (fenomene de ordin gravitațional), oscilația pendulului, mașinile simple (studiate anterior de Galilei și Huygens), mișcarea Lunii în jurul Pământului etc. După T. Levi-Civita putem admite că dv este după direcția forței $\mathbf{F}$, $|\mathrm{dv}|$ fiind proporțional cu $F = |\mathbf{F}|$ și cu $\mathrm{d}t$ și invers proporțional cu greutatea $G = |\mathbf{G}|$ a particulei ; deci

$$\mathrm{dv} = \frac{k}{G}\mathbf{F}\,\mathrm{d}t.$$

Admitem că k este o constantă care nu depinde de forța $\mathbf{F}$, ci numai de particula considerată (afirmație ce corespunde și principiului de echivalență enunțat de Einstein). În cazul căderii libere în vid, constatăm că

$$\mathbf{g} = \frac{k}{G}\mathbf{G},$$

unde $\mathbf{G}$ este forța gravitațională ; rezultă $k = g$ ($\mathbf{g}$ este accelerația gravitației), deci

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{G}\mathbf{F}.$$

Observînd că raportul

$$\frac{G}{g} = m > 0$$

este constant oricare ar fi locul de pe suprafața Pământului în care se măsoară G și g, m fiind de fapt masa particulei, ajungem la legea (2). În cazul forțelor grvitaționale (ținînd seama și de egalitatea dintre masa gravitațională și cea inertă), putem scrie această lege sub forma

$$m\mathbf{g} = \mathbf{G}.$$

Masa corpurilor de pe Pământ se determină cu ajutorul balanței ; pentru corpurile cosmice utilizăm legea (2) și principiul atracției universale, care conduce la forțele de atracție newtoniană. Este interesant să observăm că, de fapt, Newton a enunțat legea a doua sub forma (prin $m\mathbf{v}$ a înțeles *cantitatea de mișcare*)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \tag{2''}$$

relație echivalentă cu (2) dacă $m = \text{const}$; această concepție este cu atît mai valoroasă cu cît o relație de forma (2′′) se menține și în mecanica relativistă. Dacă $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, din relația (2) rezultă $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, deci o mișcare rectilinie și uniformă față de un reper inerțial; aceasta nu înseamnă însă că principiul i) este un caz particular al principiului ii). Într-adevăr, principiul inerției poate să precizeze soluția obținută plecînd de la ecuația diferențială (2), în cazul în care această soluție nu este unică.

iii) **Principiul acțiunii și reacțiunii.** *La orice acțiune a unei particule asupra altei particule corespunde o reacțiune a celei de-a doua particule asupra celei dintîi, avînd aceeași direcție și mărime, dar fiind de sens contrar.*

Dacă notăm cu $\mathbf{F}_{12}$ acțiunea pe care o particulă P_2 o exercită asupra unei particule P_1 și cu $\mathbf{F}_{21}$ acțiunea pe care particula P_1 o exercită asupra particulei P_2 (o acțiune poate fi reacțiune sau invers, denumirile fiind relative), va avea loc relația (aceste acțiuni sînt, de fapt, forțe)

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0},\ \mathbf{F}_{21} = \pm F_{21} \text{ vers } \overrightarrow{P_1P_2},\ F_{12} = F_{21} > 0, \tag{3}$$

unde luăm semnul + sau − după cum forțele sînt repulsive sau de atracție; observăm că aceste forțe sînt de natura unor forțe interioare. Acțiunea și reacțiunea se aplică asupra a două particule diferite; de aceea, nu putem spune că ele își fac echilibru. Să considerăm, de exemplu, un agent care exercită o forță $\mathbf{F}$ asupra unei particule P, provocînd o anumită mișcare a acesteia; scriind ecuația (2) sub forma $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ și ținînd seama de principiul acțiunii și reacțiunii (formula (3)), putem introduce o reacțiune $-m\mathbf{a}$, aplicată asupra agentului considerat. Forța $\overline{\mathbf{F}} = -m\mathbf{a}$ se numește *forță de inerție*, fiind datorită inerției particulei. Acest principiu poate fi extins, trecînd de la o particulă care acționează asupra altei particule la un sistem mecanic care acționează asupra altui sistem mecanic; evident, în acest caz, atît acțiunea cît și reacțiunea sînt sisteme de forțe.

iv) **Principiul paralelogramului forțelor.** *Dacă o particulă este acționată separat de forțele* $\mathbf{F}_1$, *respectiv* $\mathbf{F}_2$, *care îi imprimă accelerațiile* $\mathbf{a}_1$, *respetic* $\mathbf{a}_2$, *iar apoi este acționată simultan de cele două forțe, acestea pot fi sumate vectorial* (după regula paralelogramului, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$), *accelerația imprimată obținîndu-se în mod analog* ($\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$).

Într-adevăr, plecînd de la

$$\mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1,\ \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}_2, \tag{4}$$

putem scrie

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = m\mathbf{a}, \tag{4'}$$

punîndu-se astfel în evidență *independența acțiunii forțelor*; acest principiu se verifică, cu ușurință, experimental și, împreună cu principiul iii), ne permite, de exemplu, să considerăm simultan sistemele mecanice discrete în Univers. Principiul iv) a fost prezentat de Newton sub forma unui corolar la legea a doua. Mai trebuie să observăm că acest principiu se aplică admițînd că particula este în aceeași stare inițială (poziție, viteză, stare fizică sau chimică etc.), fie că este supusă forței $\mathbf{F}_1$ sau forței $\mathbf{F}_2$. Acest

principiu ne permite să afirmăm că forța și accelerația sînt mărimi vectoriale.

v) **Principiul condițiilor inițiale.** *Starea inițială* (poziția și viteza inițială) *a unei particule determină mișcarea acesteia la un moment oarecare.*

De fapt, nu este necesar să cunoaștem starea inițială (la momentul $t = t_0$); putem să cunoaștem starea particulei la un moment dat. Această observație se datorește lui Galilei, care a arătat că poziția inițială nu este suficientă pentru a determina mișcarea particulei, fiind necesar să cunoaștem și viteza inițială; într-adevăr, pentru componentele vectorului de poziție $\mathbf{r}$ putem scrie dezvoltarea

$$x_i(t) = x_i(t_0) + (t - t_0)\,\dot{x}_i(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\ddot{x}_i(\bar{t}),$$

$$\bar{t} = t_0 + \varepsilon_i(t - t_0),\ \varepsilon_i \in (0, 1),\ i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

De aici mai observăm că, dată fiind starea inițială, este necesar să precizăm accelerația particulei, pentru a putea determina mișcarea acesteia. Acest principiu poate fi enunțat și într-o altă formă, echivalentă cu cea de mai sus.

v') *Dacă două particule sînt izolate de restul Universului, forțele cu care interacționează la un moment dat sînt determinate în direcție, sens și modul dacă la acest moment se cunosc pozițiile și vitezele relative ale particulelor.*

Sub această formă, principiul condițiilor inițiale ne arată că forțele date $\mathbf{F}$ depind numai de timp, de vectorul de poziție și de viteză, adică

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t). \tag{6}$$

În acest context, putem considera că legea fundamentală (2) a mecanicii constituie *reprezentarea sub formă normală* (în care am exprimat accelerația $\ddot{\mathbf{r}}$, deci derivata de ordin maxim, funcție de poziția $\mathbf{r}$, viteza $\dot{\mathbf{r}}$ și timpul t) a unei legi de forma

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}; t) = 0; \tag{6'}$$

prin urmare, în modelul newtonian al mecanicii nu intervin *accelerații de ordin superior*, după cum se confirmă experimental prin toate fenomenele mecanice astfel modelate.

2.3. **Modele matematice ale mecanicii.** Odată introduse noțiunile fundamentale ale mecanicii (spațiu, timp, masă, mișcare, repaus, forță), *modelul clasic* (*newtonian*) al acestei științe a naturii ia ființă prin adoptarea principiilor expuse la punctul precedent. Acest model a fost verificat de practica nemijlocită pentru corpuri care se mișcă cu *viteze relativ mici* (neglijabile în raport cu viteza luminii).

Modelul newtonian al mecanicii clasice nu a constituit însă decît o treaptă în procesul cunoașterii; într-adevăr, s-a dovedit (în urma unor experiențe celebre ale lui A. A. Michelson și ale altor cercetători, ale căror rezultate nu puteau fi explicate la început) că, la viteze mult mai mari (comparabile cu viteza luminii), principiile lui Newton trebuie schimbate sau

completate. Pentru o descriere mai exactă a proprietăților spațiului real se adoptă *geometriile neeuclidiene*. De asemenea, concepția newtoniană despre timpul universal trebuie înlocuită cu reprezentarea relativistă, care ține seama de *timpul fizic individual*, de faptul că timpul depinde de mișcarea însăși. Masa, de asemenea, nu mai este constantă, depinzînd de viteză și, implicit, de timp. Astfel, după articolele lui Einstein din 1905 și 1916, apar *relativitatea restrînsă* (*specială*) și *relativistatea generală*, care constituie noi trepte în procesul cunoașterii mișcării sistemelor mecanice.

Menționăm că aceste modele noi (care au căutat să păstreze principiile mecanicii clasice, adaptîndu-le după necesitate, de exemplu, principiul inerției) au fost verificate printr-o serie de experiențe foarte importante (*experiențele cruciale* în relativitatea generală). Totuși, există încă unele contradicții (de exemplu, *paradoxul orologiilor* în relativitatea restrînsă) care fac necesară apariția unor noi modele perfecționate. Este posibil, de asemenea, ca teoria actuală a relativității să corespundă la viteze comparabile cu viteza luminii, dar nu la viteze apropiate de această *viteză limită superioară*, la aceste viteze fiind necesare modele mai complexe. Remarcăm că au apărut și modele în care vitezele sînt totdeauna mai mari decît viteza luminii, care este astfel o *viteză limită inferioară*. Observăm că, pentru viteze v neglijabile în raport cu viteza luminii c ($v \ll c$), rezultatele mecanicii relativiste tind către rezultatele clasice; există astfel o racordare a celor două modele matematice ale mecanicii, racordare necesară pentru viabilitatea modelului perfecționat (modelul relativist). Mai menționăm și faptul că, pentru descrierea altor fenomene mecanice legate de corpuri cu caracter „microscopic" (particule elementare etc.), în opoziție cu cele legate de corpuri „macroscopice", cu care avem de-a face în mod obișnuit, s-au creat modele matematice care au condus la *mecanica cuantică* (modele nerelativiste și modele relativiste). De altfel, mecanica relativistă și mecanica cuantică constituie cele două modele fundamentale neclasice ale mecanicii. Alte modele matematice au condus la *mecanica ondulatorie*, la *mecanica statistică*, la *mecanica invariantivă* etc.

Din cele expuse mai sus iese în evidență atît utilitatea noțiunii de model matematic, cît și marea varietate de asemenea modele ce s-au construit pentru a putea studia fenomenele mecanice care, în general, sînt deosebit de complexe. Menționăm astfel și așa-numitele *modele generalizate* ale mediilor continue deformabile.

2.4. **Diviziunile mecanicii clasice.** Sintetizînd cele expuse mai sus, putem preciza obiectul de studiu al mecanicii.

Mecanica se ocupă de studiul echivalenței sistemelor de forțe și de studiul mișcării sistemelor mecanice supuse acțiunii acestor forțe.

Metodologic și în mod convențional, ținînd seama și de dezvoltarea istorică, se consideră că mecanica clasică are trei mari diviziuni.

Statica se ocupă cu studiul echivalenței sistemelor de forțe (în particular al echivalenței cu zero) ce acționează asupra unui sistem mecanic. Statica studiază un caz particular al mișcării și anume cazul în care un sistem mecanic, supus acțiunii unor forțe, rămîne în repaus (sau are o mișcare rectilinie și uniformă) în raport cu un reper dat.

Cinematica tratează mișcarea sistemelor mecanice în timp, fără a ține seama de forțele ce acționează asupra acestora; obiectul de studiu

al cinematicii este deci *geometria mișcării*. Uneori cinematica este numită *geometria mecanicii* (*phoronomia*).

Dinamica studiază mișcarea sistemelor mecanice supuse acțiunii unor forțe date ; aceasta constituie, de fapt, obiectul de studiu al mecanicii.

Aceste diviziuni ale mecanicii clasice permit o sistematizare a studiului pe care-l vom face ; în cadrul acestor diviziuni, problemele *vibrațiilor mecanice*, ale *stabilității echilibrului* și *mișcării*, ale *traiectoriilor optime* etc. au căpătat o dezvoltare din ce în ce mai mare. Din punct de vedere cronologic, întîi a apărut statica (în antichitate) și apoi dinamica (odată cu Renașterea italiană) ; cinematica s-a constituit ca atare de abia în secolul trecut.

Din punct de vedere metodologic este convenabil să considerăm separat *modelele clasice* (newtoniene) și *modelele neclasice* (relativiste, cuantice, acestea din urmă putînd fi nerelativiste sau relativiste, ondulatorii, statistice, invariantive etc.) ale mecanicii. Pentru *mediile continue deformabile* (în opoziție cu ceea ce se numește, de obicei, *mecanica generală*, care cuprinde modelele clasice ale mecanicii) este, de asemenea, necesar un studiu separat, modelele matematice ale unor asemenea sisteme mecanice trebuind completate, atît în cazul în care acestea sînt modele clasice, cît și în cazul în care sînt modele neclasice ; și aici putem pune în evidență statica, cinematica și dinamica unor asemenea medii.

Primită la redacție la 23 noiembrie 1983

RECENZII

SANDOR KALISZKY, Plastzitätslehre — Theorie und technische Anwendungen (Despre plasticitate — teorie și aplicații tehnice), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

Volumul reprezintă traducerea în limba germană a unei lucrări apărute cu zece ani în urmă în limba maghiară, lucrare care a fost completată în special cu metode numerice de calcul ca de exemplu aplicarea metodei elementului finit și programarea liniară sau patratică la rezolvarea unor probleme din domeniul plasticității.

În primele trei capitole sînt prezentate noțiunile, ecuațiile fundamentale și principiile ce bază ale teoriei elasticității și plasticității. În capitolul 4 sînt arătate unele aplicații ale ecuațiilor de bază referitoare la torsiunea barelor prismatice, a pînzelor sferice și cilindrice cu pereți groși în studiul elastic, elastoplastic și plastic. În capitolul 5 este discutată starea de deformație și de tensiune cu aplicarea metodei elementului finit în stadiul elastic, elasto-plastic și plastic.

Capitolul 6 cel mai amplu dezvoltat în lucrare se referă la calculul plastic al structurilor formate din bare. Sînt prezentate legile și metodele de calcul, principiile dimensionării optime, influența deformațiilor asupra capacității de rezistență ultime și aplicarea programării liniare sau patratice în calculul plastic al structurilor formate din bare.

Capitolul 7 se referă la calculul plastic al plăcilor și pînzelor, iar capitolul 8 la probleme speciale ca : condițiile de curgere a unor materiale cu modificarea calităților plastice în timp, materialelor viscoase și încărcarea cu șoc a structurilor în stadiul plastic.

Lucrarea se adresează inginerilor, doctoranzilor și cercetătorilor din domeniile construcțiilor și construcțiilor de mașini.

Acad. *Dan Mateescu*

CHIMON CAPATU, *Poduri din beton precomprimat*, Editura Tehnică, 1983.

Podurile, în general, fac parte din categoria operelor inginerești de cea mai mare complexitate tehnică, aceasta atît datorită numeroaselor soluții statice și constructive posibile, cît și datorită încărcărilor și condițiilor severe de exploatare la care construcția, în ansamblul ei, suprastructura și infrastructura trebuie să răspundă printr-o comportare de maximă siguranță.

În domeniul construcțiilor din beton-armat soluțiile care folosesc stări inițiale de tensiuni, realizate prin precomprimare, prezintă avantaje tehnice și economice, ceea ce justifică importanța și interesul pentru prezenta lucrare.

În primele șase capitole, după prezentarea criteriilor care stau la baza alegerii soluției constructive sînt tratate calculul și alcătuirea constructivă a podurilor cu dale drepte, oblice și curbe precomprimate, a podurilor cu grinzi și cadre drepte precomprimate și a podurilor cu grinzi și cadre curbe precomprimate. Calculul precomprimării elementelor componente ale structurii este condus prin prisma optimizării stărilor de tensiune.

În capitolul șapte sînt prezentate procedeele moderne de execuție a podurilor din beton precomprimat, iar în capitolul opt, aspecte particulare privind proiectarea și execuția podurilor din beton precomprimat care se execută în consolă.

Lucrarea profesorului universitar Capatu Chimon reprezintă o valoroasă lucrare tehnico-științifică în domeniul podurilor din beton precomprimat, prima în literatura tehnică din țara noastră în acest domeniu. Problemele teoretice de calcul, cît și cele practice, referitoare la proiectarea și tehnologia de execuție sînt prezentate cu competență științifică și cu foarte mare claritate, cartea „Poduri din beton precomprimat" fiind un instrument deosebit de util tuturor acelora, ingineri din proiectare, cercetare și execuție, care lucrează în acest domeniu.

Acad. *Dan Mateescu*

JOZEF FARKAS, *Optimum Design of Metal Structures* (Proiectarea optimă a structurilor din metal), Akadémiai Kiadó, Budapesta, 1984.

Volumul care face obiectul recenziei se adresează unei categorii largi de cititori ingineri proiectanți, cercetători și studenți, fiind prezentată concis și la un nivel accesibil și clar. Lucrarea se desfășoară pe un număr de 222 pagini avînd 7 capitole, figuri, tabele, numeroase referiri bibliografice și un index al noțiunilor care intervin în lucrare.

În lucrare sînt prezentate cele mai moderne metode matematice, analitice și numerice, care sînt aplicate în calculul de optimizare a structurilor metalice.

Scopul urmărit, așa cum reiese și din prefața autorului este de a extinde la soluții complexe problemele de dimensionare optimă a structurilor simple (grinzi I sau grinzi cu pereți subțiri), avînd la îndemînă tehnici de calcul avansate. Lucrarea oferă inginerilor proiectanți o selecție a metodelor de proiectare eficiente din punct de vedere al rezistențelor și în același timp a costurilor, în special în cazul structurilor sudate.

Lucrarea este împărțită în două părți.

Partea I se referă la problemele generale ale proiectării optime, făcînd o analiză globală a metodelor matematice. În primul capitol sînt enumerați factorii care sînt cuprinși în analiza structurală : materiale, tipuri de structuri, tehnologii de realizare, eforturi și deformații. Capitolul al doilea cuprinde o prezentare generală a metodelor matematice utilizate în analiza structurală.

Partea a II-a lucrării prezintă aplicații ale proiectării optime (cap. 3—7) la următoarele tipuri de structuri : elemente comprimate cu secțiune chesonată sudate ; grinzi cu zăbrele ; grinzi static determinate supuse la încovoiere și tăiere (cu inimă plină, cheson, hibride și sandwich) ; grinzi continue și ferme static nedeterminate ; plăci celulare sudate. La sfîrșitul fiecărui capitol este prezentat un exemplu numeric, rezolvat fie prin soluții analitice, fie printr-un program de calcul.

Lucrarea se încheie cu o anexă în care sînt cuprinse probleme speciale de analiză, majoritatea bazate pe rezultatele cercetărilor autorului, referitoare la : calculul eforturilor reziduale din sudare, flambajul elementelor comprimate, răspunsul static și dinamic al grinzilor sandwich, analiza plăcilor celulare, program de calcul Fortran.

G. Mateescu

C. BIA, V. ILLE, M. V. SOARE, *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, Editura didactică și pedagogică, 1983, 936 p.

Obținerea unor soluții optime, sub aspectul siguranței și al economicității, în calculul și proiectarea construcțiilor sau al ansamblurilor de mașini, impune aplicarea principiilor Rezistenței materialelor și ale Teoriei elasticității la alegerea materialului, formei și dimensiunilor elementelor structurale componente, situînd astfel aceste două discipline tehnice la baza cursurilor de specialitate din facultățile cu profilele respective.

Plecînd de la această premisă, autorii prezintă un manual ce include, la nivelul stadiului actual al principiilor și metodelor de calcul, toate cunoștințele necesare pentru profilul general de construcții, vizînd astfel toate facultățile și secțiile de construcții din țara noastră.

Manualul cuprinde următoarele părți : modelul corpului deformabil (caracteristici fizico-mecanice, ipoteze și metode de calcul, cap. 1—4), solicitări simple (cap. 5—9), solicitări compuse (cap. 13), starea generală de tensiuni și deformații (cap. 10), energia potențială de deformație, metode variaționale (cap. 11), teorii ale stărilor de tensiune limită (cap. 12), grinzi pe mediu elastic (cap. 14), bare curbe plane (cap. 15), calculul în domeniul plastic (cap. 16), teoriile de ordinul 1, 2 și 3, flambajul (cap. 17), acțiunea dinamică a încărcărilor (cap. 18), concentrări de tensiuni (cap 19), solicitări variabile, noțiuni de reologie (cap. 20), noțiuni de teoria elasticității spațiale (cap. 21), teoria elasticității plane (cap. 22), torsiunea liberă a barelor prismatice (cap. 23), bare drepte cu pereți subțiri (cap. 24), plăci plane (cap. 25—28), plăci curbe subțiri (cap 29—30), metoda elementelor finite (cap. 31), 12 anexe (noțiuni privind aplicarea metodei elementelor finite, tabele cu caracteristici fizico-mecanice pentru diferite materiale și elemente de construcții, unități de măsură) bibliografia selectivă (82 titluri).

Autorii, personalități recunoscute, atît în țară cît și în străinătate, pentru activitatea lor științifică și pedagogică îndelungată, au sistematizat, sintetizat și expus întregul material teoretic într-o formă deosebit de clară și concisă și la un înalt nivel științific, ilustrîndu-l cu numeroase figuri și completîndu-l cu tabele, respectiv aplicații numerice sugestive.

Includerea în manual a standardelor în vigoare conferă acestuia un plus de aplicabilitate în rezolvarea problemelor de proiectare.

Lucrarea, adresată în aceeași măsură atît studenților cît și inginerilor constructori din cercetare, proiectare și execuție, se înscrie drept cea mai completă de acest gen, de la apariția în 1958, a manualului elaborat de A.A. Beleș și R. P. Voinea, constituind totodată, prin conținut și forma de prezentare, un succes editorial românesc remarcabil.

Decebal Anastasescu

K. S. SPIEGLER, *Principles of Energetics* (Principii Energetice), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983, XI, 168 p.

Scopul cărții este de a pune bazele analizei și proiectării proceselor mecanice din punct de vedere al eficienței energetice.

Descrierea macroscopică a transportului diverselor forme de energie, precum și legile care guvernează acest transport se bazează pe conceptul de *exergie*, adesea numit și energie disponibilă. Exergia este o energie mecanică, electrică sau de altă natură care, în principiu, poate fi complet transformată în lucru util, într-un anumit mediu ambiant.

Capitolul I conține conceptele fundamentale și definițiile necesare înțelegerii conținutului cărții. Sînt prezentate conceptele de bază, lucrul (mecanic sau electric, sau de altă natură), proces termomecanic, funcție de stare, exergie, energie internă și totală, căldură, entalpie etc.

Exprimarea exergiei unui sistem în funcție de parametrii termomecanici este dată în capitolul al II-lea. Tot aici se face legătura dintre exergia pierdută în procesele ireversibile și creșterea concomitentă a entropiei. Analiza exergetică se corelează cu analiza termoeconomică, adică cu o teorie de optimizare a costului unui produs din punct de vedere energetic.

Capitolul al III-lea studiază forța generalizată dintr-un proces energetic liniar în care apare o singură forță și un singur flux, proporțional cu forța. Se dă formula de calcul a forței generalizate și ca aplicație se consideră patru tipuri de procese ireversibile cunoscute : transfer termic, transfer de sarcini electrice, difuzia izotermă a gazelor ideale și curgerea fluidelor incompresibile.

În capitolul al IV-lea se consideră cazul întîlnit în practică al proceselor energetice cuplate în care apar fenomene complicate de transport, cu una sau mai multe forțe interacționînd cu unul sau mai multe fluxuri. Astfel de procese s-au numit cuplate și ecuațiile cuplate au fost obținute pentru un exemplu simplu și anume, transferul de masă printr-o membrană ionică. Coeficienții de conductanță și relațiile de reciprocitate sînt discutate în capitolul al V-lea.

Capitolul al VI-lea aplică teoria vectorială a forței generalizate prezentată în capitolele anterioare la procesele scalare de tipul reacțiilor chimice. Se face analogia dinamică-chimică a transportului vectorial de energie, se definește forța generalizată și se discută relațiile de reciprocitate pentru un sistem simplu de reacții chimice cuplate.

În capitolele următoare atenția autorului se concentrează asupra unor procese clasice de transport de energie. Astfel, capitolul al VII-lea se ocupă cu difuzia gazelor în medii poroase, capitolul al VIII-lea de procesele de filtrare moleculară, iar capitolul al IX-lea de transferul cuplat de masă și căldură așa cum apare de exemplu în problemele de difuzie termică.

Ultimul capitol este destinat interpretării fenomenologice a efectelor termoelectrice Seebeck, Peltier și Thomson, din punct de vedere al teoriei cuplate a transferului de masă și căldură tratată în capitolul al IX-lea.

Cartea se încheie cu o listă de simboluri și trei apendixuri privind ciclul Carnot, dependența dintre potențialul chimic și concentrație precum și răspunsurile la problemele propuse spre rezolvare în interiorul cărții. Fiecare capitol este urmat de o bibliografie selectivă.

Veturia Chiroiu

FRITZ LEONHARDT, *Erinnerungen* (Memorii), Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1984, 336 p., 99 fig.

La 11 iulie 1984 Profesorul *Fritz Leonhardt* din Stuttgart a împlinit 75 ani. Sărbătorit oficial de Asociația Internațională pentru Poduri și Structuri Inginerești cu sediul în Zürich, el a răspuns cu o carte de memorii pe care a subintitulat-o *Constructor într-o epocă frămîntată*.

Autorul a avut în vedere perioada 1934—1984 cît a lucrat ca inginer constructor de autostrăzi, poduri metalice și din beton armat precomprimat, clădiri înalte, turnuri și acoperișuri suspendate sau a activat ca profesor, cercetător și om de știință.

Desigura. în prima parte, cartea de memorii evocă copilăria, pregătirea școlară, călătoriile de studii. Autorul notează că încă de copil își desfășura toate activitățile planificat. Recunoaște cu gratitudine rolul educativ al părinților și profesorilor săi dedicîndu-le rînduri de mare emoție.

Podurile fiind pasiunea vieții sale, Profesorul *Leonhardt* le consacră cea mai mare parte a cărții. După participarea sa la refacerea podurilor distruse de război sînt prezentate succesiv noile poduri de peste Rin de la Düsseldorf, Köln și Mannheim, iar apoi cele de peste Mosel de la Zeltingen, Trittenheim și Wehlen. După catastrofa Tacoma din S.U.A., Prof. *Leonhardt* a efectuat cercetări proprii asupra stabilității la vînt a podurilor suspendate și propune conformarea aerodinamică a tablierelor. Concepția sa a fost aplicată la Podul Severn din Anglia, primul pod din lume cu tablier aerodinamic. În schimb, sistemul său constructiv de pod monocablu, brevetat ca invenție în 1953, n-a fost niciodată aplicat și autorul explică de ce. Sînt evocate în continuare podurile executate cu participarea sa pe diferite meridiane ale lumii ca de pildă la Porto Alegre în Brazilia, Lahore în Pakistan, Pasco în Alaska, Perth în Australia, Kessock în Scoția și multe altele.

Turnurile și clădirile înalte ocupă un alt capitol al cărții. După ce discută toate turnurile de televiziune din Germania sînt prezentate diferitele soluții constructive adoptate în S.U.A., Canada, Republica Sudafricană, China și Japonia. Deosebit de interesantă este soluția propusă de autor pentru stabilizarea turnului Pisa ca și turnul pentru obținerea energiei electrice prin efectul de seră.

Acoperișurile și construcțiile suspednate au prilejuit autorului realizări remarcabile. Printre acestea sînt Pavilionul german la Expoziția de la Montreal din 1967, Stadionul Olimpic din München inaugurat în 1972 și Clădirea Clincii Universitare din Köln.

Ultimele capitole ale cărții se referă la activitatea de cercetare în construcții a autorului în care a promovat calculul pe calculator, la catedră ca profesor și îndrumător de doctoranzi și în sfîrșit participarea la manifestările științifice organizate de Asociația Internațională pentru Poduri și Structuri Inginerești. Prin paleta largă de subiecte pe care le dezvoltă și stilul său direct, deschis și sincer, cartea de memorii a Prof. *Fritz Leonhardt* poate găsi audiență de la tinerii ingineri constructori în formare pînă la cei ce se află la ora bilanțului.

Ramiro Sofronie

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 5.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor compresibile**, 1984, 886 p., 68 lei.

IOAN ANTON, **Cavitația, Vol. I**, 1984, 338, p., 46 lei.

C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, **Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor**, 1984, 446 p., 47 lei.

IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul, Vol. II**, 1984, 244 p., 22 lei.

SERGIU T. CHIRIACESCU, **Stabilitatea în dinamica așchierii metalelor**, 1984, 188, p., 16,50 lei.

D. F. SĂMĂRESCU, **Difuzia cimpului electromagnetic și aplicații**, 1983, 238 p., 20 lei.

A. PAVEL, **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983, 310 p., 26 lei.

V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.

IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul, Vol. I**, 1983, 198 p., 18 lei.

ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA (sub redacția), **Cutremurul de pămînt din România de la 4 martie 1977**, 1983, 516 p., 10 lei.

ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**, 1982, 253 p., 20 lei.

GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurală și informatica**, 1982, 192 p., 14,50 lei.

VOICU DOLOCAN, **Fizica joncțiunilor cu semiconductoare**, 1982, 330 p., 30 lei.

A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 39 lei.

DAN TEODORESCU, **Modele stohastice optimizate**, 1982, 246 p., 20 lei.

ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 639 p., 44 lei.

VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.

GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România. Matematica. Mecanica. Astronomia**, 1981, 168, p., 9 lei.

LIVIU DUMITRAȘCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295, p., 20, 40 lei.

TITUS PETRILA, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.

ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.

MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.

DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**, 1981, 327 p., 26 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
– SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
– SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

RM – ISSN 0039 – 4017

ST. CERC. MEC. APL.; TOM 44, NR. 1 1985, P. 1 – 102

I. P. Informația c. 2633

Lei 55.–
$ 62 pour un abonnement annuel

Q
T2557

2
TOMUL 44
martie—apr.
1985

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R.S. România se vor adresa : ROMPRESFILATELIA — sectorul export-import presă. P.O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 44, nr. 2 martie—aprilie 1985

SUMAR

STUDII

CAIUS IACOB, Asupra axiomelor Mecanicii şocurilor şi a generalizării teoremei lui Lazare Carnot 105

I. SETEANU, M. ERHAM, Determinarea dimensiunilor optime ale albiilor barate şi îndiguite în funcţie de regimul infiltraţiilor 115

I. COLUMBEANU, AL. D. STAN, Asupra unor sisteme de etanşare 121

N. TRUICĂ, E. SOÓS, Studiul oscilaţiilor de torsiune din transmisia unui automobil, pe un model vîsco-elastic liniar cu două mase. II. Determinarea soluţiei 133

A. PAVEL, L. RIZEA, M. CULIN, Asigurarea antiseismică a rezervoarelor sferice prin acordarea tiranţilor 154

DORIN CONSTANTINESCU, TUDOR-VASILE HUNCKER, ION MOHORA, MARINEL PETRE, Metodă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr. III 181

REFERATE

P. P. TEODORESCU, Cîteva consideraţii asupra dezvoltării modelelor matematice ale mecanicii. II 201

RECENZII 213

ASUPRA AXIOMELOR MECANICII ȘOCURILOR ȘI A GENERALIZĂRII TEOREMEI LUI LAZARE CARNOT

de CAIUS IACOB

În lucrare se stabilesc următoarele rezultate : a) în ciocnirea a două corpuri solide rigide libere există echivalență între axiomele mecanicii șocurilor care prevăd existența a două faze, una de comprimare și una de destindere, cu un raport de restituire $k > 0$ între percusiunea de destindere și cea de comprimare, dat de relația (1.14) și acelea care completează ecuațiile (1.3) și (1.4) prin axioma lui Newton (1.15), exprimînd faptul că raportul dintre vitezele relative normale de după șoc și dinainte de șoc este egal cu $-k$. b) Aceste rezultate sînt extinse și la cazul în care sistemul material comportă legături ideale permanente. c) Se generalizează teorema lui Lazare Carnot, care leagă energia cinetică pierdută de sistem prin ciocnire de energia cinetică a vitezelor pierdute, prin relația (4.4).

1. CIOCNIREA A DOUĂ SOLIDE LIBERE

Se consideră mișcarea, raportată la un reper inerțial $Oxyz$, a două solide rigide, S_1 și S_2, sub acțiunea unor forțe date și în absența legăturilor La momentul t solidele se ciocnesc în punctul A. Intervalul (t, t') al coliziunii este foarte scurt și conform axiomelor mecanicii șocurilor avem de considerat percusiunile : $\vec{P}_{12}$, exercitată de solidul S_2 asupra lui S_1 în punctul său A_1, care coincide cu A la momentul t, și $\vec{P}_{21}$, exercitată de

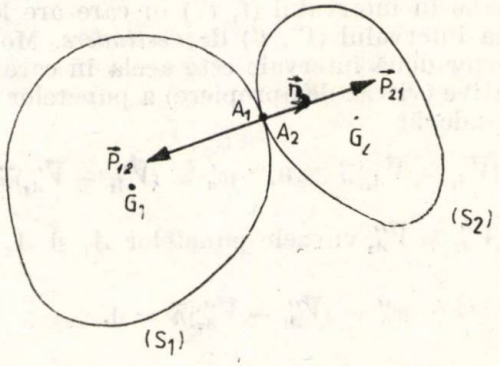


Fig. 1

S_1 asupra lui S_2 în punctul său A_2 care coincide cu A la același moment. Axiomele menționate presupun că în intervalul (t, t') pozițiile solidelor sînt considerate invariabile (fig. 1).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 2, 1985, P. 105—114

Dacă se consideră versorul $\vec{n}$ al normalei la planul tangent comun la suprafeţele de contact ca orientat de la S_1 la S_2 (fig. 1), avem în absenţa frecării

$$\vec{P}_{12} + \vec{P}_{21} = 0, \quad \vec{P}_{12} = -P\vec{n}, \quad \vec{P}_{21} = P\vec{n}, \tag{1.1}$$

cu $P > 0$. Fie G_1 şi G_2 centrele de masă ale solidelor S_1 şi S_2. Vom nota vitezele lor la momentul t prin $\vec{V}_{G_1}$ şi $\vec{V}_{G_2}$ iar rotaţiile instantanee ale lor la acelaşi moment prin $\vec{\omega}_1$ şi $\vec{\omega}_2$. Conform aceloraşi axiome se admite că vitezele punctelor $A_1 \in S_1$ şi $A_2 \in S_2$ vor fi date de

$$\vec{V}_{Aj} = \vec{V}_{Gj} + \vec{\omega}_j \times \overrightarrow{G_jA} \quad (j = 1,2). \tag{1.2}$$

Fie $\vec{V}'_{Aj}$, $\vec{V}'_{Gj}$ vitezele punctelor A_j şi G_j la sfîrşitul coliziunii, la momentul t'. Vom nota prin M_j masele solidelor şi, respectiv, prin $\vec{K}_{Gj}(S_j)$, $\vec{K}'_{Gj}(S_j)$ momentele lor cinetice faţă de polul G_j la momentele t şi t' $(j = 1,2)$.

Axiomele mecanicii ciocnirilor se exprimă prin ecuaţiile

$$M_j(\vec{V}'_{Gj} - \vec{V}_{Gj}) = (-1)^j P\vec{n}, \quad (j = 1,2) \tag{1.3}$$

$$\vec{K}'_{Gj}(S_j) - \vec{K}_{Gj}(S_j) = (-1)^j P(\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}), \tag{1.4}$$

care derivă din teoremele impulsului şi momentului cinetic pentru intervalul (t, t') al şocului; a se vedea de exemplu [1], [2].

Ecuaţiile (1.3) şi (1.4) ar trebui să determine pe $\vec{V}'_{Gj}$, $\vec{\omega}'_j (j = 1,2)$ şi pe P, cunoscînd pe $\vec{V}_{Gj}$ şi $\vec{\omega}_j (j = 1,2)$. Dar în realitate avem 13 necunoscute scalare şi numai 12 ecuaţii scalare, astfel încît o nouă ecuaţie, deci o axiomă suplimentară, este necesară.

Se obţine un sistem complet de ecuaţii postulînd că intervalul coliziunii se descompune în intervalul (t, t'') în care are loc o *compresiune*, după care urmează intervalul (t'', t') de *destindere*. Momentul $t'' \in (t, t')$ de separare al acestor două intervale este acela în care componenta normală a vitezei relative (viteza de apropiere) a punctelor A_1 şi A_2 se anulează. Avem într-adevăr

$$w_n = (\vec{V}_{A_1} - \vec{V}_{A_2})\vec{n} > 0, \quad w'_n = (\vec{V}'_{A_1} - \vec{V}'_{A_2})\vec{n} < 0. \tag{1.5}$$

Dacă notăm prin $\vec{V}''_{A_1}$ şi $\vec{V}''_{A_2}$ vitezele punctelor A_1 şi A_2 la momentul t'', va trebui deci ca

$$w''_n = (\vec{V}''_{A_1} - \vec{V}''_{A_2})\vec{n} = 0. \tag{1.6}$$

Axiomele mecanicii şocurilor, scrise pentru intervalele (t, t'') şi (t'', t') conduc, pe de altă parte, la

$$M_j(\vec{V}''_{Gj} - \vec{V}_{Gj}) = (-1)^j P^{(c)}\vec{n}, \quad (j = 1,2) \tag{1.7}$$

$$\vec{K}''_{Gj}(S_j) - \vec{K}_{Gj}(S_j) = (-1)^j P^{(c)}(\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}) \tag{1.8}$$

pentru perioada de compresiune, şi la

$$M_j(\vec{V}'_{G_j} - \vec{V}''_{G_j}) = (-1)^j P^{(d)} \vec{n} \qquad (j = 1,2) \tag{1.9}$$

$$\vec{K}'_{G_j}(S_j) - \vec{K}''_{G_j}(S_j) = (-1)^j P^{(d)} (\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}) \tag{1.10}$$

pentru perioada de destindere. S-au notat aici prin $\vec{V}''_{G_j}$ vitezele punctelor G_j la momentul t'' şi prin $\vec{K}''_{G_j}(S_j)$ momentele cinetice ale solidelor S_j faţă de polul G_j la momentul t'', percusiunile de compresiune şi de destindere exercitate de S_j asupra lui S_j fiind respectiv

$$\vec{P}^{(c)}_{12} = -P^{(c)} \vec{n}, \quad \vec{P}^{(c)}_{21} = P^{(c)} \vec{n}, \quad P^{(c)} > 0, \tag{1.11}$$

şi

$$\vec{P}^{(d)}_{12} = -P^{(d)} \vec{n}, \quad \vec{P}^{(d)}_{21} = P^{(d)} \vec{n}, \quad P^{(d)} > 0, \tag{1.12}$$

în fazele (t, t'') şi (t'', t').

Din (1.7), (1.8), (1.9) şi (1.10) se obţine prin adunare, ţinînd seamă de (1.3) şi (1.4),

$$P = P^{(c)} + P^{(d)}. \tag{1.13}$$

Fie $\vec{\omega}''_j (j = 1,2)$ rotaţia instantanee a lui S_j la momentul t''. Relaţiile (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) constituie 25 de ecuaţii scalare pentru determinarea necunoscutelor $\vec{V}''_{G_j}$, $\vec{V}'_{G_j}$, $\vec{\omega}''_j$, $\vec{\omega}'_j$ $(j = 1,2)$, $P^{(c)}$ şi $P^{(d)}$ adică a 26 de necunoscute scalare.

Noua ecuaţie care li se adaugă este exprimată după unii autori (a se vedea de exemplu [1], [2], [3], [15]), prin axioma

$$\frac{P^{(d)}}{P^{(c)}} = k \quad (0 \leqslant k \leqslant 1) \tag{1.14}$$

unde k este *coeficientul de restituire*, care depinde numai de natura corpurilor în contact. Pentru $k = 1$ avem cazul ciocnirii elastice; pentru $k = 0$ ciocnirea este plastică.

Alţi autori (a se vedea de exemplu [4]—[16]) utilizează, în locul lui (1.14), *axioma lui Newton* care se exprimă prin aceea că raportul dintre modulele vitezelor relative normale de destindere şi de comprimare este k. Cu notaţiile (1.5) aceasta revine la postularea relaţiei

$$w'_n + kw_n = 0. \tag{1.15}$$

Acest fapt are avantajul că nu mai reclamă trecerea prin sistemele (1.6) — (1.10), condiţia (1.15) fiind asociată sistemelor (1.3) şi (1.4).

Se pune însă problema echivalenţei sistemelor de axiome exprimate, respectiv, prin ecuaţiile (1.6)—(1.10) împreună cu (1.14), sau prin ecuaţiile (1.6)—(1.10) şi (1.15). Lucrarea de faţă este consacrată în primul rînd

elucidării acestei chestiuni. Vom remarca că în tratate se consideră numai cazul ciocnirii centrale, în particular a două sfere omogene, și în acest caz răspunsul este afirmativ. Vom dovedi același rezultat și în cazul general al ciocnirii fără frecare.

2. ECHIVALENȚA SISTEMELOR DE AXIOME ÎN CAZUL CIOCNIRII A DOUĂ SOLIDE LIBERE

Să observăm că, în virtutea axiomelor admise ale mecanicii șocurilor [2], distribuția vitezelor solidului la fiecare moment al intervalului (t, t') este dată de relații analoge cu (1.2). Vom avea deci

$$\vec{V}''_{A_j} = \vec{V}''_{G_j} + \vec{\omega}''_j \times \overrightarrow{G_jA} \qquad (j = 1,2). \tag{2.1}$$

Dar din (1.6) și (1.9) se deduce, în virtutea axiomei (1.14),

$$(1 + k)\vec{V}''_{G_j} = k\vec{V}_{G_j} + \vec{V}'_{G_j} \qquad (j = 1,2). \tag{2.2}$$

Înlocuind în condiția (1.6) pe $\vec{V}''_{A_j}$, în virtutea lui (2.1) și (2.2) se obține, ținînd seama de proprietățile produsului mixt,

$$\begin{aligned} I = {} & [(1 + k)\vec{\omega}''_1 - k\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}'_1] \ (\overrightarrow{AG_1} \times \vec{n}) - \\ & - [(1 + k)\vec{\omega}''_2 - k\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}'_2](\overrightarrow{AG_2} \times \vec{n}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde s-a utilizat notația

$$I = kw_n + w'_n. \tag{2.4}$$

Să eliminăm acum pe $\overrightarrow{G_jA} \times \vec{n}$ între (1.8) și (1.10). Se obține

$$(1 + k)\vec{K}''_{G_j}(S_j) = k\vec{K}_{G_j}(S_j) + \vec{K}'_{G_j}(S_j) \quad (j = 1,2). \tag{2.5}$$

Fie $\hat{I}_{G_j}(S_j)$ tensorul de inerție al lui S_j în punctul G_j. Se știe că avem [19]

$$\vec{K}_{G_j}(S_j) = \hat{\vec{I}}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}_j \tag{2.6}$$

și la fel

$$\vec{K}'_{G_j}(S_j) = \hat{I}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}'_j, \quad \vec{K}''_{G_j}(S_j) = \hat{I}_{G_j}(S_j)\vec{\omega}''_j, \tag{2.7}$$

deoarece relațiile obișnuite de distribuție a vitezelor în solid au loc la momentele t, t'', t', așa cum s-a admis.

Din (2.5) rezultă atunci

$$I_{G_j}(S_j)\,[(1 + k)\vec{\omega}''_j - k\vec{\omega}_j - \vec{\omega}'_j] = 0 \qquad (j = 1,2). \tag{2.8}$$

Dar matricea de inerţie ataşată tensorului de inerţie $\vec{\vec{I}}_{G_j}(S_j)$ este nesingulară [12]. Rezulta deci relaţiile

$$(1 + k)\vec{\omega}_j'' - k\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_j' = 0 \quad (j = 1,2), \tag{2.9}$$

şi prin urmare, din (2.3) se deduce $I = 0$. Astfel : *relaţia (1.15) este o consecinţă a sistemului de axiome (1.6) — (1.10) şi (1.14).*

Reciproca este adevărată. Într-adevăr, să plecăm de la ecuaţiile (1.6)—(1.10) şi (1.15).
Notind

$$\frac{P^{(d)}}{P^{(c)}} = k', \tag{2.10}$$

vom deduce la fel

$$k'w_n + w_n' = 0. \tag{2.11}$$

Dar $w_n = (\vec{V}_{A_1} - \vec{V}_{A_2})\,\vec{n} \neq 0$. Din (1.15) şi (2.11) rezultă $k = k'$.

Demonstraţia care a fost dată a mai pus în evidenţă formulele (2.2) şi (2.9) care dau starea vitezelor la momentul t'', precum şi formulele (2.5) care dau expresia momentelor cinetice ale solidelor, care se ciocnesc, la momentul t'' de separare a fazei de compresiune de cea de destindere. Aceste relaţii sînt utile pentru evaluarea energiei totale a sistemului material la momentul t'', conform unor rezultate cunoscute [20].

3. GENERALIZARE LA CAZUL CIOCNIRII FĂRĂ FRECARE A DOUĂ SOLIDE SUPUSE LA LEGĂTURI IDEALE INDEPENDENTE DE TIMP

Să considerăm un solid mobil S. Fie $T = (\vec{\omega}, \vec{V}_G)$ torsorul său cinematic în polul G ($\vec{\omega}$ rotaţia instantanee, $\vec{V}_G$ viteza centrului de masă); fie $\tau = (\vec{H}, \vec{K}_G)$ torsorul său cinetic în polul G ($\vec{H}$ impulsul total, $\vec{K}_G$ momentul cinetic în raport cu polul G). Expresia energiei cinetice $\mathcal{E}$ a solidului este [17], [20]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,[\tau, T] = \frac{1}{2}\,(\vec{H}\vec{V}_G + \vec{K}_G\vec{\omega}), \tag{3.1}$$

unde $[\tau, T]$ este comomentul torsorilor τ, T, care este de altfel independent de polul G.

Dacă în intervalul foarte scurt (t, t') se aplică solidului S forţe percutante (exterioare şi interioare), avem ecuaţiile fundamentale

$$\vec{H}' - \vec{H} = \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{K}_G' - \vec{K}_G = \vec{\mathcal{M}}_G, \tag{3.2}$$

care ne dau torsorul cinetic $\tau' = (\vec{H}', \vec{K}_G')$ după salt, la momentul t'. Aici $(\vec{\mathcal{P}}, \vec{\mathcal{M}}_G)$ reprezintă torsorul percusiunilor exterioare aplicate, acela al percusiunilor interioare fiind nul în cazul unui corp solid.

Fie $T' = (\vec{\omega}', \vec{V}'_G)$ torsorul cinematic al solidului S, la momentul t'. Înmulţind scalar ecuaţiile (3.2) respectiv prin $\vec{\omega}'$ şi $\vec{V}'_G$, găsim prin adunare

$$[(\tau' - \tau),\ T'] = \mathscr{L}', \tag{3.3}$$

unde

$$\mathscr{L}' = \vec{\mathscr{P}}\vec{V}'_G + \vec{\mathscr{M}}_G\vec{\omega}' = [\Pi,\ T'] \tag{3.4}$$

reprezintă puterea forţelor percutante la momentul t', $\Pi = (\vec{\mathscr{P}}, \vec{\mathscr{M}}_G)$ fiind torsorul forţelor percutante în polul G.

Fie Q un punct oarecare al solidului S. Viteza pierdută de acest punct prin aplicarea percusiunilor este, prin analogie cu (1.2),

$$\vec{V}_Q - \vec{V}'_Q = \vec{V}_G - \vec{V}'_G + (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \overrightarrow{GQ}. \tag{3.5}$$

Prin urmare, torsorul cinematic al vitezelor pierdute este $(\vec{\omega} - \vec{\omega}', \vec{V}_G - \vec{V}'_G)$, iar torsorul cinetic $(\vec{H} - \vec{H}', \vec{K}_G - \vec{K}'_G)$. Energia cinetică a vitezelor pierdute $\mathscr{E}_p$ se obţine în virtutea lui (3.1) cu ajutorul comomentului acestor torsori.
Avem

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}[\tau - \tau',\ T - T']. \tag{3.6}$$

Fie $\mathscr{E}'$ energia cinetică a solidului S la momentul t'. Avem

$$\mathscr{E}' = \frac{1}{2}[\tau',\ T']. \tag{3.7}$$

Înlocuind în (3.3) pe T' prin $T' - T + T$, se găseşte uşor

$$\mathscr{E}_p + \mathscr{E}' - \mathscr{E} + \frac{1}{2}[\tau',\ T] - \frac{1}{2}[\tau,\ T'] = \mathscr{L}'.$$

Dar

$$[\tau',\ T] = [\tau,\ T'] \tag{3.8}$$

deoarece

$$\vec{K}'_G = \vec{\vec{I}}_G\vec{\omega}',\quad \vec{K}_G = \vec{\vec{I}}_G\vec{\omega}$$

şi

$$\vec{\omega}\vec{\vec{I}}_G\vec{\omega}' - \vec{\omega}'\vec{\vec{I}}_G\vec{\omega} = 0,$$

$\vec{\vec{I}}_G$, tensorul de inerţie al lui S în punctul G fiind simetric.
Rezultă relaţia

$$\mathscr{E}' - \mathscr{E} + \mathscr{E}_p = \mathscr{L}'. \tag{3.9}$$

Dacă am fi înmulţit scalar ecuaţiile (3.2) respectiv prin $\vec{\omega}$ şi $\vec{V}_G$, s-ar fi găsit în mod analog

$$\mathcal{E}' - \mathcal{E} - \mathcal{E}_p = \mathcal{L}, \tag{3.10}$$

unde

$$\mathcal{L} = \vec{\mathcal{P}}\vec{V}_G + \vec{\mathcal{M}}_G\vec{\omega} = [\Pi, T] \tag{3.11}$$

este puterea forţelor percutante exterioare la momentul t. Din (3.9) şi (3.10) se deduc formulele

$$\mathcal{E}' - \mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}' + \mathcal{L}), \tag{3.12}$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L}), \tag{3.13}$$

care dau saltul energiei cinetice şi energia vitezelor pierdute.

Vom aplica aceste rezultate la cazul ciocnirii solidelor S_1 şi S_2, care a fost considerat în paragraful 1. Fie E, E', E'' energiile cinetice ale sistemului material format din S_1 şi S_2 şi fie E_p, E'_p, E''_p energiile cinetice ale vitezelor pierdute de sistem respectiv la momentele t, t', t''.

Scriind ecuaţiile (3.12) pentru fiecare solid S_j în parte pentru intervalele (t, t'') şi (t'', t'), cu $j = 1,2$, se obţine prin adunare

$$E'' - E = -\frac{1}{2}P^{(c)}w_n, \tag{3.14}$$

$$E' - E'' = -\frac{1}{2}P^{(d)}w'_n, \tag{3.15}$$

deoarece lucrul mecanic al forţelor percutante de legătură este nul prin ipoteză, legăturile fiind presupuse ideale, iar pentru fiecare solid apare în contribuţia forţelor exterioare percutante numai $\vec{P}_{12}$ sau $\vec{P}_{21}$; apoi comomentul care dă pe $\mathcal{L}$ sau $\mathcal{L}'$ poate fi calculat alegînd ca pol punctul A, deoarece comomentul este independent de alegerea polului. Astfel, puterea forţelor percutante care acţionează asupra sistemului la momentele t, t' şi t'' este dată, respectiv, de

$$\begin{aligned} L &= -\vec{P}^{(c)}\vec{V}_{A_1} + \vec{P}^{(c)}\vec{V}_{A_2} = -P^{(c)}w_n, \\ L' &= -\vec{P}^{(d)}\vec{V}'_{A_1} + \vec{P}^{(d)}\vec{V}'_{A_2} = -P^{(d)}w'_n, \\ L'' &= -\vec{P}^{(c)}\vec{V}''_{A_1} + \vec{P}^{(c)}\vec{V}''_{A_2} = P^{(c)}(\vec{V}''_{A_2} - \vec{V}''_{A_1})\vec{n} = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Avem $L'' = 0$ ca urmare a condiţiei (1.6).

De asemenea, scriind ecuațiile (3.13) pentru fiecare solid S_j în parte, pentru intervalele (t, t'') și (t'', t'), după adunare termen cu termen se obține

$$E''_p = \frac{1}{2}(L'' - L) = P^{(c)} w_n, \tag{3.17}$$

$$E'_p = \frac{1}{2}(L' - L'') = -P^{(d)} w'_n. \tag{3.18}$$

Să utilizăm acum axioma (1.14). Din (3.14) și (3.15) se deduce prin adunare

$$E' - E = -\frac{1}{2} P^{(c)}(w_n + k w'_n). \tag{3.19}$$

Dar aplicînd relația (3.12) direct pentru intervalul (t, t') cînd percusiunea este dată de (1.13), obținem la fel

$$E' - E = \frac{1}{2}(L' + L) = -\frac{1}{2} P^{(c)}(1 + k)(w_n + w'_n). \tag{3.20}$$

Comparind pe (3.19) cu (3.20) se deduce că trebuie să avem

$$k w_n + w'_n = 0, \tag{3.21}$$

ceea ce coincide cu (1.15).

Reciproca se stabilește la fel ca în paragraful 2. Astfel, și în cazul existenței legăturilor ideale permanente, echivalența celor două sisteme de axiome, cu (1.14) sau cu (1.15), este stabilită.

4. GENERALIZAREA TEOREMEI LUI LAZARE CARNOT

O astfel de generalizare a fost dată de E. J. Routh [18], utilizînd principiul lui D'Alembert pentru sisteme de puncte materiale. Dar demonstrația sa utilizează simultan relațiile (1.14) și (1.15), a căror echivalență nu a fost stabilită de el. O altă generalizare a fost dată de J. Pérès [9]. Ea utilizează axioma lui Newton (1.15) și, de asemenea, principiul lui D'Alembert. A se vedea și [6].

Se va observa că aplicînd direct relația (3.13) pentru intervalul (t,t'), se obține

$$E_p = \frac{1}{2}(L' - L) = -\frac{1}{2} P^{(c)}(1 + k)(w'_n - w_n). \tag{4.1}$$

Prin urmare, dacă ţinem seama de (3.21), se găseşte în virtutea lui (3.20)

$$E - E' = \frac{1}{2} P^{(c)} (1 - k^2) w_n, \tag{4.2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} P^{(c)} (1 + k)^2 w_n. \tag{4.3}$$

Eliminînd pe $P^{(c)} w_n$ se obţine

$$E - E' = \frac{1 - k}{1 + k} E_p. \tag{4.4}$$

Relaţia aceasta reprezintă *generalizarea teoremei lui Lazare Carnot.*

Teorema lui Lazare Carnot propriu-zisă se regăseşte în cazul particular al ciocnirii plastice, pentru care avem $k = 0$.

Demonstraţia dată acum nu utilizează principiul lui D'Alembert şi nu asimilează solidele în coliziune cu puncte materiale, aşa cum se procedează în [6], [9] sau în [18]. Din consideraţiile de la paragrafele 1, 2, 3 rezultă că teorema generalizată (4.4) are loc în virtutea axiomelor mecanicii ciocnirilor cărora li se asociază fie axioma (1.14), fie axioma (1.15).

O altă demonstraţie a echivalenţei acestor sisteme de axiome se poate da dacă deducem întîi teorema lui Lazare Carnot generalizată, utilizînd numai axioma (1.14). Înlocuind apoi în (4.4) pe E_p prin expresia sa dedusă din (4.1), se ajunge uşor la (1.15), adică la (3.21), dacă se ţine seamă de (3.19).

Într-o altă lucrare [21], am dedus teorema generalizată a lui Lazare Carnot, utilizînd numai axioma (1.14), în cazul ciocnirii fără frecare a două solide rigide libere.

Primită la redacţie la 25 mai 1984

BIBLIOGRAFIE

1. L. DRAGOŞ, *Principiile Mecanicii analitice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1976.
2. R. VOINAROSKI, *Mecanica teoretică*, Edit. Did. şi Ped. Bucureşti, 1966.
3. ŞT. STAICU, *Introducere in Mecanica teoretică*, Edit. Şt. Enciclop. Bucureşti, 1983.
4. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. **II**, 4-e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1924.
5. T. LEVI-CIVITA, U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, P.I, Zanichelli, Bologna, 1926.
6. G. K. SUSLOV, *Mecanica raţională*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1950, vol. II.
7. V. VÂLCOVICI şi colab., *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.
8. G. SESTINI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Editrice Universitaria, Firenze, 1960.
9. J. PÉRÈS, *Mécanique générale*, Masson, Paris, 1962.
10. H. CABANNES, *Cours de Mécanique générale*, Dunod, Paris, 1966.
11. J. J. MOREAU, *Mécanique classique*, Masson, Paris, vol. I, 1968, vol. II, 1971.
12. L. G. LOIŢIANSKI, A. I. LUR'E, *Kurs teoreticeskoi Mehaniki*. Gostehizdat, Moskva, t. **II**, 1955.

13. V. A. KILCESVKI, *Kurs teoreticeskoi Mehaniki*, Nauka, Moskva, t. **II**, 1977.
14. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie*, Edit. tehnică, Bucureşti, vol. II, 1980.
15. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUŞU, *Mecanica*, Edit. Did. Ped. Bucureşti, 1975.
16. V. OLARIU, P. SIMA, V. ACHINLOAIE, *Mecanica tehnică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1982.
17. P. BROUSSE, *Cours de Mécanique*, A. Colin, Paris, 1973.
18. E. J. ROUTH, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Mac Millan, London, 1930, Part. I.
19. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Edit. Did. Ped. Bucureşti, ed. I, 1971, ed. II, 1980.
20. C. IACOB, *Extinderea teoremelor lui Koenigs şi Vâlcovici în legătură cu energia cinetică*, St. cerc. mat. **35**, 6, 483—391 (1983).
21. C. IACOB, *Asupra generalizării teoremei lui Lazare Carnot în cazul ciocnirii a două solide rigide libere*, St. cerc. mec. apl., **43**, *5—6*, 422—429(1984).

DETERMINAREA DIMENSIUNILOR OPTIME ALE ALBIILOR BARATE ŞI INDIGUITE ÎN FUNCŢIE DE REGIMUL INFILTRAŢIILOR

de I. SETEANU şi M. ERHÁN

Institutul Politehnic, Bucureşti

Se stabileşte funcţia de cost pentru balastul extras şi transportat în vederea realizării digurilor de protecţie ale albiilor îndiguite, ţinînd seama de pierderile prin infiltraţie şi pe sub ecranul de etanşare. Se indică un procedeu de optimizare necondiţionată a funcţiei de cost globale. Se prezintă rezultatele numerice pentru un caz concret analizat.

1. INTRODUCERE

Se analizează regimul infiltraţiilor pentru o albie îndiguită, schematizîndu-se etanşarea laterală prin dig şi ecran de profunzime printr-o palplanşă, determinîndu-se debitul specific către acvifer. Se stabileşte funcţia de cost pentru extragerea şi transportarea balastului de umplutură a digurilor de protecţie, ţinînd seama de lăţimea albiei îndiguite, de adîncimea excavaţiilor în groapa de împrumut şi de mărimea ecranului de profunzime. Prin optimizarea funcţeiei globale de cost se obţine lăţimea şi adîncimea optimă a albiei îndiguite, analizînd diferenţiat sporul de cost datorită transportării balastului din exterior şi al excavării suplimentare din groapa de împrumut în condiţiile menţinerii debitului de infiltraţie pe sub ecranul de etanşare în limite admise.

2. REGIMUL INFILTRAŢIILOR PENTRU PALPLANŞA ŞI GROAPA DE ÎMPRUMUT

Se admite că albia îndiguită este prevăzută cu ecran de etanşare de profunzime în lungul digurilor de contur, ale căror taluze sînt protejate cu un pereu de beton etanş înspre incintă. Patul albiei constituie un mediu poros de coeficient de permeabilitate mare prin care se produc infiltraţii laterale. Roca de bază este aşezată la o adîncime cunoscută, iar în incinta îndiguită este realizată o groapă de împrumut din care se extrage balastul pentru realizarea digurilor de contur, existînd şi posibilitatea aducerii acestuia din exterior.

Cu notaţiile din figura 1, debitul specific de infiltraţie ($m^3/s/m.l$) pe sub palplanşă se scrie [1]:

$$q = \frac{kH}{\pi} \operatorname{arcch}(\lambda) = \frac{kH}{\pi} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}), \tag{1}$$

unde $\lambda = a/t$ este un parametru adimensional, k reprezintă coeficientul de permeabilitate (m/s), H este adîncimea apei

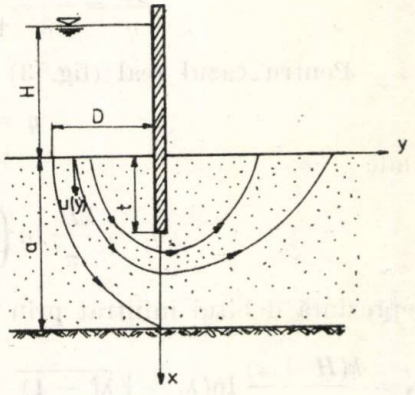


Fig. 1

în incintă, a reprezintă adîncimea mediului poros pînă la roca de bază, iar t este adîncimea ecranului de profunzime. Debitul q este colectat de pe o lăţime a incintei egală, cu o bună aproximaţie, cu :

$$D = \sqrt{a^2 - t^2} = t\sqrt{\lambda^2 - 1}\,. \tag{2}$$

Datorită prezenţei gropii de împrumut debitul de infiltraţie diferă de debitul dat de relaţia (1), dar poate fi estimat prin suprapunerea efectelor, prin însumarea contribuţiei banchetei de lăţime d, necesară constructiv pentru realizarea căii de acces şi a fundului gropii de împrumut.

Deoarece componenta verticală $u(y)$ a vitezei de infiltraţie este :

$$u(y) = \frac{kH}{\pi}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{3}$$

unde funcţia de curent ψ este determinată prin relaţia implicită :

$$\frac{x^2}{t^2 \operatorname{ch}^2 \psi} + \frac{y^2}{t^2 \operatorname{sh}^2 \psi} = 1, \tag{4}$$

se obţine (fig. 2)

$$u(y) = \frac{kH}{\pi}\frac{1}{(y^2 + t^2)^{1/2}}, \tag{5}$$

$$q_d = \frac{kH}{\pi}\int_0^d \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + t^2}} = \frac{kH}{\pi}\operatorname{arcch}\sqrt{1 + \left(\frac{d}{t}\right)^2} \tag{6}$$

sau

$$\frac{q_d}{q} = \frac{\ln\left(\frac{d}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{t}\right)^2}\right)}{\ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}\,. \tag{7}$$

Pentru cazul real (fig. 3) rezultă :

$$q = q_1 + q_2, \tag{8}$$

unde

$$q_1 = \frac{kH}{\pi}\ln\left(\frac{d}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{t}\right)^2}\right) \tag{9}$$

reprezintă debitul infiltrat prin bancheta de lăţime d, iar

$$q_2 = \frac{k(H+s)}{\pi}\ln(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 1}) - \frac{k(H+s)}{\pi}\ln\left(\frac{\mathrm{d}}{t-s} + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{t-s}\right)^2}\right) \tag{10}$$

reprezintă contribuţia gropii de împrumut de adîncime s.

Parametrul adimensional λ_1 se scrie :

$$\lambda_1 = \frac{a - s}{t - s}. \tag{11}$$

Condiția de aplicabilitate a formulelor de mai sus este ca $D = \sqrt{a^2 - t^2} > d$. În caz contrar, contribuția gropii de împrumut la formarea debitului de infiltrație este neglijabilă.

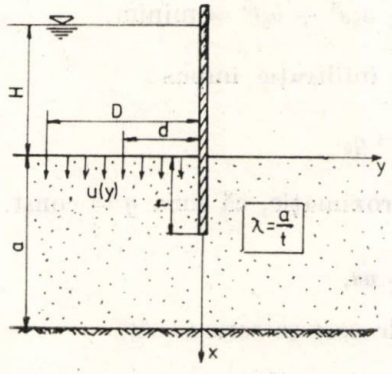


Fig. 2

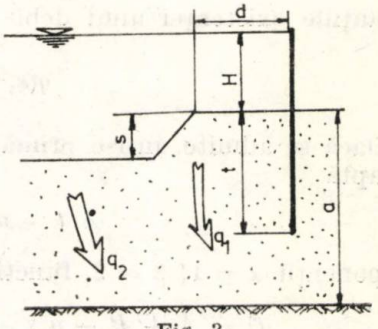


Fig. 3

În relația (8) parametrii t și s (adîncimea ecranului de profunzime și a gropii de împrumut) se consideră variabili, căutîndu-se valorile lor optime, pentru o valoare impusă tehnologic a debitului de infiltrație. În sistemul de axe (s, t) liniile $q = \text{const.}$ sînt reprezentate în figura 4 pentru $H = 9$ m, $d = 20$ m, $a = 57{,}5$ m, $k = 25/86400$ m/s. Se constată că liniile corespunzătoare se pot aproxima prin drepte în zona centrală a parametrului s.

3. FUNCȚIA DE COST ȘI CRITERIUL DE OPTIMIZARE. REZULTATE NUMERICE

Cheltuielile de realizare a incintei îndiguite au două componente majore :

— cheltuielile C_1 (lei/m) pentru realizarea digului de contur care sînt influențate direct de costul transportului balastului de umplutură ;

— cheltuielile C_2 (lei/m^2) legate de construcția ecranului de profunzime, dependente în special de adîncimea acestuia, impusă de condiția menținerii debitului de infiltrație la valoarea admisă q_0.

Cheltuielile C_1 includ realizarea gropii de împrumut și sînt, în general, datorită micșorării costului transportului, cu atît mai reduse cu cît adîncimea s a gropii este mai mare. În continuare, se va admite relația :

$$C_1 = A - a_0 s^{\alpha}, \tag{12}$$

unde A și a_0 sînt factori constanți, iar exponentul α ia valori între 1 și 2.

MŰSZAKI EGYETEM 1949

Cheltuielile C_2 pentru realizarea ecranului de profunzime depind monoton crescător de adîncimea t a acestuia, conform relaţiei :

$$C_2 = B + b_0 t^{\beta}, \tag{13}$$

unde exponentul β ia valori între 2 şi 3, B şi b_0 fiind constante.

Optimizarea dimensionării albiei îndiguite este echivalentă cu minimizarea funcţiei de cost [2] :

$$C = C_1 + C_2 = A + B - a_0 s^{\alpha} + b_0 t^{\beta} = \text{minim}, \tag{14}$$

în condiţiile existenţei unui debit de infiltraţie impus :

$$q(s, t) = q_0. \tag{15}$$

Dacă se admite, într-o primă aproximaţie, că linia $q = \text{const.}$ este o dreaptă

$$t = m + ns, \tag{16}$$

iar exponenţii $\alpha = 1$, $\beta = 2$, funcţia de cost se scrie :

$$C = A + B - a_0 s + b_0 (m + ns)^2 = \text{minim}, \tag{17}$$

pentru care

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}s} = -a_0 + 2b_0 n(m + ns) = 0.$$

În acest caz particular, soluţia optimă se scrie :

$$s_{opt.} = \frac{1}{n}\left(\frac{a_0}{2b_0 n} - m\right), \tag{18}$$

$$t_{opt.} = \frac{a_0}{2b_0 n}. \tag{19}$$

În cazul general este necesar să se aplice metoda multiplicatorilor lui Lagrange θ, căutîndu-se valoarea minimă a funcţiei de cost lărgite :

$$F = C + \theta q = \text{minim}, \tag{20}$$

echivalentă cu sistemul de condiţii :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{21}$$

$$q(s, t) = q_0,$$

avînd ca necunoscute parametri s, t şi θ.

Explicit, sistemul (21) se scrie:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -a_0 \alpha s^{\alpha-1} + \theta \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = b_0 \beta t^{\beta-1} + \theta \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\pi}{k}\frac{q_0}{H+s} = \frac{H}{H+s}\ln\left(\frac{d}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{d}{t}\right)^2}\right)+$$

$$+\ln\frac{\frac{a-s}{t-s}+\sqrt{1+\left(\frac{a-s}{t-s}\right)^2}}{\frac{d}{t-s}+\sqrt{1+\left(\frac{d}{t-s}\right)^2}}.$$

Eliminînd parametrul θ între primele două ecuaţii ale sistemului (22) se obţine condiţia:

$$\frac{\left(\frac{a_0}{b_0}\frac{\alpha}{\beta}s^{\alpha-1}-t^{\beta-1}\right)(H+s)d}{(t-s)\sqrt{(t-s)^2+d^2}} - \frac{\left(\frac{a_0}{b_0}\frac{\alpha}{\beta}s^{\alpha-1}(a-s)-t^{\beta-1}(a-t)\right)(H+s)}{(t-s)\sqrt{(t-s)^2+(a-s)^2}} -$$

$$-\frac{a_0}{b_0}\frac{\alpha}{\beta}\frac{s^{\alpha-1}Hd}{t\sqrt{t^2+d^2}} + t^{\beta-1}\ln\frac{a-s+\sqrt{(a-s)^2+(t-s)^2}}{d+\sqrt{(t-s)^2+d^2}} = 0. \tag{23}$$

Valorile optime ale parametrilor s şi t sînt soluţii ale sistemului format din ultima ecuaţie (22) şi ecuaţia (23).

Într-un exemplu numeric s-au ales următoarele valori ale parametrilor constructivi, morfologici şi economici: $H=9{,}0$ m; $d=20$ m; $a=57{,}5$ m; $k=2{,}89\ 10^{-4}$ m/s; $a_0/b_0=9{,}694$; $\alpha=0{,}80$; $\beta=1{,}90$.

Analizînd un şir de debite specifice de infiltraţie de forma:

$$q_0 = q_{min} + DQ(N-1)\ (N=1{,}20). \tag{24}$$

$q_{min}=2{,}6\ 10^{-3}$ m³/s/ml; $DQ=2{,}1\ 10^{-5}$m³/s/ml, ecuaţia (22) constituie o familie de linii curbe

Tabelul 1

s \ $q_0\cdot10^3$	2,600	2,684	2,789	2,895	3,000
2,50	6,394	5,767	5,100	4,460	3,920
3,00	6,701	6,043	5,315	4,675	4,102
3,50	7,022	6,325	5,555	4,890	4,288
4,00	7,342	6,613	5,820	5,097	4,476
4,50	7,669	6,908	6,060	5,318	4,667
5,00	8,006	7,228	6,325	5,543	4,860
5,50	8,348	7,511	6,590	5,768	5,055
6,00	8,695	7,831	6,855	5,993	5,250
6,50	9,048	8,151	7,120	6,221	5,445
7,00	9,403	8,443	7,378	6,449	5,638

în sistemul de axe (s, t), reprezentînd în figura 4. O parte din rezultatele numerice sînt indicate în tabelul 1 (în tabel figurează valorile variabilei t).

În figura 4 este trasată de asemenea linia curbă care reprezintă ecuaţia (23). Valorile numerice corespunzătoare sînt indicate în tabelul 2.

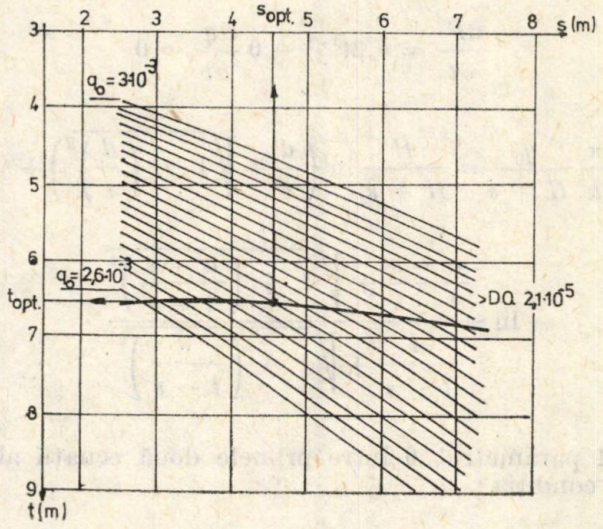


Fig. 4

Tabelul 2

s	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50
t	6,590	6,528	6,510	6,513	6,533	6,573	6,618	6,683	6,759

Punctele de intersecţie între această linie şi familia curbelor $q_0 =$ = const. reprezintă soluţiile corespunzătoare ale problemei de optimizare ($s_{opt.}$, $t_{opt.}$) pentru debitul de infiltraţie corespunzător. De exemplu, pentru $q_0 = 2{,}726\ 10^{-3}$ m³/s/ml : $t_{opt.} = 6{,}54$ m şi $s_{opt.} = 4{,}51$ m.

Procedeul de optimizare prezentat se poate aplica şi pentru cazul altor reprezentări ale funcţiei de cost decît cele date de relaţiile (12) şi (13), eventual efectuîndu-se calculul regimului de infiltraţii mai detaliat, pentru un mediu poros neomogen şi anizotrop şi ţinînd seama de infiltraţia adiţională pirn corpul digurilor de contur.

Primită la redacţie la 16 iulie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. G. SCHNEEBELI, *Hydraulique souterraine*, Eyrolles, Paris, 1966.
2. A. DIACON, I. SETEANU, M. ERHAN, A. CRISTESC, *Criterii tehnico-economice de dimensionare a albiilor barate şi îndiguite*, Sesiunea de comunicări ISPE-ISPH „Utilizarea raţională şi eficientă a resurselor energetice ale ţării", Bucureşti, 1984.

ASUPRA UNOR SISTEME DE ETANȘARE

I. COLUMBEANU, AL. D. STAN
Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În lucrare sînt analizate pierderile prin neetanșeitate la sistemele de etanșare de tip frontal și în special influența rugozității suprafețelor ce formează sistemul asupra pierderii de presiune sub care lucrează acesta.
Rezultatele obținute arată că la mărirea gradului de rugozitate al suprafețelor etanșate debitul pierdut prin sistem se reduce dacă asupra acestuia se menține o presiune diferențială constantă.
În afara rugozității suprafețelor care formează etanșarea frontală a debitul pierdut depinde și de geometria sistemului de etanșare.

1. INTRODUCERE

În practică sînt multiple situațiile cu etanșări frontale realizate pentru a limita pierderile de fluide care se scurg printre sistemele de etanșare.

În general, sistemele de etanșare sînt piese cu mișcări relative una față de cealaltă. Prezența pe cele două piese a unor rugozități datorită construcției, corodării, coroziunii acestui sistem poate modifica și pierderile de fluide prin sistem.

Piesele care formează sistemul etanș pot căpăta o anumită rugozitate și în timpul exploatării. Este greu de imaginat practic un sistem de etanșare fără a prezenta un anumit grad de rugozitate al suprafețelor.

2. MIȘCAREA LAMINARĂ PRINTR-O ETANȘARE FĂRĂ RUGOZITATE

Spațiul realizat printr-o etanșare frontală se poate asimila cu spațiul între două discuri circulare printre care se scurge laminar un fluid vîscos. Pentru obținerea elementelor mișcării, punctul de plecare îl constituie

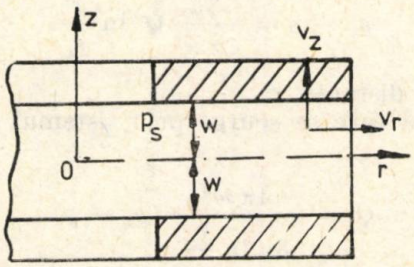


Fig. 1

ecuațiile de mișcare Navier-Stokes care se reduc, considerînd doar proiecția pe axa *Or* (fig. 1), la forma

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{1}$$

μ este viscozitatea dinamică a fluidului, iar p — presiunea. Ecuaţia (1) s-a obţinut considerînd o scurgere laminară a fluidului prin sistemul de etanşare, ceea ce este echivalent cu a scrie

$$v_z = 0. \tag{2}$$

Condiţiile pe care le satisface ecuaţia (1) sînt

$$v_r = 0 \text{ la } z = \pm w. \tag{3}$$

În aceste condiţii, la limită rezultă imediat expresia vitezei

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr}(z^2 - w^2). \tag{4}$$

În această ultimă expresie s-a înlocuit $\frac{\partial p}{\partial r}$ cu $\frac{dp}{dr}$. Debitul de fluid într-o secţiune situată la distanţa r are valoarea

$$Q = 4\pi \int_0^w r v_r \, dz. \tag{5}$$

În urma efectuării calculului rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{3}{4} \mu \frac{Q}{\pi w^3}. \tag{6}$$

Presupunînd că la distanţa $r = r_s$ presiunea are mărimea p_s, se găseşte

$$p_s - p = \frac{3\mu}{4\pi w^3} Q \ln \frac{r}{r_s}, \tag{7}$$

p fiind presiunea la distanţa r.

Debitul de fluid care se scurge prin sistemul de etanşare frontală va avea mărimea

$$Q = \frac{4\pi w^3}{3\mu \ln \frac{r}{r_s}} (p_s - p). \tag{8}$$

Din expresia vitezei v_r se observă că aceasta are valoarea maximă U la $z = 0$,

$$U = -\frac{w^2}{2\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{3Q}{8\pi w} \cdot \frac{1}{r}, \tag{9}$$

iar viteza medie U_m se obţine din egalitatea

$$Q = 4\pi rw \; U_m, \tag{10}$$

de unde rezultă valoarea acesteia

$$U_m = \frac{Q}{4\pi w} \cdot \frac{1}{r}, \tag{11}$$

ceea ce denotă că între cele două viteze în fiecare secțiune există egalitatea.

$$U = 1{,}5\ U_m. \tag{12}$$

3. ETANȘARE FRONTALĂ REALIZATĂ IMPERFECT

Este posibil ca o etanșare de tip frontal să fie realizată imperfect ceea ce ar însemna ca distanța dintre discuri să fie variabilă. În acest caz, se pot aplica relațiile stabilite mai înainte. Astfel, dacă se consideră că la raza r cele două suprafețe s-au deformat, așa cum se observă din figura 2, se poate calcula debitul de fluid scurs prin partea superioară a secțiunii de scurgerea fluidului Q_s, și debitul prin secțiunea situată sub axa de simetrie a fisurii Q_i cu relațiile

$$\begin{aligned} Q_s &= -\frac{1}{3\mu}\, r\, w_s^3(\theta)\, \frac{dp}{dr}, \\ Q_i &= -\frac{1}{3\mu}\, r\, w_i^3(\theta)\, \frac{dp}{dr}, \end{aligned} \tag{13}$$

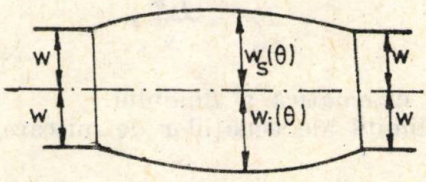


Fig. 2

θ fiind unghiul la centru unde discurile nu păstrează distanța constantă $2w$. Este posibil ca secțiunea de curgere să prezinte și alte geometrii față de aceea redată în figura 2. În asemenea cazuri calculele efectuate pentru determinarea debitului de fluid nu prezintă dificultăți.

4. EFECTUL RUGOZITĂȚII ASUPRA ETANȘĂRII FRONTALE

Etanșările frontale sînt realizate prin contactul direct între piesele care au mișcări relative unele față de celelalte. Pe fețele de contact ale acestora pot exista anumite rugozități care pot proveni din prelucrare, exploatare sau din alte motive asupra cărora nu insistăm acum.

Datorită faptului că piesele în contact sînt din materiale diferite este posibil ca gradul de rugozitate al celor două piese ce formează etanșarea frontală să fie distincte.

Înălțimea rugozităților pe planul superior se notează cu $h(r)$, iar pe acela inferior, $g(r)$. Geometria rugozităților nu este specificată datorită complexității acestor rugozități. Se poate arăta efectul pe care-l are prezența unor suprafețe rugoase pe fețele etanșării frontale asupra elementelor mișcării fluidului. În acest scop, se scriu ecuațiile de mișcare proiectate pe difrecțiile O_r și O_z:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{14}$$

Se pot introduce variabilele adimensionale

$$\bar{r}=\frac{r}{w},\quad \bar{z}=\frac{z}{w},$$

$$\bar{v}_r=\frac{v_r}{U},\quad \bar{v}_z=\frac{v_z}{U},\quad \bar{p}=\frac{p}{\rho U^2}, \tag{15}$$

și cu aceeași notație numărul lui Reynolds definit cu lungimea w și a vitezei U are valoarea

$$Re=\frac{Uw}{\nu},$$

ν este viscozitatea cinematică a fluidului.

Condițiile la limită ale ecuațiilor de mișcare sînt:

$$\text{la}\quad z=\pm w,\quad v_z=0,$$

$$\text{la}\quad z=\pm w,\quad v_r=v_r', \tag{16}$$

v_r' fiind perturbația produsă datorită prezenței rugozității pe pereții celor două piese etanșate. Ecuațiile de mișcare, prin utilizarea variabilelor adimensionale (15), se scriu sub forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}=Re\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}=Re\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{17}$$

unde am neglijat indicele de barare pentru a simplifica scrierea acestor ecuații.

Condițiile la limită (16) se pot scrie tot cu ajutorul variabilelor adimensionale (15) și au forma

$$\begin{aligned} &\text{la} \quad z = \pm 1, \quad v_z = 0, \\ &\text{la} \quad z = \pm 1, \quad v_r = v_r', \end{aligned} \tag{18}$$

v_r' este valoarea normalizată a vitezei perturbate datorită prezenței rugozității celor două piese prin care se scurge fluidul; normalizarea s-a efectuat tot cu ajutorul vitezei de referință U. Plecînd de la relația (4) se observă că prin introducerea variabilelor adimensionale viteza adimensională v_r are forma

$$v_r = U(1 - z^2). \tag{19}$$

Datorită prezenței rugozității pe una dintre fețele etanșării, de exemplu la $z = 1 + h(r)$ viteza v_r se modifică, ceea ce face ca la $z = 1$, viteza perturbată v_r' să prezinte o anumită valoare care poate fi diferită de zero [2]. Rugozitatea pe fața planului se poate realiza în așa fel încît să se considere că de fapt spațiul creat între piese se mărește ce ar presupune atribuirea semnului plus înaintea lui $h(r)$ sau minus dacă spațiul s-ar reduce. Avînd în vedere că de fapt legea de variație a lui $h(r)$ fiind necunoscută, este evident că semnul care se atribuie acestei variabile nu poate fi precizat. Datorită acestui motiv, în calculele pe care le prezentăm, se atribuie doar primul semn.

Concluziile efectuate asupra lui $h(r)$ sînt identice și pentru variabila adimensională $g(r)$. Parametrii la care ne-am referit, $h(r)$ și $g(r)$, au fost obținuți prin raportarea rugozității absolute $h(r)$ și, respectiv, $g(r)$ la lungimea w.

Prima dintre ecuațiile (14) se poate înmulți cu $r\,J_1(kr)\,\mathrm{d}r$, J_1 fiind funcția Bessel de prima speță de ordinul 1, și prin integrare între 0 și ∞ rezultă [3, 6]

$$\int_0^\infty r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2}\right] J_1(kr)\mathrm{d}r = -k^2\int_0^\infty r v_r J_1(kr)\mathrm{d}r = -k^2 R \tag{20}$$

și

$$\int_0^\infty r\frac{\partial p}{\partial r} J_1(kr) = -k\int_0^\infty rp\,J_0(kr)\,\mathrm{d}r = -kP. \tag{21}$$

Datorită acestor rezultate și a notațiilor care se observă imediat, prima ecuație se scrie sub forma

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - k^2\right) R = -k\,Re\,P. \tag{22}$$

Un calcul efectuat asemănător cu cea de a doua ecuaţie conduce la rezultatul

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - k^2\right) Z = Re \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}, \tag{23}$$

unde Z este transformata Hankel a lui v_z cu parametrul de integrare r

$$Z = \int_0^\infty r v_z J_0(kr)\mathrm{d}r,$$

J_0 este funcţia Bessel de prima speţă de ordinul zero. Dacă se are în vedere ecuaţia de continuitate, care se scrie sub forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{24}$$

fiecare termen poate fi înmulţit cu $r J_0(kr)\mathrm{d}r$ şi prin integrare între 0 şi ∞ se găseşte

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) I_0(kr)\mathrm{d}r + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{25}$$

Avînd în vedere relaţiile de recurenţă cunoscute [4],

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} J_n(ax) = \frac{n}{x} J_n(ax) - a J_{n+1}(ax), \tag{26}$$

ceea ce face ca pentru indicele $n = 0$ să se scrie relaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} J_0(kr) = -k J_1(kr) \tag{27}$$

şi prin integrare prin părţi rezultă expresia

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} + kR = 0. \tag{28}$$

Funcţiile R şi P pot fi eliminate între ecuaţiile (22), (23) şi (28), rezultînd ecuaţia diferenţială

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - k^2\right)^2 Z = 0. \tag{29}$$

Soluţia acestei ecuaţii se scrie sub forma

$$Z = C_1 \mathrm{e}^{kz} + C_2 z \mathrm{e}^{kz} + C_3 \mathrm{e}^{-kz} + C_4 z \mathrm{e}^{-kz} \tag{30}$$

și avînd în vedere ecuația (28), rezultă imediat

$$R = C_3 e^{-kz} + C_4 z e^{-kz} - C_1 e^{kz} - C_2 z e^{kz} - \frac{1}{k}(C_2 e^{kz} + C_4 e^{-kz}), \quad (31)$$

C_1, C_2, C_3 și C_4 fiind constante de integrare ce se pot determina utilizînd condițiile la limită ale problemei.

Considerînd că H este transformata Hankel a lui $h(r)$ și G a lui $g(r)$

$$H = \int_0^\infty r\, h(r)\, J_0(kr)\mathrm{d}r, \quad (32)$$

$$G = \int_0^\infty r\, g(r)\, J_0(kr)\mathrm{d}r. \quad (33)$$

Condițiile limită ale problemei, utilizînd tot transformatele Hankel, se pun sub forma

$$\begin{aligned} &\text{la} \quad z = 1, \quad R = 2H \quad \text{și} \quad Z = 0, \\ &\text{la} \quad z = -1, \quad R = 2G \quad \text{și} \quad Z = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Sistemul de ecuații rezultat poate fi rezolvat în raport cu necunoscutele C_1, C_2, C_3 și C_4.

Este posibil ca $h(r) = g(r)$, ceea ce presupune o rugozitate relativă constantă pentru ambele plane care realizează etanșarea frontală. Această situație ar fi posibilă dacă piesele ar fi construite din același material.

În situația în care ar fi egalitatea celor două rugozități relative rezultă și egalitatea transformatelor acestora,

$$H = G \quad (35)$$

Cu acestea, atît Z, cît și R pot fi determinate, de unde rezultă că se pot calcula mărimile v_z, v_r și p cu ajutorul formulelor

$$v_z = \int_0^\infty kZ\, J_0(kr)\mathrm{d}k, \quad (36)$$

$$v_r = \int_0^\infty kR\, J_1(kr)\mathrm{d}k, \quad (37)$$

$$p = \int_0^\infty kP\, J_1(kr)\mathrm{d}k. \quad (38)$$

În același mod se vor calcula $h(r)$ și $g(r)$ și anume

$$h(r) = \int_0^\infty kH J_0(kr)\mathrm{d}k,$$
$$g(r) = \int_0^\infty kGJ_0(kr)\mathrm{d}k. \tag{39}$$

Pentru a vedea influența pe care o are rugozitatea asupra căderii de presiune vom pleca de la formula efortului de forfecare [5]

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right). \tag{40}$$

Acest efort se poate scrie sub formă adimensională dacă se împarte la ρU^2, se obține efortul adimensional

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho U^2}, \tag{41}$$

iar dacă se omit barele la acest parametru ca și la celelalte variabile, rezultă

$$\tau = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right). \tag{42}$$

Având în vedere relațiile prezentate mai înainte rezultă expresia efortului de forfecare,

$$\tau = \frac{1}{Re}\int_0^\infty k\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z} - kZ\right)J_1(kr)\mathrm{d}k. \tag{43}$$

Pe peretele superior ($z = 1$) efortul de forfecare τ_s are expresia

$$\tau_s = \tau|_{z=1} = \frac{2}{Re}\int_0^\infty k(C_4\,\mathrm{e}^{-k}\,C_2\,\mathrm{e}^{k})\,J_1(kr)\mathrm{d}k, \tag{44}$$

iar pe planul inferior ($z = -1$) efortul de forfecare τ_i va fi

$$\tau_i = \tau|_{z=-1} = \frac{2}{Re}\int_0^\infty k(C_4\mathrm{e}^{k} - C_2 e^{-k})\,J_1(kr)\mathrm{d}k. \tag{45}$$

Pentru o coroană circulară situată între razele r și $(r + \mathrm{d}r)$ se poate scrie, utilizînd variabilele dimensionale, relația

$$4\pi rw\,\mathrm{d}\bar{p} = 2\pi r(\tau_s + \tau_i)\mathrm{d}r, \tag{46}$$

care a fost obținută prin egalarea forței datorită căderii de presiune $d\bar{p}$ realizată pe lungimea razei dr cu forța de frecare pe fețele celor două suprafețe printre care se scurge fluidul viscos.

Dacă se utilizează și acum variabilele adimensionale, ultima ecuație se pune sub forma

$$dp = \frac{\tau_s + \tau_i}{2}\, dr. \tag{47}$$

Dacă se are în vedere expresiile eforturilor adimensionale τ_i și τ_s rezultă că ultima relație se mai scrie

$$dp = \int_0^\infty (C_4 - C_2)k(e^k + e^{-k})\, J_1(kr)\, dk\, dr. \tag{48}$$

Această relație poate fi integrată în raport cu variabila r și ținînd seama că presiunea variază între p și p_s se găsește

$$p - p_s = \int_0^\infty (C_2 - C_4)(e^k + e^{-k})\, [J_0(kr) - J_0(kr_s)]\, dk. \tag{49}$$

Diferența $C_2 - C_4$ are expresia

$$C_2 - C_4 = \tag{50}$$

$$= \frac{G(e^{2k} - e^{-2k})\left(\frac{e^{-2k} - e^{2k}}{2k} + 2\right) - (He^k - Ge^{-k})\left(2e^k - \frac{e^k}{2k} + \frac{e^{-3k}}{2k} + 2e^{-k} - \frac{e^{3k}}{2k} + \frac{e^{-k}}{2k}\right)}{4e^k - \frac{e^k}{k} + \frac{e^{-3k}}{k} + 1 + \frac{e^{2k} - e^{-2k}}{2k}\left(2e^{-k} - \frac{e^{3k}}{2k} + \frac{e^{-k}}{2k}\right)}$$

Dacă se consideră dezvoltarea în serie Taylor pentru funcția exponențială, considerîndu-se doar primii doi termeni ai dezvoltării, rezultă

$$C_2 - C_4 = -4k(H + G), \tag{51}$$

ceea ce face ca $(p - p_s)$ să se pună sub forma

$$p - p_s = -8\int_0^\infty k(H + G)[J_0(kr) - J_0(kr_s)]\, dk. \tag{52}$$

Avînd în vedere relațiile lui $h(r)$ și $g(r)$ rezultă imediat că prezența unor rugozități nedefinite pe pereții discului creează o cădere suplimentară de presiune între fețele sistemului de etanșare frontală

$$\Delta p = -8[h(\xi) + g(\xi)], \tag{53}$$

unde s-a notat

$$h(\xi) = \int_0^\infty kH[J_0(kr) - J_0(kr_s)]\,\mathrm{d}k, \tag{54}$$

ζ fiind un punct oarecare situat între r_s și r.
În mod similar se definește și $g(\xi)$.

Dacă s-ar cunoaște legea de variație a celor două rugozități relative $h(r)$ și $g(r)$, tot prin utilizarea relației de medie, care a condus la obținerea căderii de presiune suplimentare datorită prezenței rugozității (53), ar fi posibilă obținerea elementelor perturbate ale mișcării față de cele ale unei mișcări neperturbate.

În situația în care rugozitățile relative $h(r)$ și $g(r)$ ar fi nesemnificative ca mărime ar conduce la o cădere de presiune nulă, iar căderea de presiune ce s-ar realiza între piesele ce formează etanșarea frontală trebuie calculată cu relația (7).

Căderea suplimentară de presiune, datorată prezenței rugozităților, scrisă sub formă dimensională, are forma

$$\Delta p = \rho \frac{U^2}{2} 16 \frac{h(\xi)+g(\xi)}{w}. \tag{55}$$

În ultima relație s-a ales valoarea absolută a căderii de presiune și prin $h(\xi)$ și, respectiv, $g(\xi)$ s-au notat rugozitățile medii într-un punct de pe fiecare din cele două fețe ale etanșării.

Dacă se introduce notația $HG = [h(\xi) + g(\xi)]/2$, relația (55) se mai scrie

$$\Delta p = \rho \frac{U^2}{2} 32 \frac{HG}{w}. \tag{56}$$

Se consideră că în lungul întregii etanșări frontale căderea totală de presiune este dată de suma căderii de presiune calculată cu formula (7) și aceea datorită prezenței rugozității, relația (56).

Avînd în vedere și relația existentă între viteza U și debitul Q, rezultă, printr-un calcul simplu, formula acestuia :

$$Q = \frac{\pi w^3 \Delta p}{3\mu \ln \frac{r}{r_s}\left(1 + \frac{HG}{w} \cdot \frac{Ree}{\frac{r}{w}\ln\frac{r}{r_s}}\right)}. \tag{57}$$

În ultima formulă cu Δp s-a notat căderea de presiune care se exercită pe întreaga lungime a etanșării frontale iar cu *Ree* s-a definit numărul lui Reynolds cu ajutorul vitezei U și a lungimii $2w$.

Se observă cu ușurință pentru un anumit debit neetanșat numărul lui Reynolds *Ree* este variabil în lungul razei deoarece viteza U depinde de rază. Dacă rugozitatea medie a celor două fețe este neglijabil, debitul

de fluid are valoarea cea mai mare. Pe măsură ce rugozitatea se mărește, mișcarea fluidului fiind laminară, prezența rugozității la cel puțin una dintre suprafețele care formează etanșarea frontală, face să se reducă debitul de fluid scurs prin sistemul de etanșare.

Pentru valori foarte mari ale raportului r/r_s debitul de fluid scăpat prin sistemul de etanșare se reduce practic la zero.

5. COMPARAREA REZULTATELOR CU ACELEA DIN LITERATURĂ

Pentru a compara rezultatele obținute cu acelea din literatura de specialitate este necesar ca relația căderii de presiune realizată în lungul etanșării frontale să se scrie sub forma clasică

$$\Delta p = \rho \frac{U_m^2}{2} \cdot \frac{r - r_s}{2w} \lambda. \tag{58}$$

Cu λ s-a notat coeficientul de rezistență și s-a presupus că lungimea pe care se realizează căderea de presiune este $(r - r_s)$. Dacă se înlocuiește căderea de presiune și debitul în relația (57) se găsește expresia coeficientului de rezistență

$$\lambda = 144 \frac{r}{r - r_s} \left(Ree + \frac{HG}{w} \cdot \frac{w}{r \ln \frac{r}{r_s}} \right) \ln \frac{r}{r_s}. \tag{59}$$

Pe măsură ce se mărește raza r crește și coeficientul λ. În ceea ce privește rugozitatea echivalentă HG se observă că λ crește liniar cu acest parametru.

În cazul în care parametrul de rugozitate HG lipsește, se obține, tot cu ajutorul relației (59), coeficientul de rezistență pentru o etanșare frontală perfect netedă.

Cu toate că nu sînt comparabile, tot pentru o mișcare laminară și scurgere unidimensională, în lucrarea [1] același coeficient de rezistență este proporțional cu rugozitatea relativă a fisurii la puterea 1,5. Acolo rugozitatea relativă a fost definită în raport cu diametrul hidraulic al fisurii.

6. CONCLUZII

Mișcarea fluidului printr-un spațiu al etanșării frontale se poate asimila cu scurgerea fluidului printre două discuri circulare. În cazul unor suprafețe rugoase, gradul de rugozitate influențează căderea de presiune, deci și debitul pierdut prin sistemul de etanșare, care se produce în sistem. La creșterea gradului de rugozitate debitul de fluid se reduce față de situația unor suprafețe netede.

Debitul de fluid scurs prin etanșare depinde și de geometria etanșării.

Primită la redacție la 20 februarie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. CL. LOUIS, *Etude des écoulements d'eau dans les roches fissurées et de leurs influences sur la stabilité des massifs rocheux*, E.D.F. Buletin de la direction des études et recherches. Série A, Nucléaire, hydraulique, termique, *3* (1978).
2. E. O'NEILL, *The resistence to steady parallel viscous flows produced by small-scale boundary irregularities*, Chem. Eng. Science, **25**, 283–291 (1970).
3. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Sur les écoulements dans les fissures circulaires à parois perméables*, Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl., **24**, *2*, 175–189 (1979).
4. M. W. ROHSENOW, J. P. HARTNETT, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1973, p. 7(64)–7(72).
5. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1960, p. 53–54.
6. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 308–310, 512–513.

STUDIUL OSCILAȚIILOR DE TORSIUNE DIN TRANSMISIA UNUI AUTOMOBIL, PE UN MODEL VÎSCO-ELASTIC LINIAR CU DOUĂ MASE

II. Determinarea soluției *)

de N. TRUICĂ
ICPITMUA, București

E. SOÓS
INCREST, București

În lucrare se determină soluția completă în cazul general al sistemelor elastice oscilante liniare cu frecare vîscoasă și cu 2 grade de libertate, avînd în vedere atît studiul influenței condițiilor inițiale, cît și natura arbitrară a amortizărilor vîscoase și a excitațiilor dinamice exterioare. Aparatul matematic folosit este cel al transformatei integrale a lui Laplace. Semnificația mecanică a modelului matematic și notația utilizată sînt precizate în prima parte a lucrării.

4. MODELUL CU 2 MASE. TEHNICA TRANSFORMATEI LAPLACE

Notațiile utilizate sînt cele folosite în prima parte a acestei lucrări. Pentru mai multă claritate reamintim sistemul de ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți (2.14) obținut în paragraful 2

$$\ddot{\varphi}_1 + 2h_1\dot{\varphi}_1 + 2\mu_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + p_1^2(\varphi_1 - \varphi_2) = f_1, \tag{4.1}$$

$$\ddot{\varphi}_2 + 2h_2\dot{\varphi}_2 + 2\mu_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + p_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) = f_2.$$

În (4.1) h_i, μ_i, p_i, $i = 1,2$, sînt constante date ale căror semnificație mecanică a fost precizată în prima parte a lucrării; f_i, $i = 1,2$, sînt funcții date de timpul t, avînd semnificația mecanică de asemenea precizată în partea întîia a acestei lucrări. Vom presupune că aceste funcții sînt suficient de regulate, pentru ca operațiile ce urmează să fie efectuate, să aibă sens bine determinat. În unele cazuri aceste funcții pot fi distribuții (vezi, de exemplu [6]), situație în care toate operațiile efectuate sînt considerate în sensul teoriei funcțiilor generalizate.

Sistemul (4.1) este completat cu condițiile inițiale

$$\varphi_1(0) = \varphi_1^0,\ \varphi_2(0) = \varphi_2^0,\ \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_1^0,\ \dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_2^0, \tag{4.2}$$

unde φ_i^0 și $\dot{\varphi}_i^0$, $i = 1,2$, sînt constante arbitrare date.

Pentru integrarea sistemului (4.1), (4.2) folosim tehnica transformatei Laplace în raport cu variabila independentă t [5], presupunînd că pentru $t < 0$ sistemul este în repaus.

*) Bibliografia este prezentată în prima parte a lucrării, St. cerc. mec. apl., TOM 44, NR 1(1985).

Dacă $f : R \to R$ este o funcție definită pe axa reală R, cu valori în R, nulă pe intervalul $(-\infty, 0)$ și cu creștere suficient de lentă cînd $t \to \infty$, transformata sa Laplace $F(s)$ se definește prin relația :

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \tag{4.3}$$

unde s este un număr complex avînd partea reală pozitivă, suficient de mare, pentru ca integrala improprie din (4.3) să aibă sens. Se arată că în condițiile de regularitate precizate, înversarea ecuației integrale (4.3) conduce la relația

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s)\,ds = \begin{cases} f(t) & \text{pentru } t > 0, \\ 0 & \text{pentru } t < 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

unde $s = x + iy$, $x, y \in R$, $x > 0$.

În vederea utilizării lor viitoare reamintim formulele următoare :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k f(0^+)}{dt^k} s^{n-k-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha), \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{L}[(f_1 \ast f_2)(t)] = F_1(s) F_2(s), \tag{4.7}$$

unde

$$(f_1 \ast f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t - \tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau)\,d\tau \tag{4.8}$$

reprezintă produsul de convoluție al funcțiilor f_1 și f_2.

Precizăm faptul că rezultatele de mai sus, cu modificările corespunzătoare, rămîn valabile și în cazul în care avem de a face cu distribuții definite pe spații de funcții suficient de regulate.

De asemenea, se poate arăta că au loc relațiile următoare :

$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s + \alpha}, \quad \mathfrak{L}[\sin \alpha t] = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \quad \mathfrak{L}[\cos \alpha t] = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}. \tag{4.9}$$

Din semnificația fizică a constantelor prezente în sistemul (4.1) rezultă că p_i sînt numere *reale*, iar h_i și μ_i satisfac inegalitățile

$$h_i \geqslant 0, \ \mu_i \geqslant 0, \ i = 1,2. \tag{4.10}$$

În cele ce urmează vom aplica sistemului (4.1), (4.2) operatorul lui Laplace £. Introducînd notațiile

$$\{\Phi_i(s),\ F_i(s)\} = \mathfrak{L}[\{\varphi_i(t),\ f_i(t)\}] = \int_0^\infty e^{-st}\{\varphi_i(t), f_i(t)\}\,dt \qquad (4.11)$$

și ținînd seama de relația (4.5), obținem sistemul de ecuații algebrice

$$(s^2 + 2\nu_1 s + p_1^2)\Phi_1 - (2\mu_1 s + p_1^2)\Phi_2 = \varphi_1^0 s + \dot{\varphi}_1^0 + 2\nu_1\varphi_1^0 - 2\mu_1\varphi_2^0 + F_1,$$

$$-(2\mu_2 s + p_2^2)\Phi_1 + (s^2 + 2\nu_2 s + p_2^2)\Phi_2 = \varphi_2^0 s + \dot{\varphi}_2^0 + 2\nu_2\varphi_2^0 - 2\mu_2\varphi_1^0 + F_2, \qquad (4.12)$$

unde

$$\nu_i = h_i + \mu_i,\ i = 1,2. \qquad (4.13)$$

Pentru simplificarea scrierii introducem notațiile

$$b_i = \varphi_i^0,\ a_1 = \dot{\varphi}_1^0 + 2\nu_1\varphi_1^0 - 2\mu_1\varphi_2^0,\quad a_2 = \dot{\varphi}_2^0 + 2\nu_2\varphi_2^0 - 2\mu_2\varphi_1^0, \qquad (4.14)$$

$$G_i = a_i + b_i s + F_i,\ i = 1,2.$$

Acum sistemul (4.12) capătă forma :

$$(s^2 + 2\nu_1 s + p_1^2)\Phi_1 - (2\mu_1 s + p_1^2)\Phi_2 = G_1,$$

$$-(2\mu_2 s + p_2^2)\Phi_1 + (s^2 + 2\nu_2 s + p_2^2)\Phi_2 = G_2. \qquad (4.15)$$

Pentru exprimare într-o formă simplă a soluției sistemului (4.15) introducem notațiile :

$$U = 2(\nu_1 + \nu_2),\ V = p^2 + 4(\nu_1\nu_2 - \mu_1\mu_2),\ W = 2(h_2 p_1^2 + h_1 p_2^2), \qquad (4.16)$$

$$\Delta(s) = s\delta(s),\ \delta(s) = s^3 + Us^2 + Vs + W,\ p^2 = p_1^2 + p_2^2. \qquad (4.17)$$

Din (4.10), (4.13) și (4.16) rezultă că sînt satisfăcute inegalitățile

$$U \geqslant 0,\ V \geqslant 0,\ W \geqslant 0. \qquad (4.18)$$

Notațiile introduse, împreună cu regula lui Kramer, ne permit să exprimăm soluția sistemului (4.15) în următoarea formă simplă :

$$\Phi_i = \Delta_i/\Delta, \qquad (4.19)$$

unde

$$\Delta_1 = (s^2 + 2\nu_2 s + p_2^2)G_1 + (2\mu_1 s + p_1^2)G_2, \tag{4.20}$$

$$\Delta_2 = (2\mu_2 s + p_2^2)G_1 + (s^2 + 2\nu_1 s + p_1^2)\, G_2.$$

Natura soluției sistemului (4.1), (4.2) este determinată de proprietățile funcției $\delta(s)$. Ecuația

$$\delta(s) = 0 \tag{4.21}$$

fiind de grad impar, are totdeauna o soluție reală. Vom nota cu $-s_0$ această rădăcină și vom introduce notațiile

$$E = (U - s_0)/2, \; F^2 = W/s_0 - E^2. \tag{4.22}$$

Acum $\delta(s)$ poate fi scris în forma

$$\delta(s) = (s + s_0)[(s + E)^2 + F^2], \tag{4.23}$$

la obținerea căreia am ținut seama de faptul că $-s_0$ este rădăcina ecuației (4.21).

În ele ce urmează *presupunem* că este satisfăcută inegalitatea

$$W/s_0 - E^2 > 0. \tag{4.24}$$

Cazul considerat corespunde situației în care influența forțelor de frecare este mică în comparație cu influența forțelor elastice. Cazurile în care inegalitatea (4.24) nu este satisfăcută pot fi tratate asemănător cu cel considerat, dar ele prezintă mai puțin interes în practică, deoarece nu corespund regimurilor reale de funcționare ale automobilelor.

Dacă relația (4.24) este satisfăcută, ecuația algebrică (4.21) are o *singură* rădăcină reală. Un calcul elementar arată că

$$\delta(0) = W > 0, \tag{4.25}$$

$$\delta(-U) = -2[h_1 p_1^2 + h_2 p_2^2 + 4(h_1 + h_2 + \mu_1 + \mu_2) \times$$

$$\times (h_1 h_2 + h_1 \mu_2 + h_2 \mu_1)] < 0.$$

În consecință unica rădăcină reală a ecuației (4.21) este *negativă* și au loc inegalitățile :

$$0 < s_0 < U. \tag{4.26}$$

Prin urmare, conform lui $(4.21)_1$ și $(4.26)_2$

$$E > 0. \tag{4.27}$$

Din $(4.22)_2$ și din ipoteza (4.24) rezultă că F este un număr *real;* vom presupune, fără a restrînge generalitatea că

$$F > 0. \tag{4.28}$$

Sistemul (4.1), (4.2) fiind liniar, putem aplica *principiul suprapunerii* efectelor pentru găsirea soluției. În consecință vom cerceta la început influența condițiilor inițiale asupra soluției și după aceea vom studia efectul excitațiilor dinamice exterioare.

5. INFLUENȚA CONDIȚIILOR INIȚIALE

Vom determina în continuare soluția generală a sistemului *omogen* (4.1), corespunzător cazului în care $f_1 = f_2 = 0$; condițiile inițiale sînt precizate de relațiile (4.2).

Din (4.14), (4.19) și (4.20), cu $F_1 = F_2 = 0$, după un calcul elementar găsim

$$\Delta\Phi_i = b_i s^3 + A_i s^2 + B_i s + C, \tag{5.1}$$

unde

$$A_1 = a_1 + 2b_1\nu_2 + 2b_2\mu_1, \qquad A_2 = a_2 + 2b_2\nu_1 + 2b_1\mu_2, \tag{5.2}$$

$$B_1 = b_1 p_2^2 + b_2 p_1^2 + 2a_1\nu_2 + 2a_2\mu_1, \qquad B_2 = b_2 p_1^2 + b_1 p_2^2 + 2a_2\nu_1 + 2a_1\mu_2$$

$$C = a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2.$$

Cu notațiile

$$M = C/W, \quad P_i = b_i - C/W, \quad Q_i = A_i - (CU)/W, \quad R_i = B_i - (CV)/W, \tag{5.3}$$

din (4.17) și (5.1) rezultă

$$\Phi_i = \frac{M}{s} + \frac{P_i s^2 + Q_i s + R_i}{s^3 + Us^2 + Vs + W}. \tag{5.4}$$

Fie, de asemenea,

$$e(s_0) = s_0^2 - 2Es_0 + E^2 + F^2 = (s_0 - E)^2 + F^2 > 0, \tag{5.5}$$

$$e(s_0)m_i = P_i s_0^2 - Q_i s_0 + R_i,$$

$$e(s_0)n_i = (Q_i - 2EP_i)s_0 + (E^2 + F^2)P_i - R_i, \tag{5.6}$$

$$e(s_0)q_i = [R_i - (E^2 + F^2)P_i]s_0 + (E^2 + F^2)Q_i - 2ER_i.$$

Cu notaţiile introduse, pe baza descompunerii (4.23) şi a relaţiei $(4.17)_1$ obţinem :

$$\frac{P_i s^2 + Q_i s + R_i}{s^3 + Us^2 + Vs + W} = \frac{P_i s^2 + Q_i s + R_i}{(s + s_0)[(s + E)^2 + F^2]} = \frac{m_i}{s + s_0} + \frac{n_i s + q_i}{(s + E)^2 + F^2}. \tag{5.7}$$

În consecinţă, din (5.4) şi (5.7), pentru transformata Laplace a soluţiei generale a sistemului omogen (4.1), corespunzătoare condiţiilor iniţiale (4.2), rezultă următoarea expresie :

$$\Phi_i = \frac{M}{s} + \frac{m_i}{s + s_0} + n_i \frac{s + E}{(s + E)^2 + F^2} + \frac{q_i - n_i E}{F} \frac{F}{(s + E)^2 + F^2}. \tag{5.8}$$

Rezultatul obţinut permite utilizarea directă a relaţiilor (4.6) şi (4.9). După aplicarea operatorului liniar $\mathfrak{L}^{-1}$, din (5.8) obţinem soluţia generală a sistemului omogen (4.1), corespunzătoare condiţiilor (4.2) în forma următoare :

$$\varphi_i(t) = M + m_i e^{-s_0 t} + n_i e^{-Et} \cos Ft + \frac{q_i - n_i E}{F} e^{-Et} \sin Ft. \tag{5.9}$$

Conform relaţiilor (4.26) şi (4.27) s_0 şi E sînt numere pozitive. Astfel, din (5.9) rezultă că *influenţa condiţiilor iniţiale*, abstracţie făcînd de o rotaţie rigidă neesenţială, *este exponenţial atenuată*. De aici rezultă în particular că în cazul unor excitaţii armonice în timp, după un interval temporal relativ mic, starea sistemului devine staţionară, fapt confirmat şi experimental. Evident, timpul necesar atenuării influenţei condiţiilor iniţiale şi stabilirii regimului staţionar este determinat de mărimea constantelor s_0 şi E şi scade odată cu creşterea valorilor numerice ale acestor cantităţi.

Reamintim că soluţia (5.9) satisface condiţiile

$$\varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_i^0. \tag{5.10}$$

De asemenea, din (5.9) rezultă că *mişcarea relativă* a sistemului este dată de relaţia :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (m_1 - m_2)e^{-s_0 t} + (n_1 - n_2)e^{-Et} \cos Ft + \frac{q_1 - q_2 - (n_1 - n_2)E}{F} e^{-Et} \sin Ft. \tag{5.11}$$

Pentru calculul numeric al coeficienților ce apar în (5.11) pot fi utilizate relațiile (5.6), împreună cu formulele :

$$P_1 - P_2 = \varphi_1^0 - \varphi_2^0, \tag{5.12}$$

$$Q_1 - Q_2 = \dot{\varphi}_1^0 - \dot{\varphi}_2^0 + 2(\nu_1 + \nu_2)(\varphi_1^0 - \varphi_2^0),$$

$$R_1 - R_2 = 2(h_2\dot{\varphi}_1^0 - h_1\dot{\varphi}_2^0) + 4(h_1h_2 + h_1\mu_2 + h_2\mu_1)(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)$$

În încheiere accentuăm faptul că din structura soluției (5.9) urmează nemijlocit că F reprezintă *frecvența proprie* a sistemului oscilant considerat.

6. INFLUENȚA EXCITAȚIILOR DINAMICE EXTERIOARE

Vom determina în continuare o soluție particulară a sistemului neomogen (4.1), corespunzătoare unor excitații exterioare arbitrare f_i.

În acest caz, făcînd abstracție de termenii ce conțin cantități legate de condițiile inițiale, din (4.14), (4.19) și (4.20) obținem :

$$\Delta\Phi_1 = (s^2 + 2\nu_2 s + p_2^2)\,F_1 + (2\mu_1 s + p_1^2)\,F_2,$$

$$\Delta\Phi_2 = (2\mu_2 s + p_2^2)\,F_1 + (s^2 + 2\nu_1 s + p_1^2)\,F_2. \tag{6.1}$$

Fie

$$\bar{M}_1 = p_2^2/W, \quad \bar{P}_1 = -p_2^2/W, \quad \bar{Q}_1 = 1 - (p_2^2U)/W, \quad \bar{R}_1 = 2\nu_2 - (p_2^2V)/W,$$

$$\bar{M}_2 = p_1^2/W, \quad \bar{P}_2 = -p_1^2/W, \quad \bar{Q}_2 = 1 - (p_1^2U)/W, \quad \bar{R}_2 = 2\nu_1 - (p_1^2V)/W, \tag{6.2}$$

și

$$\Delta G_1(s) = s^2 + 2\nu_2 s + p_2^2, \quad \Delta G_2(s) = s^2 + 2\nu_1 s + p_1^2. \tag{6.3}$$

Repetînd calculele de la cazul precedent obținem :

$$G_i(s) = \frac{\bar{M}_i}{s} + \frac{\bar{m}_i}{s + s_0} + \bar{n}_i \frac{s + E}{(s+E)^2 + F^2} + \frac{\bar{q}_i - \bar{n}_i E}{F} \frac{F}{(s + E)^2 + F^2}. \tag{6.4}$$

Constantele $\bar{m}_i$, $\bar{n}_i$, $\bar{q}_i$ se obțin din $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_i$, $\bar{R}_i$ prin intermediul relațiilor (5.6), în care se face înlocuirea lui m_i, n_i, q_i cu $\bar{m}_i$, $\bar{n}_i$, $\bar{q}_i$ și a lui P_i, Q_i, R_i cu $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_i$, $\bar{R}_i$.

Din (6.4) pentru preimaginile Laplace g_i ale funcțiilor G_i, obținem următoarele expresii :

$$g_i(t) = \bar{M}_i + \bar{m}_i e^{-s_0 t} + \bar{n}_i e^{-Et} \cos Ft + \frac{\bar{q}_i - \bar{n}_i E}{F} e^{-Et} \sin Ft. \tag{6.5}$$

Se verifică prin calcul direct că sînt satisfăcute relaţiile :

$$g_i(0) = 0,\ \dot{g}_i(0) = 0. \tag{6.6}$$

Fie acum

$$\hat{M}_i = p_i^2/W,\ \hat{P}_i = -p_i^2/W,$$

$$\hat{Q}_i = -(p_i^2 U)/W,\ \hat{R}_i = 2\mu_i - (p_i^2 V)/W \tag{6.7}$$

şi

$$\Delta H_i(s) = 2\mu_i s + p_i^2. \tag{6.8}$$

Repetînd calculele efectuate deja de două ori, obţinem :

$$H_i(s) = \frac{\hat{M}_i}{s} + \frac{\hat{m}_i}{s + s_0} + \hat{n}_i \frac{s + E}{(s + E)^2 + F^2} + \frac{\hat{q}_i - \hat{n}_i E}{F} \frac{F}{(s + E)^2 + F^2}. \tag{6.9}$$

Ca şi mai înainte, constantele $\hat{m}_i$, $\hat{n}_i$, $\hat{q}_i$ se calculează din $\hat{P}_i$, $\hat{Q}_i$, $\hat{R}_i$ pe baza relaţiilor (5.6), efectuînd evident modificările corespunzătoare.

Din (6.9), pentru preimaginile Laplace h_i ale funcţiilor H_i, obţinem :

$$h_i(t) = \hat{M}_i + \hat{m}_i e^{-s_0 t} + \hat{n}_i e^{-Et} \cos Ft + \frac{\hat{q}_i - \hat{n}_i E}{F} e^{-Et} \sin Ft. \tag{6.10}$$

Se verifică prin calcul direct că sînt satisfăcute relaţiile :

$$h_i(0) = 0,\ \dot{h}_i(0) = 0. \tag{6.11}$$

Din (6.1), (6.3) şi (6.8) obţinem pentru transformatele Laplace Φ_i următoarele expresii :

$$\Phi_1(s) = G_1(s)F_1(s) + H_1(s)F_2(s),\ \Phi_2(s) = H_2(s)F_1(s) + G_2(s)F_2(s). \tag{6.12}$$

Aplicarea teoremei de convoluţie (4.7), (4.8), în relaţiile precedente, ne conduce la următoarea formă a soluţiei particulare a sistemului neomogen (4.1) :

$$\varphi_1(t) = \int_0^t f_1(\tau) g_1(t - \tau) d\tau + \int_0^t f_2(\tau) h_1(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t g_1(\tau) f_1(t - \tau) d\tau + \int_0^t h_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \tag{6.13}$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, h_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t f_2(\tau) g_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^t h_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t g_2(\tau)\, f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Soluția completă a sistemului (4.1), (4.2) se obține prin *adunarea* relațiilor furnizate de relațiile (5.9) și (6.13). Astfel integrarea sistemului (4.1), (4.2) în cazul general a fost principial rezolvată, evident în măsura în care integralele din (6.13) pot fi calculate. Este clar că acest lucru este posibil numai în cazuri particulare, din care unele vor fi analizate în continuare.

7. INFLUENȚA EXCITAȚIILOR EXTERIOARE ARMONICE

Vom analiza la început cazul unei *excitații motor* cu frecvență și amplitudine bine determinate. Problema unei excitații mai generale, cu caracter periodic în timp ,poate fi tratată utilizînd tehnica dezvoltării în serie Fourier și folosind pentru fiecare componentă a spectrului rezultatul ce se va prezenta mai jos, făcînd apel desigur și la principiul suprapunerii efectelor.

Vom presupune că au loc relațiile :

$$f_1(t) = r\,\cos\,(\omega t - \alpha),\; f_2(t) = 0, \tag{7.1}$$

unde amplitudinea r, frecvența ω și defazajul α sînt cantități constante date. Cazul complementar :

$$f_1(t) = 0,\; f_2(t) = R\,\cos\,(\Omega t - \beta)$$

se studiază analog, iar rezultatele corespunzătoare acestei situații se obțin din cazul ce va fi analizat mai jos, prin schimbarea rolului funcțiilor φ_1 și φ_2, deci a indicilor 1 și 2.

Din (6.13) obținem :

$$\varphi_1(t) = r \int_0^t g_1(\tau)\,\cos\,[\omega(t-\tau) - \alpha]\mathrm{d}\tau,$$

$$\varphi_2(t) = r \int_0^t h_2(\tau)\cos\,[\omega(t-\tau) - \alpha]\mathrm{d}\tau, \tag{7.2}$$

sau, cu (6.5) și (6.10), avînd în vedere numai deformația $\varphi_1 - \varphi_2$, vom găsi :

$$r^{-1}(\varphi_2 - \varphi_1) = (\bar{M}_1 - \hat{M}_2)\int_0^t \cos\,[\omega(t-\tau) - \alpha]\mathrm{d}\tau +$$

$$+(\bar{m}_1 - \hat{m}_2)\int_0^t \mathrm{e}^{-s_0\tau}\cos\,[\omega(t-\tau) - \alpha]\,\mathrm{d}\tau + \tag{7.3}$$

$$+ (\bar{n}_1 - \hat{n}_2)\int_0^t \mathrm{e}^{-E\tau}\cos F\tau\cos[\omega(t-\tau) - \alpha]\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ [(\bar{q}_1 - \hat{q}_2) - (\bar{n}_1 - \hat{n}_2)E]F^{-1}\int_0^t \mathrm{e}^{-E\tau}\sin F\tau\cos[\omega(t-\tau) - \alpha]\mathrm{d}\tau.$$

Înainte de a trece la calcularea integralelor, observăm că din (6.2) și (6.7) rezultă următoarele relații utile în calcul

$$\bar{M}_1 - \hat{M}_2 = 0,\ \bar{P}_1 - \hat{P}_2 = 0,\ \bar{Q}_1 - \hat{Q}_2 = 1,\quad \bar{R}_1 - \hat{R}_2 = 2h_2, \tag{7.4}$$

de unde, cu utilizarea formulelor de tip (5.6), obținem :

$$\bar{m}_1 - \hat{m}_2 = \frac{-s_0 + 2h_2}{e(s_0)},\quad \bar{n}_1 - \hat{n}_2 = \frac{s_0 - 2h_2}{e(s_0)},$$

$$\bar{q}_1 - \hat{q}_2 = \frac{2h_2 s_0 - 4h_2 E + W/s_0}{e(s_0)} = \frac{4h_2 s_0 - 2h_2 U + W/s_0}{e(s_0)}. \tag{7.5}$$

Conform relației $(7.4)_1$, primul termen din membrul drept al egalității (7.3) nu va figura în expresia finală a deformației.

În vederea calculării celor trei integrale prezente în (7.3) vom utiliza următoarele formule [7] :

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}. \tag{7.6}$$

Utilizarea relațiilor (7.6), după un calcul lung, conduce la următoarele expresii pentru integralele care figurează în egalitatea (7.3)

$$\int_0^t e^{-s_0\tau}\cos[\omega(t-\tau)-\alpha]d\tau = \frac{e^{-s_0 t}}{s_0^2+\omega^2}(-s_0\cos\alpha+\omega\sin\alpha)+$$

$$+\frac{1}{s_0^2+\omega^2}[s_0\cos(\omega t-\alpha)+\omega\sin(\omega t-\alpha)],$$

$$2\int_0^t e^{-E\tau}\sin F\tau\cos[\omega(t-\tau)-\alpha]d\tau =$$

$$=-e^{-Et}\left[\frac{E\sin(Ft+\alpha)+(F+\omega)\cos(Ft+\alpha)}{E^2+(F+\omega)^2}+\frac{E\sin(Ft-\alpha)+(F-\omega)\cos(Ft-\alpha)}{E^2+(F-\omega)^2}\right]+$$

$$+\left[\frac{F+\omega}{E^2+(F+\omega)^2}+\frac{F-\omega}{E^2+(F-\omega)^2}\right]\cos(\omega t-\alpha)+$$

$$+\left[\frac{E}{E^2+(F-\omega)^2}-\frac{E}{E^2+(F+\omega)^2}\right]\sin(\omega t-\alpha),$$

$$2\int_0^t e^{-E\tau}\cos F\tau\cos[\omega(t-\tau)-\alpha]\,d\tau = \tag{7.7}$$

$$=e^{-Et}\left[\frac{-E\cos(Ft+\alpha)+(\omega+F)\sin(Ft+\alpha)}{E^2+(F+\omega)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{-E\cos(Ft-\alpha)-(\omega-F)\sin(Ft-\alpha)}{E^2+(\omega-F)^2}\right]+$$

$$+\left[\frac{E}{E^2+(\omega+F)^2}+\frac{E}{E^2+(\omega-F)^2}\right]\cos(\omega t-\alpha)+$$

$$+\left[\frac{\omega+F}{E^2+(\omega+F)^2}+\frac{\omega-F}{E^2+(\omega-F)^2}\right]\sin(\omega t-\alpha).$$

Din relațiile (7.7) rezultă că soluția are o parte care se atenuează exponențial și în consecință după un timp relativ mic poate fi neglijată în comparație cu aceea parte a soluției ce are caracter periodic și care este specifică funcționării sistemului în *regim staționar*. În consecință vom

studia în continuare doar influenţa excitaţiei exterioare periodice asupra deformaţiei în regim staţionar, cu alte cuvinte vom lua în consideraţie numai acele părţi ale integralelor (7.7) în care nu apar factori exponenţiali. Vom căuta deformaţia $\varphi_1 - \varphi_2$ în forma :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = rf \cos(\omega t - \alpha - \beta), \tag{7.8}$$

în care f este *factorul de reducere* al răspunsului, iar β caracterizează *defazajul* răspunsului căutat.

Fie

$$D = [E^2 + (F + \omega)^2][E^2 + (F - \omega)^2]. \tag{7.9}$$

Din (7.3), (7.7) şi (7.8) obţinem

$$f\sin\beta = \frac{\omega}{s_0^2 + \omega^2}(\bar{m}_1 - \hat{m}_2) + \frac{2E\omega}{D}(\bar{q}_1 - \hat{q}_2) + \frac{[\omega^2 - (E^2 + F^2)]\omega}{D}(\bar{n}_1 - \hat{n}_2), \tag{7.10}$$

$$f\cos\beta = \frac{s_0}{s_0^2 + \omega^2}(\bar{m}_1 - \hat{m}_2) + \frac{E^2 + F^2 - \omega^2}{D}(\bar{q}_1 - \hat{q}_2) + \frac{2E\omega}{D}(\bar{n}_1 - \hat{n}_2).$$

În cazul în care constantele de material caracteristice sistemului sînt cunoscute, relaţiile (7.10) pot fi utilizate pentru calcularea numerică a influenţei excitaţiei asupra sistemului, în regim staţionar, deci după un timp suficient de lung pentru ca aproximaţia consideratã să fie satisfăcătoare. Fără ipoteze suplimentare, privind ordinul de mărime al diferitelor constante care intervin în calcul, formulele (7.10) nu pot fi simplificate.

8. INFLUENŢA MOMENTULUI REZISTENT DE TIP DIRAC

Vom soluţiona în continuare cazul în care asupra sistemului acţionează la un moment dat $t = a > 0$ un moment rezistent de tip *impuls*, reprezentabil printr-o distribuţie Dirac şi avînd intensitatea caracterizată de o constantă dată K. Vom avea deci :

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = K\delta(t - a), \tag{8.1}$$

unde cu δ am desemnat funcţia generalizată a lui Dirac şi am presupus că suportul său este concentrat în punctul $t = a$.

Din relaţiile (6.13), pe baza lui (8.1) obţinem :

$$\varphi_1(t) = K\int_0^t \delta(\tau - a)\, h_1(t - \tau)\mathrm{d}\tau, \quad \varphi_2(t) = K\int_0^t \delta(\tau - a) g_2(t - \tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.2}$$

Relațiile (8.2) trebuie să fie privite în sensul teoriei distribuțiilor, prin urmare semnul integral indică de fapt aplicarea funcționalei lui Dirac asupra funcțiilor h_1 și g_2.

Avînd în vedere faptul că suportul lui $\delta(t-a)$ este concentrat în punctul $t=a$ și ținînd seama de relațiile (6.5) și (6.9), din (8.2) rezultă :

— în intervalul de timp $[0, a)$:

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = 0 ; \tag{8.3}$$

— în intervalul de timp (a, ∞) :

$$K^{-1}\varphi_1(t) = \hat{M}_1 + \hat{m}_1 e^{-s_0(t-a)} + \hat{n}_1 e^{-E(t-a)} \cos F(t-a) +$$

$$+ (\hat{q}_1 - \hat{n}_1 E)F^{-1} e^{-E(t-a)} \sin F(t-a), \tag{8.4}$$

$$K^{-1}\varphi_2(t) = \bar{M}_2 + \bar{m}_2 e^{-s_0(t-a)} + \bar{n}_2 e^{-E(t-a)} \cos F(t-a) +$$

$$+ (\bar{q}_2 - \bar{n}_2 E)F^{-1} e^{-E(t-a)} \sin F(t-a).$$

Dacă ținem seama de relațiile (5.5), (5.6), (6.2), (6.7), (8.3) și (8.4), putem conchide că soluția găsită are următoarele proprietăți :

$$\lim_{\substack{t\to a \\ t<a}} \varphi_i(t) = 0, \quad \lim_{\substack{t\to a \\ t>a}} \varphi_i(t) = 0, \tag{8.5}$$

$$\lim_{\substack{t\to a \\ t<a}} \dot{\varphi}_i(t) = 0, \quad \lim_{\substack{t\to a \\ t>a}} \dot{\varphi}_1(t) = 0, \quad \lim_{\substack{t\to a \\ t>a}} \dot{\varphi}_2(t) = K. \tag{8.6}$$

Prin urmare deformația $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ este *continuă* în momentul $t=a$ în care se aplică excitația de tip Dirac, în schimb viteza de variație a deformației $\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)$ suferă în acest moment un *salt* de *intensitate* K.

Fie

$$\xi(t) = c[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \tag{8.7}$$

răspunsul dinamic al sistemului, deci *solicitarea internă* care apare în urma aplicării excitației. Relația (8.5) arată că $\xi(t)$ *nu* își modifică valoarea la momentul $t=a$, în schimb, după cum rezultă din (8.6), variația în timp a acestei solicitări, deci $\dot{\xi}(t)$, are un salt brusc în momentul aplicării excitației de tip impuls. Dacă notăm acest salt, calculat la $t=a$, prin $[\dot{\xi}(t)](a)$ și facem uz de relațiile (2.14), $(8.1)_2$, (8.6) și (8.7), vom obține :

$$[\dot{\xi}(t)](a) = \lim_{\substack{t\to a \\ t>a}} \dot{\xi}(t) - \lim_{\substack{t\to a \\ t<a}} \dot{\xi}(t) = p_2^2 M_r^a = \frac{c}{J_2} M_r^a, \tag{8.8}$$

unde M_r^a reprezintă intensitatea momentului rezistent de tip Dirac, aplicat la momentul $t=a$. Relaţia (8.8) arată că intensitatea variaţiei în timp a solicitării interne poate depăşi cu mult intensitatea excitaţiei exterioare, ceea ce poate provoca deteriorarea sistemului solicitat brusc. Totuşi, formulele (8.4) arată că influenţa excitaţiei instantanee de tip Dirac scade exponenţial odată cu trecerea timpului şi în consecinţă dacă sistemul nu a fost deteriorat în momentul $t=a$, funcţionarea sa ulterioară va fi influenţată din ce în ce mai puţin de excitaţia aplicată.

9. INFLUENŢA MOMENTULUI REZISTENT DE TIP IMPULS SINUSOIDAL

Vom cerceta acum cazul în care asupra sistemului acţionează în intervalul de timp $[0, T]$ un moment rezistent de tipul unui impuls sinusoidal. Presupunem deci că excitaţiile exterioare sînt caracterizate de următoarele relaţii :

$$f_1(t)=0,\ f_2(t)=\begin{cases} A\sin\dfrac{\pi}{T}\,t & \text{pentru } 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0 & \text{pentru } T\leqslant t<\infty, \end{cases} \tag{9.1}$$

unde A şi T sînt constante pozitive date.

Conform formulelor generale (6.13), din (9.1) obţinem :

$$\varphi_1(t)=\int_0^t f_2(\tau)h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \varphi_2(t)=\int_0^t f_2(\tau)g_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{9.2}$$

În consecinţă, cu $(9.1)_2$ rezultă :

— în intervalul de timp $[0, T]$:

$$\varphi_1(t)=A\int_0^t \sin\frac{\pi}{T}\tau\, h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\ \varphi_2(t)=A\int_0^t \sin\frac{\pi}{T}\tau\, g_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau; \tag{9.3}$$

— în intervalul de timp $[T, \infty)$:

$$\varphi_1(t)=A\int_0^T \sin\frac{\pi}{T}\tau\, h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\ \varphi_2(t)=A\int_0^T \sin\frac{\pi}{T}\tau g_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{9.4}$$

La început ne vom ocupa cu *intervalul temporal* $0\leqslant t\leqslant T$. Fie

$$\xi(t)=c[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]. \tag{9.5}$$

Deoarece

$$\hat{M}_1=\bar{M}_2, \tag{9.6}$$

din formula generală rezultă :

$$A^{-1}c^{-1}\nu(t) = (\hat{m}_1 - \bar{m}_2)\ e^{-s_0 t}\int_0^t e^{s_0\tau}\ \sin\frac{\pi}{T}\tau d\tau +$$

$$+(\hat{n}_1 - \bar{n}_2)e^{-Et}\int_0^t e^{E\tau}\ \sin\frac{\pi}{T}\ \tau\ \cos F(t-\tau)d\tau + \qquad (9.7)$$

$$+ [(\hat{q}_1 - \bar{q}_2) - (\hat{n}_1 - \bar{n}_2)E]F^{-1}\,e^{-Et}\int_0^t e^{E\tau}\ \sin\frac{\pi}{T}\ \tau \sin F(t-\tau)d\tau.$$

Fie

$$D = [E^2 + (\pi/T + F)^2][E^2 + (\pi/T - F)^2]. \qquad (9.8)$$

Folosind formulele (7.6) și efectuînd calculele vom obține în final :

$$A^{-1}c^{-1}\xi(t) = (\hat{m}_1 - \bar{m}_2)\ \frac{s_0 \sin\frac{\pi}{T}t - \frac{\pi}{T}\cos\frac{\pi}{T}t}{s_0^2 + (\pi/T)^2} +$$

$$+ (\hat{m}_1 - \bar{m}_2)\frac{\pi/T}{s_0^2 + (\pi/T)^2}\ e^{-s_0 t} + \qquad (9.9)$$

$$+\frac{\hat{n}_1 - \bar{n}_2}{D}\left[E(E^2+(\pi/T)^2+F^2)\sin\frac{\pi}{T}t-(\pi/T)(E^2+(\pi/T)^2-F^2)\cos\frac{\pi}{T}t\right]+$$

$$+\frac{\hat{q}_1 - \bar{q}_2 - (\hat{n}_1 - \bar{n}_2)E}{D}\left[-2(\pi/T)E\cos\frac{\pi}{T}t+(E^2-(\pi/T)^2+F^2)\sin\frac{\pi}{T}t\right]+$$

$$+\frac{\hat{n}_1 - \bar{n}_2}{D}(\pi/T)[(E^2 + (\pi/T)^2 - F^2)\cos Ft - 2EF\sin Ft]e^{-Et} +$$

$$+\frac{\hat{q}_1 - \bar{q}_2 - (\hat{n}_1 - \bar{n}_2)E}{FD}(\pi/T)[(E^2+(\pi/T)^2-F^2)\sin Ft+2EF\cos Ft]\,e^{-Et}.$$

Desigur, această relație ca și cea care urmează, sînt utile în special în cazurile în care dispunem de valori numerice, situație ce conduce la o simplificare considerabilă a rezultatelor finale.

Vom prezenta acum expresia răspunsului dinamic în *intervalul temporal* $T \leqslant t < \infty$.

Procedînd ca mai înainte vom obţine în final :

$$A^{-1}c^{-1}\xi(t) = (\hat{m}_1 - \bar{m}_2)\frac{\pi/T}{s_0^2+(\pi/T)^2}(e^{-s_0(t-T)} + e^{-s_0 t}) +$$

$$+\frac{\hat{n}_1-\bar{n}_2}{D}(\pi/T)[-2EF\sin F(t-T)+(E^2+(\pi/T)^2-F^2)\cos F(t-T)]e^{-E(t-T)}+$$

$$+\frac{\hat{q}_1-\bar{q}_2-(\hat{n}_1-\bar{n}_2)E}{FD}(\pi/T)[(E^2+(\pi/T)^2-F^2)\sin F(t-T)+ \quad (9.10)$$

$$+2EF\cos F(t-T)]e^{-E(t-T)}+\frac{\hat{n}_1-\bar{n}_2}{D}(\pi/T)[-2EF\sin Ft+$$

$$+(E^2+(\pi/T)^2-F^2)\cos Ft]e^{-Et}+\frac{\hat{q}_1-\bar{q}_2-(\hat{n}_1-\bar{n}_2)E}{FD}(\pi/T)[(E^2+$$

$$+(\pi/T)^2-F^2)\sin Ft+2EF\cos Ft]e^{-Et}.$$

Din (9.9) şi (9.10) rezultă imediat că răspunsul dinamic satisface următoarele relaţii :

$$\lim_{\substack{t\to T\\ t<T}}\xi(t) = \lim_{\substack{t\to T\\ t>T}}\xi(t), \quad \lim_{t\to\infty}\xi(t) = 0. \qquad (9.11)$$

Prin urmare solicitarea internă produsă de o excitaţie de tip impuls-sinusoidal este continuă la momentul $t = T$, în care excitaţia exterioară îşi încetează acţiunea, şi intensitatea răspunsului dinamic scade exponenţial odată cu trecerea timpului. Desigur, ca şi în cazul excitaţiei impuls de tip Dirac, derivata temporală $\dot{\xi}(t)$ este discontinuă la momentul $t=T$.

10. INFLUENŢA FUNCŢIEI IMPULS A AMBREIERII

După cum rezultă din ecuaţia $(2.13)_1$ şi din consideraţiile prezentate în [8], în cazul în care asupra sistemului bimasic acţionează o solicitare corespunzătoare „funcţiei impuls a ambreierii" $Q(t)$, funcţiile $f_i(t)$ au următoarele expresii :

$$f_1(t) = \begin{cases} I_0 + I_1\cos(\lambda t+\alpha) & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{pentru } T \leqslant t < \infty, \end{cases} \quad f_2(t) = 0, \quad (10.1)$$

unde I_0, I_1, λ şi α sînt mărimi constante date, ce satisfac următoarele relaţii :

$$T\lambda = 3\pi/2 - \gamma,\ I_0 + I_1\cos\alpha = 0,\ I_0 + I_1\sin(\alpha-\gamma) = 0, \quad (10.2)$$

γ fiind o constantă de asemenea cunoscută. Relațiile $(10.2)_{2,3}$ exprimă faptul că „funcția impuls a ambreierii" $Q(t)$ se anulează atît la momentul inițial $t = 0$, cît și la momentul $t = T$.

Din formulele generale (6.13) și din forma (10.1) a excitației rezultă că răspunsul dinamic $\xi(t)$ este dat de următoarele relații :

— în intervalul de timp $[0, T]$:

$$\xi(t) = c\int_0^t [I_0 + I_1\cos(\lambda\tau + \alpha)][g_1(t-\tau) - h_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau; \qquad (10.3)$$

— în intervalul de timp $[T, \infty)$:

$$\xi(t) = c\int_0^T [I_0 + I_1\cos(\lambda\tau + \alpha)][g_1(t-\tau) - h_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau. \qquad (10.4)$$

Vom nota cu $\xi_0(t)$ acea parte a răspunsului care corespunde termenului constant I_0 ; după efectuarea calculelor vom obține :

— în intervalul de timp $[0, T]$:

$$I_0^{-1}c^{-1}\xi_0(t) = \frac{\bar{m}_1 - \hat{m}_2}{s_0}(1 - \mathrm{e}^{-s_0 t}) + \frac{\bar{q}_1 - \hat{q}_2}{E^2 + F^2}(1 - \mathrm{e}^{-Et}\cos Ft) +$$

$$+ \frac{1}{F}\left[(\bar{n}_1 - \hat{n}_2) - \frac{E}{E^2 + F^2}(\bar{q}_1 - \hat{q}_2)\right]\mathrm{e}^{-Et}\sin Ft; \qquad (10.5)$$

— în intervalul de timp $[T, \infty)$:

$$I_0^{-1}c^{-1}\xi_0(t) = \frac{\bar{m}_1 - \hat{m}_2}{s_0}(\mathrm{e}^{-s_0(t-T)} - \mathrm{e}^{-s_0 t}) + \frac{\bar{q}_1 - \hat{q}_2}{E^2 + F^2}(\mathrm{e}^{-E(t-T)}\cos F(t-T) -$$

$$- \mathrm{e}^{-Et}\cos Ft) + \frac{1}{F}\left[(\bar{n}_1 - \hat{n}_2) - \frac{E}{E^2 + F^2}(\bar{q}_1 - \hat{q}_2)\right](\mathrm{e}^{-Et}\sin Ft -$$

$$- \mathrm{e}^{-E(t-T)}\sin F(t-T)). \qquad (10.6)$$

Vom nota $\xi_1(t)$ acea parte a răspunsului care corespunde termenului armonic $I_1\cos(\lambda t + \alpha)$; conform formulelor generale, din (10.4) obținem :

— în intervalul de timp $[0, T]$:

$$c^{-1}I_1^{-1}\xi_1(t) = (\bar{m}_1 - \hat{m}_2)\,\mathrm{e}^{-s_0 t}\int_0^t \mathrm{e}^{s_0\tau}\cos(\lambda\tau + \alpha)\mathrm{d}\tau +$$

$$+ (\bar{n}_1 - \hat{n}_2)\, e^{-Et} \int_0^t e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \cos F(t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{\bar{q}_1 - \hat{q}_2 - (\bar{n}_1 - \hat{n}_2)E}{F}\, e^{-Et} \int_0^t e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \sin F(t-\tau)\, d\tau; \quad (10.7)$$

— în intervalul de timp $[T, \infty)$:

$$c^{-1} I_1^{-1} \xi_1(t) = (\bar{m}_1 - \hat{m}_2)\, e^{-s_0 t} \int_0^T e^{s_0 \tau} \cos(\lambda\tau + \alpha)\, d\tau +$$

$$+ (\bar{n}_1 - \hat{n}_2) e^{-Et} \int_0^T e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \cos F(t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{\bar{q}_1 - \hat{q}_2 - (\bar{n}_1 - \hat{n}_2)E}{F}\, e^{-Et} \int_0^T e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \sin F(t-\tau)\, d\tau. \quad (10.8)$$

Fără să efectuăm calculele pînă la capăt, vom prezenta doar valorile destul de complicate ale acelor integrale care intervin în relațiile (10.7) și (10.8); avem:

$$\int_0^t e^{s_0\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha)\, d\tau = \frac{1}{s_0^2 + \lambda^2}\, e^{s_0 t} [s_0 \cos(\lambda t + \alpha) + \lambda \sin(\lambda t + \alpha)] -$$

$$- \frac{1}{s_0^2 + \lambda^2} (s_0 \cos\alpha + \lambda \sin\alpha), \quad (10.9)$$

$$\int_0^t e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \cos F(t-\tau)\, d\tau = e^{Et} [E(E^2 + \lambda^2 + F^2) D^{-1} \cos(\lambda t + \alpha) +$$

$$+ \lambda(E^2 + \lambda^2 - F^2) D^{-1} \sin(\lambda t + \alpha)] - E(E^2 + \lambda^2 +$$

$$+ F^2) D^{-1} \cos Ft \cos\alpha + 2\lambda EF D^{-1} \sin Ft \sin\alpha + F(E^2 - \lambda^2 +$$

$$+ F^2) D^{-1} \sin Ft \cos\alpha - \lambda(E^2 + \lambda^2 - F^2) D^{-1} \cos Ft \sin\alpha, \quad (10.10)$$

$$\int_0^t e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \sin F(t-\tau)\, d\tau = e^{Et} [2\lambda EF D^{-1} \sin(\lambda t + \alpha) +$$

$$+ F(E^2 - \lambda^2 + F^2) D^{-1} \cos(\lambda t + \alpha)] - E(E^2 + \lambda^2 +$$

$$+ F^2)D^{-1} \sin Ft \cos \alpha - 2\lambda EFD^{-1} \cos Ft \sin \alpha - F(E^2 - \lambda^2 +$$

$$+ F^2)D^{-1} \cos Ft \cos \alpha - \lambda(E^2 + \lambda^2 - F^2)D^{-1} \sin Ft \sin \alpha, \tag{10.11}$$

$$\int_0^T e^{s_0 \tau} \cos(\lambda\tau + \alpha)\, d\tau = \frac{e^{s_0 T}}{s_0^2 + \lambda^2} [s_0 \cos(\lambda T + \alpha) + \lambda \sin(\lambda T + \alpha)] -$$

$$- \frac{1}{s_0^2 + \lambda^2} (s_0 \cos \alpha + \lambda \sin \alpha), \tag{10.12}$$

$$\int_0^T e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \cos F(t - \tau)\, d\tau = \frac{e^{ET}}{D} \{E(E^2 + F^2 + \lambda^2) \cos(\lambda t +$$

$$+ \alpha) \cos F(T - t) + 2\lambda EF \sin(\lambda t + \alpha) \sin F(T - t) + F(E^2 + F^2 -$$

$$- \lambda^2) \cos(\lambda T + \alpha) \sin F(T - t) + \lambda(E^2 - F^2 + \lambda^2) \sin(\lambda t +$$

$$+ \alpha) \cos F(T - t)\} + \frac{1}{D} \{ - E(E^2 + F^2 + \lambda^2) \cos \alpha \cos Ft - \lambda(E^2 -$$

$$- F^2 + \lambda^2) \sin \alpha \cos Ft + F(E^2 + F^2 - \lambda^2 \cos \alpha \sin Ft +$$

$$+ 2\lambda EF \sin \alpha \sin Ft\}, \tag{10.13}$$

$$\int e^{E\tau} \cos(\lambda\tau + \alpha) \sin F(t - \tau)\, d\tau = \frac{e^{ET}}{D} \{E(E^2 + F^2 + \lambda^2) \cos(\lambda T +$$

$$+ \alpha) \sin F(t - T) + 2\lambda EF \sin(\lambda T + \alpha) \cos F(t - T) + \lambda(E^2 - F^2 +$$

$$+ \lambda^2) \sin(\lambda t + \alpha) \sin F(t - T) + F(E^2 + F^2 - \lambda^2) \cos(\lambda T +$$

$$+ \alpha) \cos F(t - T)\} + \frac{1}{D} \{ - E(E^2 + F^2 + \lambda^2) \cos \alpha \sin Ft - \lambda(E^2 -$$

$$- F^2 + \lambda^2) \sin \alpha \sin Ft - F(E^2 + F^2 - \lambda^2) \cos \alpha \cos Ft -$$

$$- 2\lambda EF \sin \alpha \cos Ft\}, \tag{10.14}$$

$$\text{unde } D = [E^2 + (\lambda + F)^2][E^2 + (\lambda - F)^2]. \tag{10.15}$$

Desigur, relațiile obținute devin efectiv utile numai dacă dispunem de date numerice concrete, referitoare la caracteristicile geometrice, inerțiale și mecanice ale sistemului bimasic considerat.

În finalul considerațiilor noastre vom prezenta un astfel de caz concret.

11. EXEMPLU NUMERIC

Vom considera în încheiere cazul concret al transmisiei de forță a autocamionului SR 114. Constantele care figurează în ecuațiile (2.14) sau (4.1) sînt determinate de următoarele valori numerice :

$$J_1 = 0{,}6 \text{ kgm}^2;\ k_1 = 0{,}3 \text{ Nms};\ R = 0{,}5 \text{ Nms}, \tag{11.1}$$

$$J_2 = 0{,}7 \text{ kgm}^2;\ k_2 = 0{,}4 \text{ Nms};\ c = 10 \text{ Nm/rad}.$$

Am modelat procesul ambrierii, în cazul pornirii de pe loc cu treapta întîia de viteze, admițînd pentru viteza relativă expresia :

$$\dot{q}(t) = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_m = -A[1 + \sin(\lambda t + \gamma)], \tag{11.2}$$

pentru $t \in [0,\ T]$, în care

$$T = 1{,}05 \text{ s};\ \lambda = 4 \text{ rad/s};\ \lambda T + \gamma = \frac{3\pi}{2};\ A = 150 \text{ rad/s}.$$

Calculăm funcția ambreierii cu relația $(2.13)_3$, ținînd seamă de datele de mai sus ; obținem

$$Q(t) = \begin{cases} -45 - 45\sqrt{65}\ \cos\ (\lambda t + \alpha) & \text{pentru } t \in [0,\ T], \\ 0 & \text{pentru } t \geqslant T, \end{cases} \tag{11.3}$$

$$\alpha = \gamma - \beta;\ \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \in (0,\ \pi/2). \tag{11.4}$$

Avem, deci, $f_1(t) = Q(t)$; $f_2(t) = 0$.

Condițiile inițiale (2.15) sau (4.2) sînt următoarele :

$$\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0;\ \dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$$

$$\dot{\varphi}_m^0 = A(1 + \sin\ \gamma) \simeq 223 \text{ rad/s} \simeq 2135 \text{ rot/min}. \tag{11.5}$$

În vederea găsirii răspunsului dinamic $\xi(t) = c[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$ trebuie să utilizăm rezultatele expuse în paragrafele 4, 5 și 10 și să aplicăm principiul suprapunerii efectelor.

După calcule elementare obținem în final :

— pentru intervalul temporal $0 \leqslant t \leqslant 1{,}05$ s

$$\xi(t) = -10{,}35 - 5{,}91\ e^{-s_0 t} + 225{,}61\ e^{-1{,}04t} \cos\ (Ft - \delta) -$$

$$- 203{,}61 \cos\ (\lambda t + \alpha - \varepsilon)\ [\text{Nm}]; \tag{11.6}$$

— pentru intervalul temporal $t \geqslant 1{,}05$ s :

$$\xi(t) = 3{,}75 - 13{,}56\ e^{-s_0 t} + 490{,}85\ e^{-1{,}04t} \cos(Ft + \theta)\ [\mathrm{Nm}], \quad (11.7)$$

unde

$$s_0 = 0{,}5385\ \mathrm{rad/s};\ \delta = 0{,}2398\ \mathrm{rad},$$

$$F = 5{,}4653\ \mathrm{rad/s};\ \varepsilon = 0{,}4713\ \mathrm{rad},$$

$$\theta = 0{,}8475\ \mathrm{rad}.$$

F reprezintă pulsația proprie a sistemului oscilant (perioada oscilațiilor proprii are valoarea 1,15 s, respectiv frecvența proprie 0,87 Hz); răspunsul sistemului $\xi(t)$ este defazat în raport cu „funcția impuls a ambreierii" cu aproape $\pi/6$ radiani. Pentru caracterizarea completă a răspunsului și în special pentru determinarea valorii maxime a intensității interne în timpul ambreierii este necesară reprezentarea grafică a funcției $\xi(t)$ (fig. 11.1).

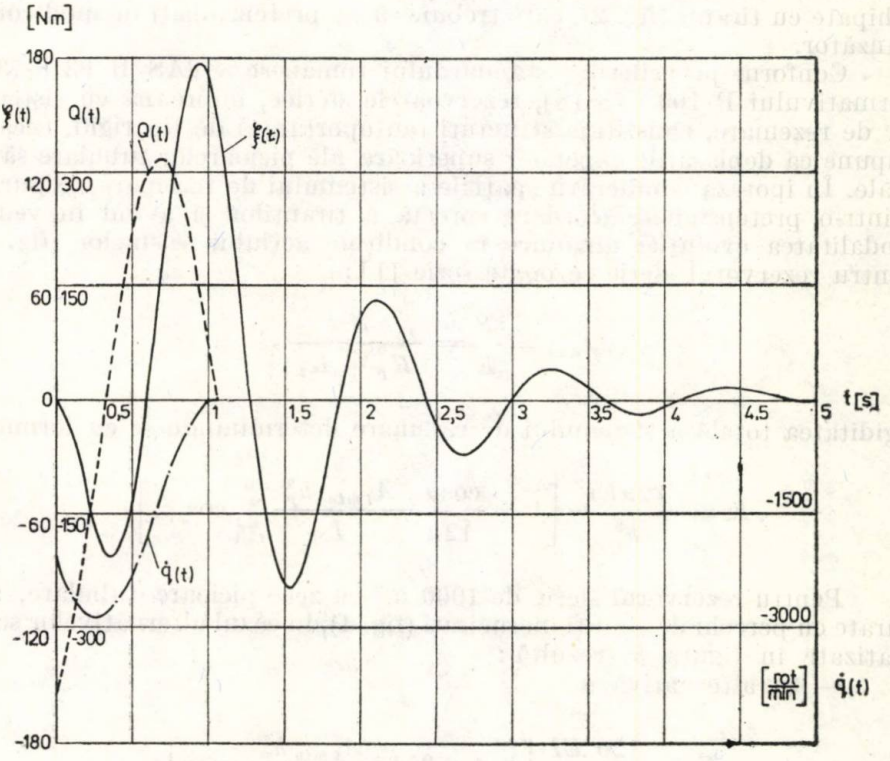


Fig. 11.1

Primită la redacție la 4 aprilie 1984

ASIGURAREA ANTISEISMICĂ A REZERVOARELOR SFERICE PRIN ACORDAREA TIRANȚILOR

de A. PAVEL, L. RIZEA, M. CULIN

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Se prezintă rezultatele principale ale studiilor și cercetărilor teoretico-experimentale, efectuate în ultimii ani, cu privire la comportarea dinamică a rezervoarelor sferice de mare capacitate pentru gaze lichefiate. În acest context, se fundamentează necesitatea acordării spațiale a tiranților sistemului de rezemare discretă, se precizează nivelul valoric al forței de pretensionare și se prezintă cîteva procedee și aparate, de concepție și realizare proprie, pentru rezolvarea practică — în condiții industriale, de șantier — a pretensionării și acordării tiranților, în vederea asigurării antiseismice a rezervoarelor sferice.

Rezervoarele sferice de mare capacitate (min. 1000 m^3) sînt sisteme de referință în depozitarea industrială a gazelor lichefiate tehnice (GLT). În concepția românească, rezervoarele respective sînt rezemate pe picioare tubulare verticale, sudate la manta în zona ecuatorială (fig. 1*a*) sau într-o zonă imediat subecuatorială (fig. 1*b*), rezemarea respectivă fiind, deci, de tip discret (discontinuu).

În scopul asigurării conlucrării spațiale a structurii metalice și a sistemului de rezemare, în situațiile dezvoltării unor acțiuni orizontale (seismice, eoliene, dinamice din explozii etc.), picioarele tubulare sînt echipate cu tiranți (fig. 2), care trebuie să fie pretensionați în mod corespunzător.

Conform prevederilor standardului românesc STAS R 9316-73 și normativului P 100—78 [8], rezervoarele sferice, împreună cu sistemul lor de rezemare, constituie structuri (autoportante) de tip rigid, ceea ce impune ca deplasările capetelor superioare ale picioarelor tubulare să fie egale. În ipoteza conlucrării spațiale a sistemului de rezemare, asigurată printr-o pretensionare-acordare corectă a tiranților și avînd în vedere modalitatea evoluției dinamice în condițiile acțiunii seismelor (fig. 3), pentru rezervorul sferic se poate scrie [1]:

$$x_{max} = \frac{S}{K} = \frac{S}{K_p + K_t}, \tag{1}$$

rigiditatea totală a sistemului de rezemare determinîndu-se cu formula:

$$K = \frac{12nEI}{h_p^3}\left[1 + \frac{\cos\alpha}{12n}\frac{A_{t\,min}\,h_p^2}{I}\sum_{i=1}^{n}\cos\beta_t\right]. \tag{2}$$

Pentru rezervorul sferic de 1000 m^3 cu zece picioare tubulare, asigurate cu perechi de tiranți încrucișați (fig. 4), în cazul alternativelor schematizate în figura 5, rezultă:

— în alternativa *a*:

$$K = \frac{120\,EI}{h_p^3}\left[1 + 0{,}054\,\frac{A_{t\,min}\,h_p^2}{I}\cos\alpha\right]; \tag{3}$$

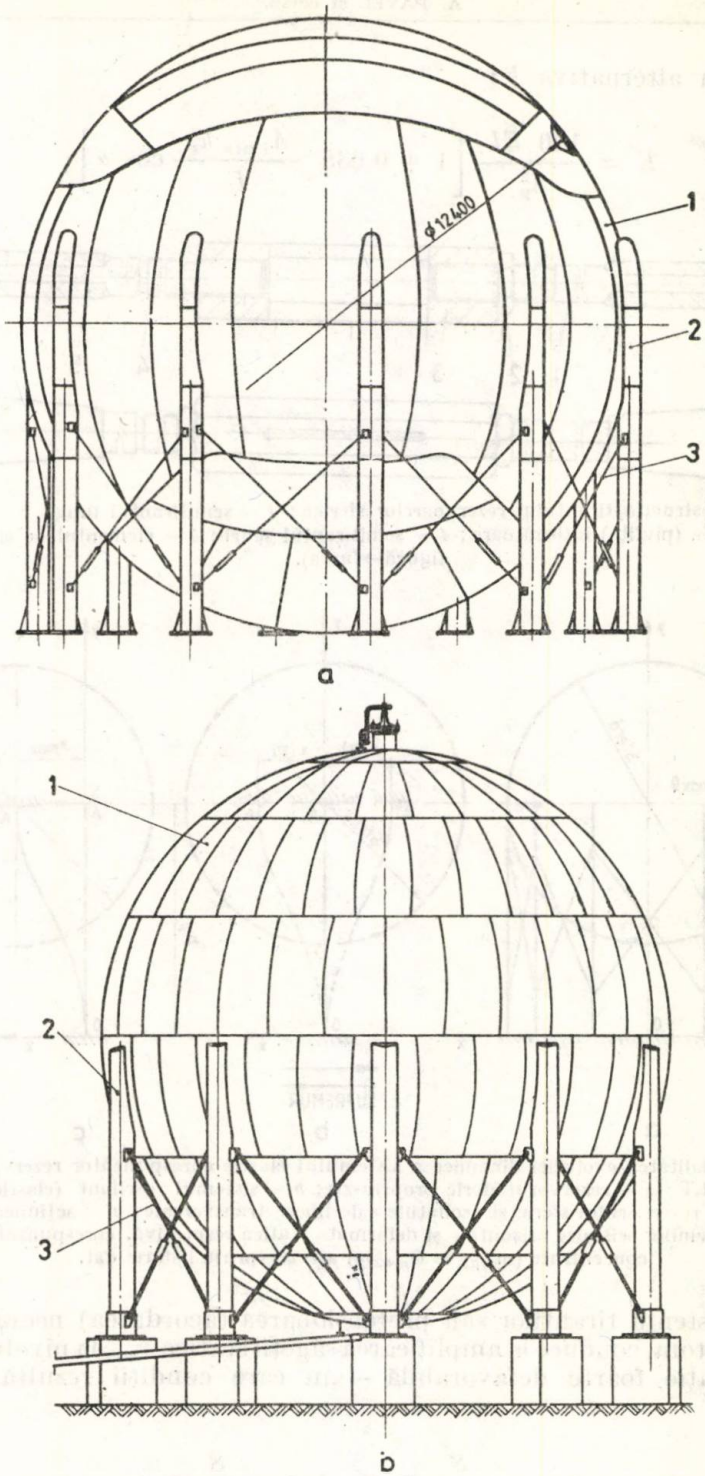


Fig. 1. — Rezervorul sferic de 1000 m³, rezemat discret : *a* — rezemarea ecuatorială a picioarelor tubulare ; *b* — rezemarea subecuatorială a picioarelor tubulare ; *1* — mantaua rezervorului ; *2* — piciorul tubular vertical ; *3* — tirantu l.

— în alternativa *b* :

$$K = \frac{120\ EI}{h_p^3}\left[1 + 0{,}035\ \frac{A_{t\,min}\ h_p^2}{I}\cos\ \alpha\right]. \qquad (4)$$

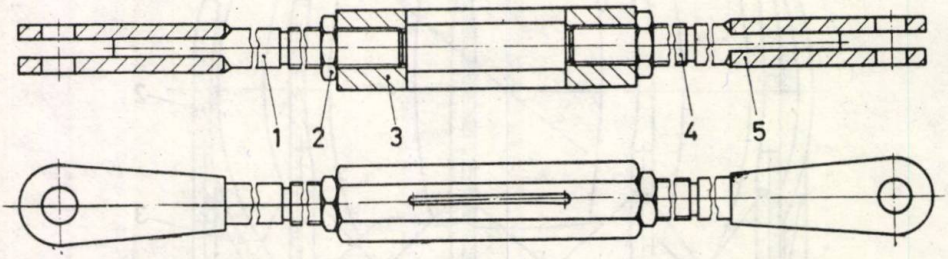


Fig. 2. — Construcţia tirantului rezervoarelor sferice : *1* — semitirantul lung ; *2* — contrapiuliţa ; *3* — mufa (piuliţa) întinzătoare ; *4* — semitirantul scurt ; *5* — elementul de articulare (în figură→furca).

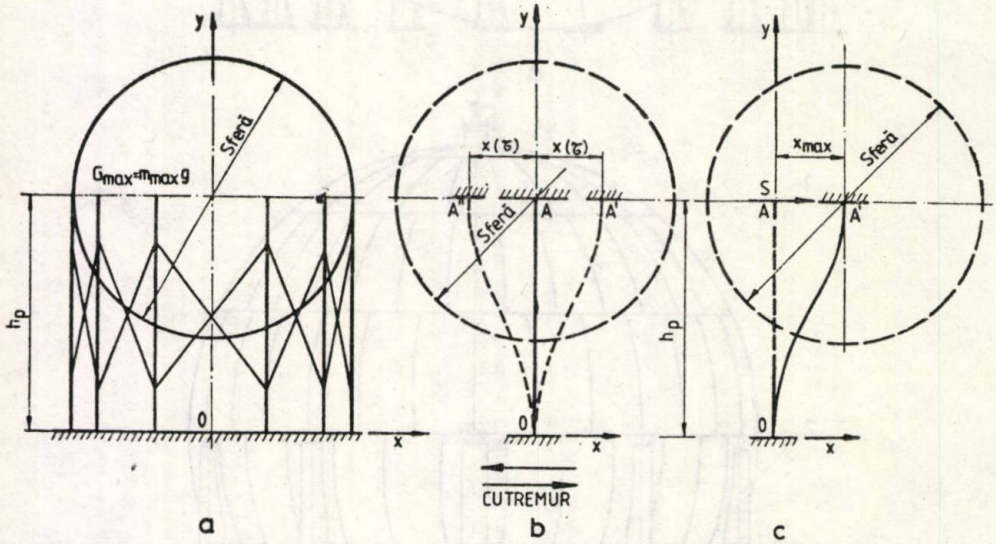


Fig. 3. — Modalitatea evoluţiei dinamice a sistemului elastic corespunzător rezervoarelor sferice pentru GLT : *a* — rezervorul sferic propriu-zis ; *b* — sistemul oscilant (elastic) de bază-corespunzător rezervorului sferic şi oscilaţiile sale libere transversale ; *c* — acţiunea statică a rezultantei sarcinilor seismice orizontale şi deformata statică respectivă, corespunzătoare masei concentrate ($m_{max} = G_{max}/g$) a rezervorului sferic dat.

Inexistenţa tiranţilor sau pretensionarea (acordarea) necorespunzătoare a acestora, conduce la amplificarea săgeţii statice x_{max} la nivelul ecuatorial — situaţie foarte defavorabilă —, în care condiţii rezultă (pentru $K_t = 0$) :

$$x_{max} = \frac{S}{K_p} \equiv x_{max}^{p} > \frac{S}{K_p + K_t}, \qquad (5)$$

demonstrîndu-se, astfel, necesitatea asigurării antiseismice a rezervoarelor sferice prin acordarea (corespunzătoare a) tiranţilor.

Acordarea tiranţilor este, de fapt, o lucrare de pretensionare, constînd în realizarea unei aceleiaşi forţe de întindere în toţi tiranţii, care se execută în diferite stadii (înainte sau după încercarea de presiune hidrau-

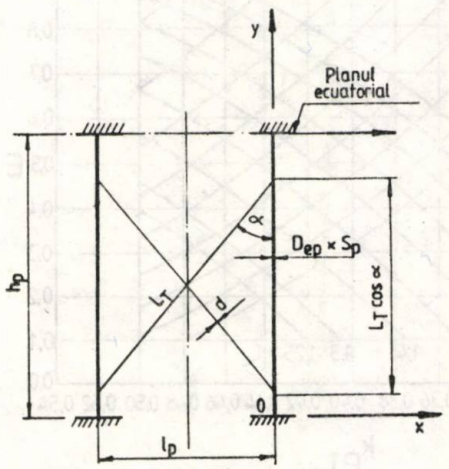


Fig. 4. — Schema privind geometria unei perechi de tiranţi a sistemului de rezemare al rezervorului sferic.

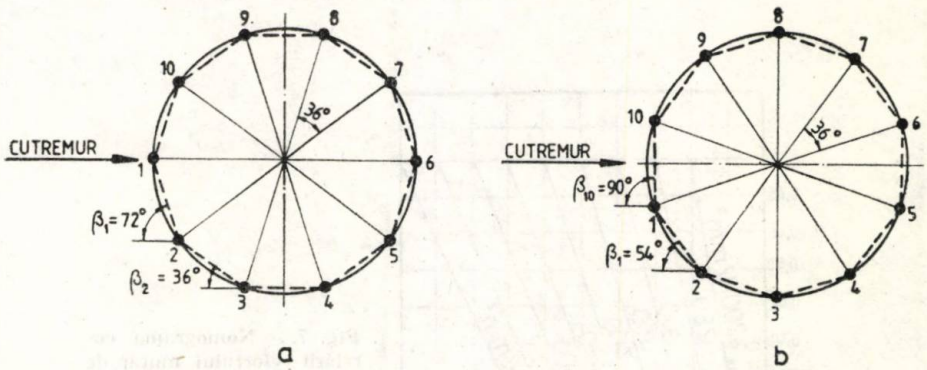


Fig. 5. — Variantele exemplificative (*a* şi *b*) de poziţionare extremală, faţă de direcţia cea mai defavorabilă a acţiunii seismice, a picioarelor tubulare ($n = 10$) ale rezervoarelor sferice.

lică, după evenimente deosebite în exploatare, la scadenţele de supraveghere tehnică) şi cu diverse mijloace, însă întotdeauna în conjunctura efectuării de studii şi control riguros privind evaluarea sarcinilor de pretensionare [2,3]. De la început trebuie precizat că pretensionarea tiranţilor se va realiza astfel, încît să fie îndeplinite simultan următoarele două condiţii fundamentale :

$$\sigma_{PT} \leqslant \sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c} = a\sigma_c < \sigma_c\,; \quad \sigma_{PT} > 0. \tag{6}$$

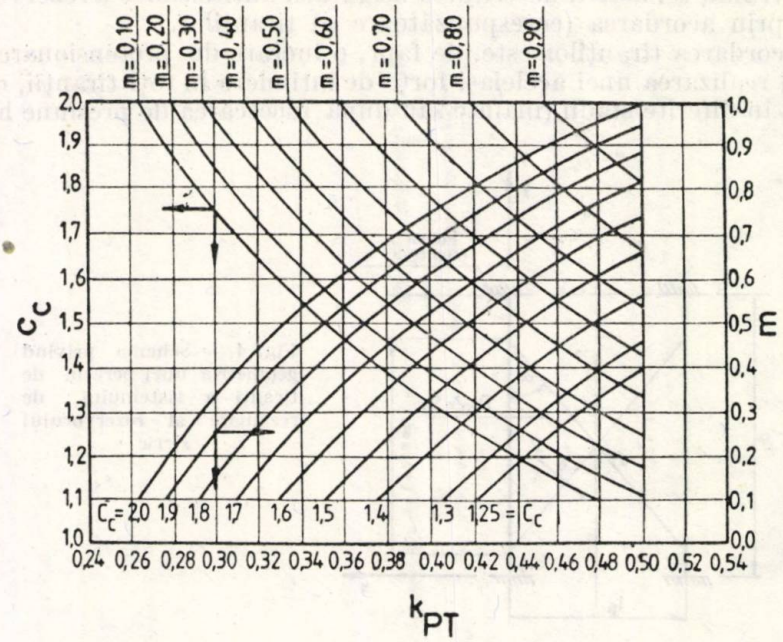


Fig. 6. — Nomograma coeficientului pretensionării $k_{PT} < 0{,}500$.

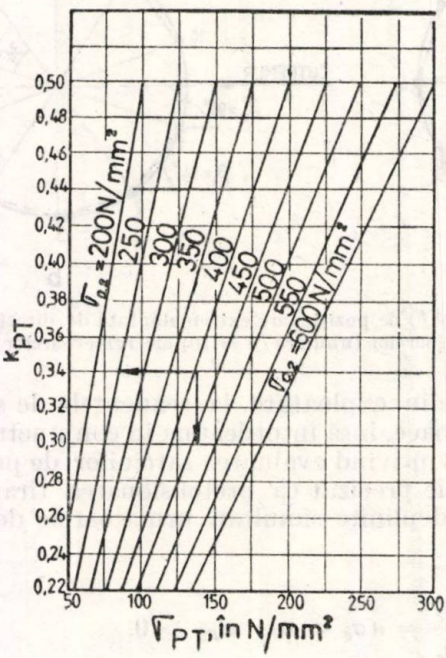


Fig. 7. — Nomograma corelării efortului unitar de pretensionare σ_{PT} cu limita tehnică de curgere a materialului de bază al tirantului şi cu coeficientul pretensionării.

În cazul general, cînd nu se fac diferenţieri din punctul de vedere al schemelor de solicitare a tiranţilor pentru ca tiranţii pretensionaţi iniţial să rămînă pretensionaţi (rezidual) şi în condiţiile de exploatare, este necesară îndeplinirea simultană a următoarelor condiţii restrictive [2,3]:

$$k_{PT} = \frac{1}{(2 - m)c_c} < 0{,}5\,; \tag{7}$$

$$\sigma_{PT} < 0{,}5\,\sigma_c\,; \tag{8}$$

$$\sigma_{max} < \frac{1 - m}{2 - m}\,\sigma_c. \tag{9}$$

Aşadar, tiranţii rezervoarelor sferice îşi pot îndeplini funcţia numai dacă efortul unitar de pretensionare σ_{PT} nu atinge 50% din limita tehnică de curgere σ_c a materialului lor de bază şi dacă, concomitent, efortul unitar maxim σ_{max} din tiranţi corespunde restricţiei (9).

În figurile 6 şi 7, pentru intervalele de interes practic ale coeficienţilor c_c şi m, se prezintă nomograma de calcul a coeficientului pretensionării $k_{PT} < 0{,}500$, respectiv — pentru $\sigma_c \in [200\,;\ 600]$ N/mm² şi $k_{PT} \in [0{,}22\,;\ 0{,}50]$ — ,nomograma de evaluare a efortului unitar de pretensionare σ_{PT}.

Atunci cînd se cunosc mărimile m şi σ_{max}, formulele finale de calcul, corespunzătoare rezervoarelor sferice cu rezemare discretă, asigurate antiseismic prin intermediul tiranţilor, sînt următoarele:

— pentru efortul unitar de pretensionare:

$$\sigma_{PT} = \frac{\sigma_{max}}{1 - m}\,; \tag{10}$$

— pentru forţa de pretensionare:

$$F_{PT} = 0{,}7854\ d^2\sigma_{PT}\,; \tag{11}$$

— pentru deformaţia specifică de pretensionare:

$$\varepsilon_{PT} = \frac{\sigma_{PT}}{E}. \tag{12}$$

Interpretarea grafică a formulelor (10)...(12) a permis construirea nomogramei din figura 8, cu ajutorul căreia se pot determina, rapid şi practic, mărimile necesare acordării tiranţilor unui rezervor sferic dat.

Practica acordării tiranţilor, în condiţiile existente pe platformele petrochimice — deţinătoare, în principal, de rezervoare sferice — necesită rezolvări conjuncturale într-un timp foarte scurt, în orice anotimp, cu aparatură accesibilă unui personal avînd calificare medie. Ca atare, s-au elaborat şase metode de pretensionare—acordare, unele fiind deja experi-

mentate și aplicate curent pe platformele petrochimice românești, iar altele fiind în experimentare de laborator la Institutul de Petrol și Gaze din Ploiești.

1. *ACORDAREA ELECTROTENSOMETRICĂ* are la bază metoda tensometriei electrice rezistive, care asigură determinarea indirectă a forței de pretensionare, respectiv evaluarea aceesteia prin intermediul măsurării efectelor sale, adică prin măsurarea deformațiilor de natura unor lungiri [4].

Pornind de la preceptele clasice ale teoriei elesticității, rezultă imediat deformația specifică de pretensionare :

$$\varepsilon_{PT} = \frac{4F_{PT}}{\pi E d^2}, \tag{13}$$

sau, în forma finală de operare practică ($E = 2{,}1 \cdot 10^5 \mathrm{N/mm^2}$),

$$\varepsilon_{PT} = 6{,}063 \cdot 10^{-6} \frac{F_{PT}}{d^2}. \tag{14}$$

La acordarea electrotensometrică se recomandă utilizarea sistemului de măsurare prin „metoda de zero" sau prin „punte echilibrată", care permite folosirea unor cutii de comutare simple, cu un număr mare de legături exterioare (pentru un rezervor sferic cu zece picioare tubulare și douăzeci de tiranți, sînt necesare pînă la circa 50 de puncte de racordare la aparatura de măsurare). Potrivit acestui sistem, deformația specifică rezultă din diferența indicațiilor punții tensometrice, adică :

$$\varepsilon_{PT} = i_1 - i_0. \tag{15}$$

Locul în care și direcția după care se aplică traductoarele tensometrice rezistive (TTR) active constituie o problemă importantă, deoarece indicația i_0 nu trebuie să fie afectată de acțiuni exterioare perturbatoare, cum ar fi atingerea reciprocă a tiranților, necoaxialitatea semitiranților, încovoierea sub acțiunea greutății proprii etc., care ar implica cumularea efectelor de încovoiere.

În scopul evitării efectelor nedorite ale încovoierii tiranților (fig. 9), traductoarele TTR active trebuie aplicate pe una din fețele laterale ale fiecărui tirant, după fibra medie neutră, care se găsește într-un plan vertical ce este tangent la suprafața laterală (fig. 10). Trasarea acestei fibre presupune etapele : a) cu tirantul în bolțuri, de suprafața sa laterală (în zona pregătită, mecanic și chimic, în vederea aplicării TTR), se alătură un fir cu plumb (fig. 11) ; firul va atinge tirantul în punctul său cel mai îndepărtat, situat pe o direcție perpendiculară la planul vertical ce trece prin axa tirantului respectiv, plan în care acționează și greutatea proprie ; b) deplasînd firul în sus și în jos, se obțin mai multe puncte care respectă condiția enunțată și prin unirea acestora se obține fibra medie neutră pentru încovoiere. Fibra astfel materializată se găsește într-un plan median, perpendicular atît pe planul vertical în care acționează greutatea proprie, cît și pe planul vertical în care se deplasează

firul cu plumb. În situaţia nedorită cînd aplicarea TTR activ s-ar face pe o direcţie ce formează un unghi $\varphi = 10°$ cu direcţia principală (axială) (fig. 12), eroarea de măsurare ar fi de circa 3% (în minus) ceea ce corespunde efectelor unei forţe de 5 000...6 000 N, în cazul cînd valoarea forţei totale de pretensionare F_{PT} este de circa $2 \cdot 10^5$ N (tirantul avînd diametrul de 50 mm).

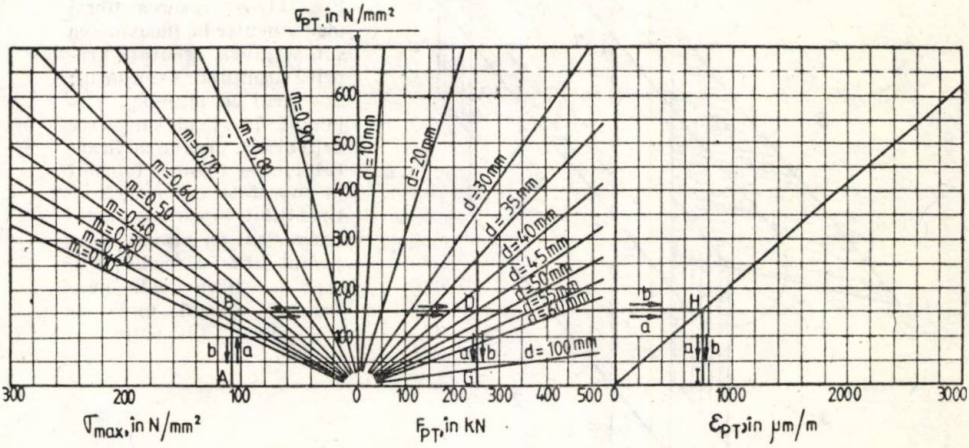


Fig. 8. — Nomograma pretensionării (acordării) tiranţilor rezervorului sferic.

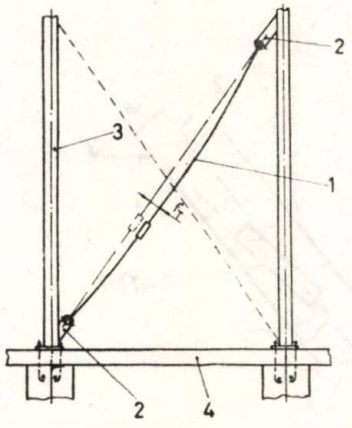


Fig. 9. — Săgeata tirantului sub acţiunea greutăţii sale proprii: *1* — tirantul; *2* — bolţurile; *3* — piciorul; *4* — inelul de beton armat.

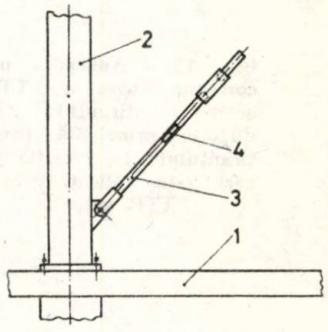


Fig. 10. — Aplicarea TTR activ pe faţa laterală a tirantului: *1* — inelul de beton armat; *2* — piciorul; *3* — tirantul; *4* — TTR activ.

Dacă, în urma montării defectuoase, tiranţii se ating, încovoindu-se reciproc, sau dacă semitiranţii sînt vizibil dezaxaţi, atunci se aplică cîte un traductor tensometric activ pe ambele feţe laterale (fig. 13), astfel că deformaţia specifică de pretensionare va fi:

$$\varepsilon_{PT} = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2}. \qquad (16)$$

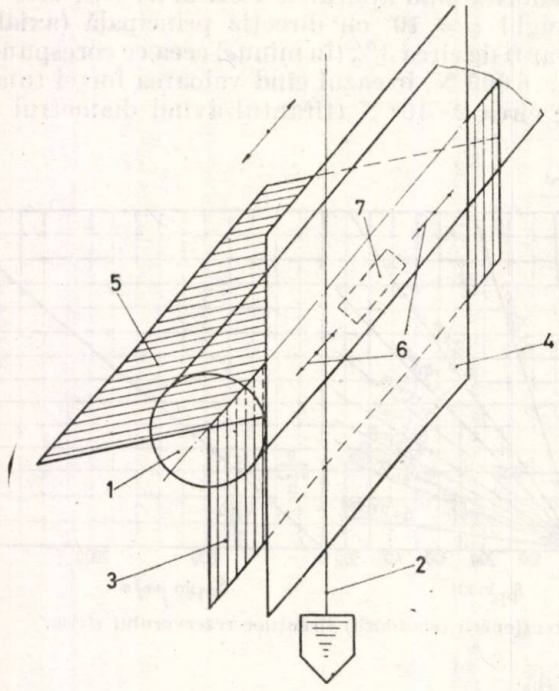


Fig. 11. — Trasarea fibrei medii neutre la încovoierea sub acţiunea greutăţii proprii a tirantului: *1*—tirantul; *2* — firul cu plumb; *3* — planul (vertical) în care acţionează greutatea tirantului; *4* — planul tangent la suprafaţa exterioară a tirantului, în care se deplasează firul cu plumb; *5* — planul fibrelor medii neutre; *6* — fibra medie neutră; *7* — locul unde se aplică TTR activ.

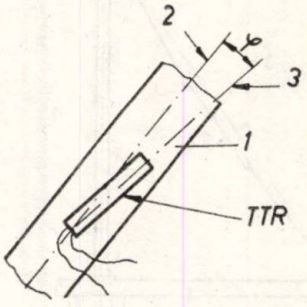


Fig. 12. — Aplicarea necorespunzătoare a TTR activ: *1* — tirantul; *2* — direcţia principală (axa) tirantului; *3* — direcţia pe care este aplicat, greşit, TTR activ.

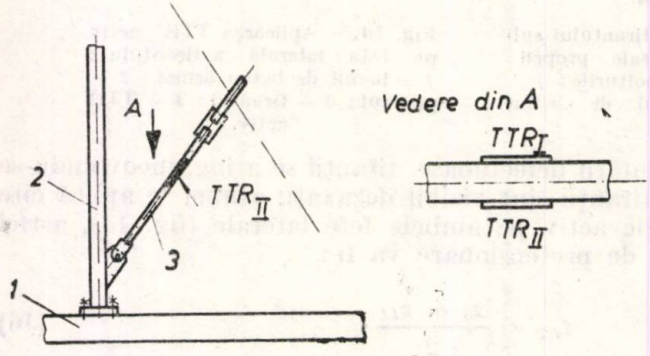


Fig. 13. — Aplicarea a două TTR active pe feţele laterale opuse ale tirantului: *1* — inelul de beton armat; *2* — piciorul; *3* — tirantul.

Compensarea efectului termic al mediului ambiant se realizează, de regulă, cu ajutorul unui traductor tensometric rezistiv de compensare, avînd caracteristicile identice cu ale TTR active. Traductorul TTR compensator se aplică pe o plăcuță (fig. 14) confecționată din materialul de bază al tirantului și se atașează liber, în apropierea TTR activ, fiind, deci, nesolicitat mecanic în același cîmp de temperatură.

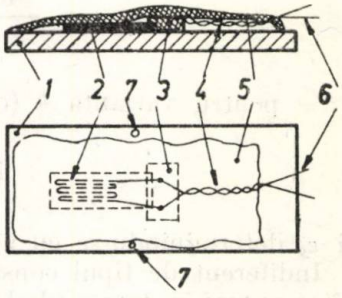


Fig. 14. — Plăcuța cu TTR de compensare: *1* — plăcuța; *2* — TTR de compensare; *3* — chitul izolator electric; *4* — contactul intermediar; *5* — chitul protector anticlimatic; *6* — capetele de conexiune ale contactului intermediar; *7* — orificiile de prindere a plăcuței pe tirant.

2. *ACORDAREA ELECTROREZISTIVĂ* se bazează pe utilizarea unui dispozitiv de tip captor, care convertește variațiile unei mărimi mecanice în semnale electrice proporționale cu variațiile respective [5]. La utilizarea practică a captoarelor, este necesar să se țină seama de caracteristicile lor constructive și funcționale, respectiv de sarcina nominală, curba de etalonare, sensibilitatea, precizia, fidelitatea etc. Alegerea tipului de captor se face în funcție de: natura sarcinii și variația acesteia în timp, durata măsurărilor etc., impunîndu-se restricții privind sensibilitatea transversală și limitarea influenței semnalului de ieșire, mai ales atunci cînd punctul de aplicație al sarcinii se schimbă. Protejarea captoarelor împotriva acțiunii agenților corosivi și a umidității excesive se asigură prin utilizarea de carcase etanșe sau de ecrane protectoare.

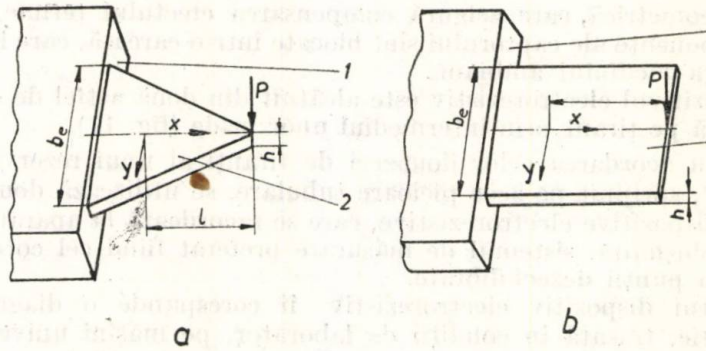


Fig. 15. — Tipurile de element sensibil (elastic) pentru captor: *a* — consola de egală rezistență; *b* — consola clasică; *1* — brida; *2* — elementul elastic propriu-zis.

O atenție deosebită se acordă elementului elastic, preponderență avînd materialul, rigiditatea și forma constructivă a acestuia. Constanta elastică k și deformațiile specifice ε au diverse expresii de definire [9; 10], fiind dependente de forma constructivă a elementului elastic. Astfel (fig. 15):

— pentru varianta *a* (consolă de egală rezistenţă la încovoiere):

$$k = \frac{E\, b_e h^3}{6\, l^3}, \tag{17}$$

$$\varepsilon_x = \frac{6Pl}{E\, b_e h^2} \quad \text{şi} \quad \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_x; \tag{18}$$

— pentru varianta *b* (consolă clasică):

$$k = \frac{E\, b_e h^3}{4\, l^3}, \tag{19}$$

ε_x şi ε_y determinîndu-se cu aceleaşi formule (18).

Indiferent de tipul constructiv, elementul sensibil (elastic) trebuie solicitat numai în domeniul elastic, obţinîndu-se valori acceptabile pentru revenirea la zero, liniaritate, histerezis.

Spre deosebire de acordarea electrotensometrică, acordarea electrorezistivă prezintă marele avantaj că traductoarele tensometrice rezistive se lipesc pe elementul sensibil în condiţii de laborator, eliminîndu-se inconvenientele legate de aplicarea directă a TTR în atmosfera neprielnică a platformelor industriale.

În continuare, se prezintă un dispozitiv nou, conceput şi realizat pentru acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice, dispozitivul respectiv (fig. 16) înglobînd un captor original pentru măsurarea deplasărilor*. Elementul sensibil, din oţel, este de tip bară (consolă) cu secţiune constantă, solicitată la încovoiere, asigurînd o caracteristică de măsurare care este, practic, liniară. Pe suprafeţele elementului sensibil sînt aplicate traductoare tensometrice rezistive, după o anumită configuraţie geometrică, care asigură compensarea efectului termic. Principalele componente ale captorului sînt blocate într-o carcasă, care le fereşte de influenţa mediului ambiant.

Dispozitivul electrorezistiv este alcătuit din două astfel de captoare şi se fixează pe tirant prin intermediul unor bride (fig. 17).

Pentru acordarea celor douăzeci de tiranţi ai unui rezervor sferic de 1000 m^3, sprijinit pe zece picioare tubulare, se utilizează douăzeci de asemenea dispozitive electrorezistive, care se racordează la aparatura tensometrică obişnuită, sistemul de măsurare preferat fiind cel corespunzător metodei punţii dezechilibrate.

Fiecărui dispozitiv electrorezistiv îi corespunde o diagramă de lucru proprie, trasată în condiţii de laborator, pe maşini universale de încercare. O astfel de diagramă, care, de fapt, se identifică cu curba de etalonare corespunzătoare, este exemplificată în figura 18. Cu ajutorul acesteia, pentru forţa de pretensionare dorită, se obţine imediat deformaţia specifică de pretensionare care trebuie urmărită la puntea tensometrică.

---

* C, Ionescu, *Captor tensometric electrorezistiv pentru măsurarea deplasărilor şi caracteristicilor vibraţiilor*, Brevet R.S. România, nr. 71944, declarat la 8.04.1976, aprobat la 28.02.1979.

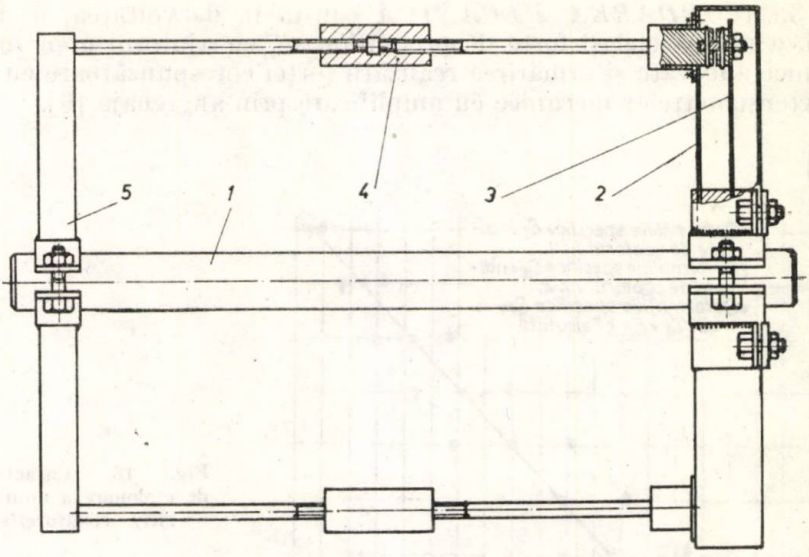


Fig. 16. — Dispozitivul electrorezistiv pentru acordarea tiranţilor rezervoarelor sferice : *1* — tirantul ; *2* — captorul tensometric electrorezistiv ; *3* — elementul sensibil (elastic) al captorului ; *4* — bucşa de reglare iniţială a săgeţii elementului elastic ; *5* — cadrul de fixare pe tirant.

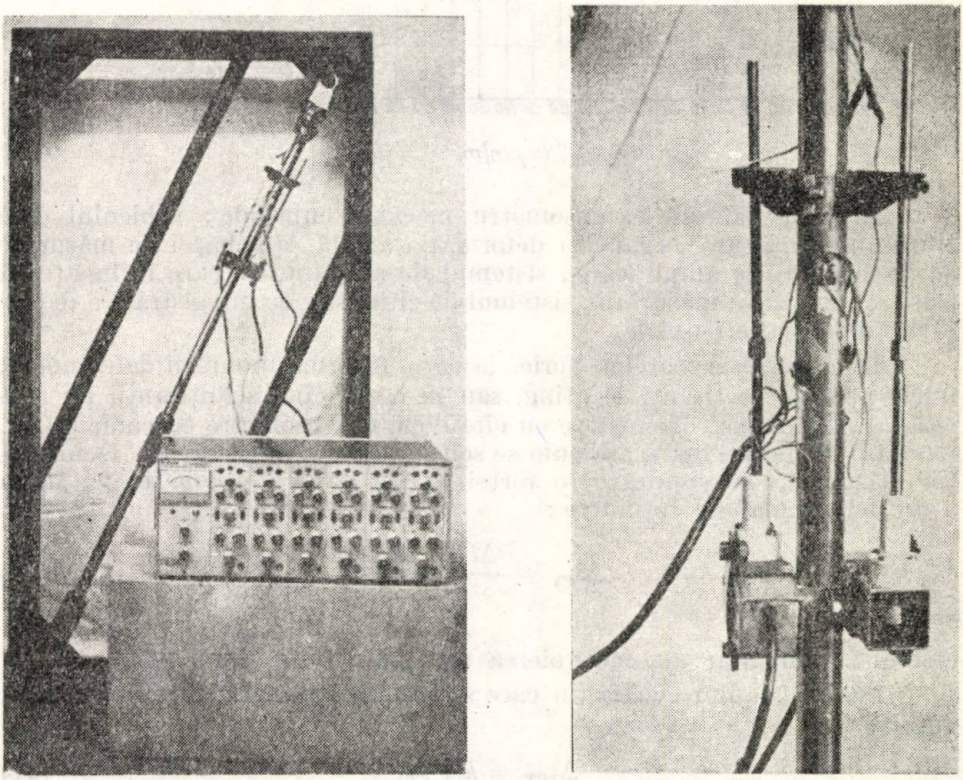


Fig. 17. — Standul de laborator pentru acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice.

3. *ACORDAREA MECANICĂ* constă în dezvoltarea, în toţi tiranţii, a unei aceleiaşi forţe de pretensionare, cu ajutorul unor mijloace mecanice adecvate şi urmărirea realizării forţei corespunzătoare cu ajutorul extensometrelor mecanice cu amplificare prin angrenaje [6].

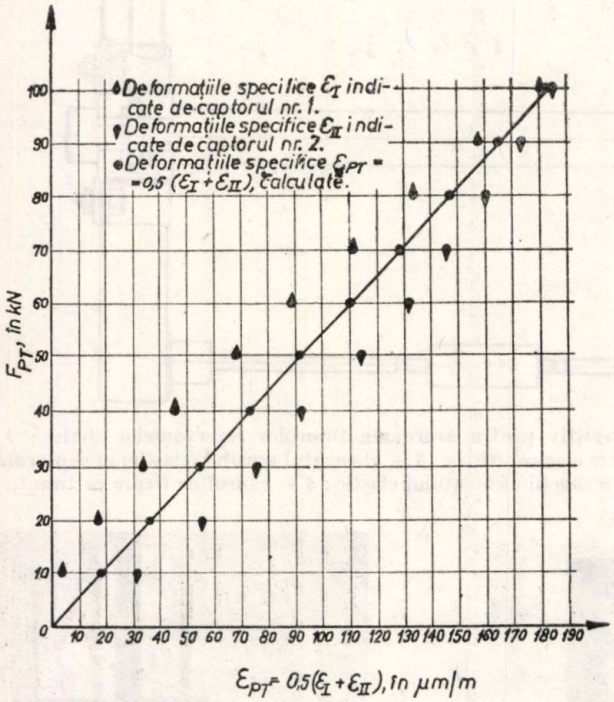


Fig. 18. — Caracteristica de etalonare a unui dispozitiv electrorezistiv.

În principal, un extensometru mecanic cuprinde : vehiculul care transmite deplasarea, egală cu deformaţia axială Δl a bazei de măsurare l_0, la sistemul de amplificare ; sistemul de amplificare, care influenţează clasa de precizie a măsurării ; sistemul de citire sau de înregistrare a deplasării (deformaţiei) axiale.

În cazul rezervoarelor sferice la care, în urma montării defectuoase, unele perechi de tiranţi se ating, sau în cazul cînd semitiranţii nu sînt coaxiali, se folosesc dispozitive cu cîte două extensometre cu comparator, montate diametral opus, aşa cum se schematizează în figura 19. Deformaţia măsurată, corespunzătoare forţei axiale de pretensionare, va fi, în acest fel, numai de întindere :

$$\Delta l_{PT} = \frac{\Delta l_I + \Delta l_{II}}{2}, \tag{20}$$

efectul suplimentar din încovoierea tirantului fiind eliminat.

Pentru stadiul elastic, în care se impune pretensionarea tiranţilor, rezultă :

$$\Delta l_{PT} = k_1 F_{PT}, \tag{21}$$

în care mărimea k_1 are expresia :

$$k_1 = \frac{4}{\pi} \frac{l_0}{d^2 E}. \tag{22}$$

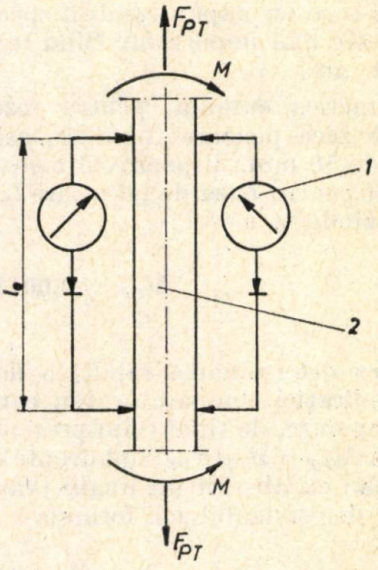


Fig. 19. — Schema de principiu a dispozitivului de acordare mecanică : *1* — comparatorul cu cadran ; *2* — tirantul.

Evident, calitatea măsurării deformaţiei de pretensionare va depinde de precizia citirii comparatorului utilizat. Bunăoară, pentru $l_0 = \text{const.}$, se poate demonstra că, la acelaşi nivel al forţei de pretensionare, deformaţiile afectate de către doi tiranţi, avînd diametrele diferite d_1 şi d_2 (cu $d_1 < d_2$), îndeplinesc condiţia :

$$\Delta l_{PT2} = \Delta l_{PT1} \frac{d_1^2}{d_2^2} < \Delta l_{PT1}, \tag{23}$$

astfel că, în cazul tirantului cu diametrul $d_2 > d_1$, trebuie utilizat un comparator cu precizia de citire sensibil sporită. În acest context, spre exemplu, precizia comparatorului utilizat pentru tiranţii cu diametrul $d_2 = 70$ mm trebuie să fie cam de două ori mai mare decît cea pentru tiranţii cu diametrul $d_1 = 50$ mm.

Atunci cînd comparatoarele de care se dispune au precizie de citire mică, pentru îmbunătăţirea calităţii acesteia, se poate mări baza de măsurare l_0 a dispozitivului mecanic. Continuînd exemplul anterior, între cele două baze, corespunzătoare tiranţilor cu diametrele d_1 şi d_2, există condiţia evidentă :

$$l_{02} = l_{01} \frac{d_2^2}{d_1^2} > l_{01}. \tag{24}$$

Această a doua soluţie practică poate genera, însă, o serie de erori de operare, datorită tensionării tirantului şi, mai ales, datorită inconstanţei diametrului tirantului pe lungimea l_0.

În continuare, se prezintă un dispozitiv original folosit la pretensionarea-acordarea mecanică a tiranţilor rezervoarelor sferice (fig. 20 şi 21). Dispozitivul respectiv are în alcătuire elemente simple, uşor de confecţionat şi care nu impun condiţii speciale de montare şi utilizare, componentele cele mai importante fiind microcomparatoarele (cu precizia de citire de 1 μm).

În practica curentă, pentru rezervorul sferic de 1000m³ GLT, sprijinit pe zece picioare tubulare, asigurat antiseismic prin tiranţi cu diametrul de 50 mm, dispozitivul mecanic cu comparatoare micrometrice este utilizat pentru baza de măsurare $l_0 = 200$ mm, formula de calcul (21) metamorfozîndu-se astfel:

$$\Delta l_{PT} = 0{,}00121 \frac{F_{PT}}{d^2}. \tag{25}$$

Pentru determinarea rapidă a deformaţiei axiale de pretensionare Δl_{PT} şi a indicaţiei comparatorului, care trebuie urmărită, se pot utiliza grafice de operare, de tipul celui prezentat în figura 22, în care curbele de dependenţă $\Delta l_{PT} = \Delta l_{PT}(F_{PT})$ sînt drepte ce trec prin originea axelor de coordonate şi fac cu abscisa un unghi (variabil, în funcţie de diametrul d al tirantului) determinabil cu formula:

$$\alpha = \operatorname{arctg} k_2, \tag{26}$$

în care mărimea $k_2 = 0{,}00121/d^2$.

Pentru evaluarea precisă, în condiţii industriale, a bazei de măsurare l_0, la montaje se utilizează tije cu lungimi prestabilite, care, după prinderea dispozitivului pe tirant (fig. 23), se retrag şi se imobilizează într-o poziţie convenabilă, astfel aleasă, încît, în timpul operaţiei de acordare, palpatorul să fie în contact permanent cu ele.

Dispozitivele mecanice prezentate nu necesită măsuri speciale de protecţie, permiţînd efectuarea lucrărilor respective în orice anotimp (temperatura mediului ambiant nu influenţează nici funcţionarea dispozitivelor şi, mai ales, nici rezultatele măsurărilor, tijele fiind confecţionate din acelaşi material cu cel al tiranţilor). Prin simplitatea construcţiei, montării şi utilizării sale, dispozitivul mecanic de acordare reduce mult durata operaţiilor de pretensionare a tiranţilor unui rezervor sferic, impunîndu-se, astfel, pentru condiţiile de lucru existente pe platformele industriale.

4. *ACORDAREA INDUCTIVĂ* foloseşte dispozitivele cu traductoare specifice care funcţionează pe baza transformării variaţiei de lungime sau a variaţiei unei alte mărimi, mecanice, în variaţie de inductanţă [7].

Traductorul inductiv se caracterizează prin inductanţa L, rezistenţa R şi capacitatea C, care îi influenţează sensibilitatea şi precizia măsurărilor. Pentru domeniul uzual al frecvenţei sursei de alimentare (5...50 kHz),

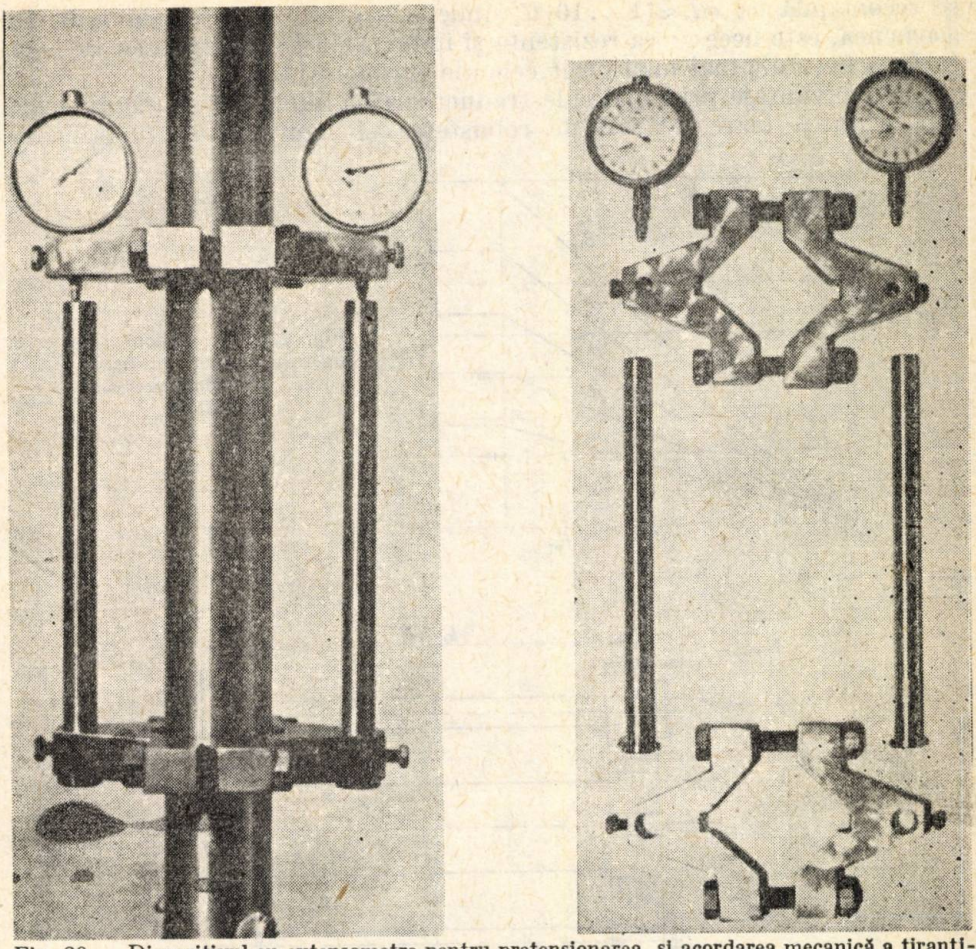


Fig. 20. — Dispozitivul cu extensometre pentru pretensionarea şi acordarea mecanică a tiranţilor rezervoarelor sferice.

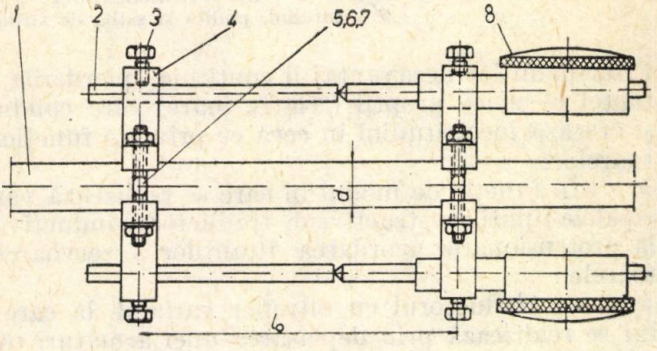


Fig. 21. — Schiţa principială a dispozitivului cu extensometre mecanice: *1* — tirantul; *2* — tija extensometrului; *3* — şurubul de fixare al tijei; *4* — elementul de fixare; *5*, *6*, *7* — şurubul, şaiba şi piuliţa de strîngere a dispozitivului pe tirant; *8* — comparatorul cu cadran.

se recomandă ca $\omega L \approx (1...10)R$, unde ω este frecvenţa unghiulară. De asemenea, este necesar ca rezistenţa şi inductanţa conductoarelor de legătură să fie mult mai mici decît cele ale traductorului.

Ca avantaje principale ale traductoarelor inductive se menţionează sensibilitatea mare, alături de robusteţea şi siguranţa în funcţionare.

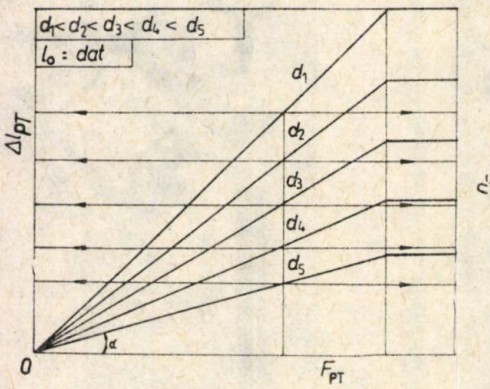


Fig. 22. — Graficul de operare pentru pretensionarea tiranţilor rezervorului sferic.

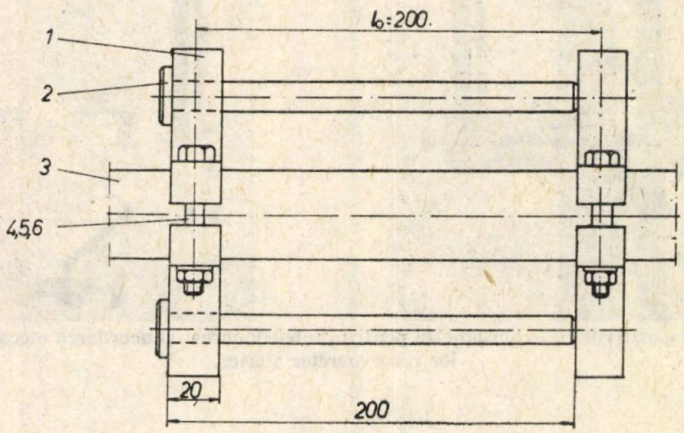


Fig. 23. — Determinarea practică a bazei de măsurare l_0: *1* — elementul de fixare; *2* — tija extensometrului; *3* — tirantul; *4*, *5*, *6* — şurubul, piuliţa şi şaiba de strîngere.

Principalul lor dezavantaj îl contituie pierderile calorice datorite rezistenţei electrice proprii (relativ mare) care conduc la erori în măsurare şi creează incertitudini în ceea ce priveşte funcţionarea corectă a traductoarelor.

În funcţie de modul în care se realizează variaţia inductanţei, principalele tipuri constructive de traductoare inductive, care s-ar putea utiliza la pretensionarea-acordarea tiranţilor rezervoarelor sferice, sînt următoarele:

— traductorul cu întrefier variabil, la care modificarea întrefierului se realizează prin deplasarea unei armături mobile din fier (fig. 24);

acest tip de traductor are sensibilitate constantă numai pentru deplasări foarte mici ale armăturii;

— traductorul cu miez deplasabil, reprezentat schematic în figura 25, care permite măsurarea unor deplasări mult mai mari decît traductorul precedent.

Pentru operaţia de acordare inductivă a tiranţilor, forţa de pretensionare se apreciază indirect, prin intermediul deformaţiei axiale (deplasării părţii mobile a traductorului, în acest caz), care se determină cu ajutorul dispozitivelor inductive, aşa cum rezultă din schema de principiu prezentată în figura 26. Schema bloc de acordare inductivă a tiranţilor unui rezervor sferic este redată în figura 27.

Practic, procedeul de acordare inductivă constă în următoarele: pe fiecare tirant se prinde ferm, cu ajutorul colierelor, cîte un dispozitiv inductiv, care include impulsorul şi traductorul inductiv, anume distanţate; la rîndul său, dispozitivul se conectează la cutia de comutare, care permite racordarea la aparatura de măsurare de tip osciloscop. De menţionat că distanţa optimă, de lucru, între impulsor şi traductorul inductiv este de 10...15 mm, iar timpul de lucru trebuie să fie destul de scurt — dezavantaj major, care impune utilizarea cu mari precauţii a metodei expuse.

5. *ACORDAREA VIBROMETRICĂ* utilizează, ca principală componentă, dispozitivele vibrometrice cu tensometre cu coardă vibrantă, practic, forţa de pretensionare determinîndu-se prin intermediul frecvenţei oscilaţiilor proprii ale coardei [7].

Coarda vibrantă, folosită drept traductor, prezintă, ca principală caracteristică, modificarea frecvenţei oscilaţiilor sale proprii în funcţie de forţa de întindere care o solicită, frecvenţă care se determină cu următoarea formulă clasică:

$$f = \frac{n_f}{L_c d_c} \sqrt{\frac{Fg}{\pi\gamma}}, \qquad (27)$$

în care, pentru frecvenţa fundamentală, $n_f = 1$; dependenţa grafică $f = f(F)$ este cea redată în figura 28.

După cum se ştie, vibrarea coardei se materializează prin ciupire, lovire, frecare sau rezonanţă, ultimele acţiuni producînd vibraţii întreţinute. Ca atare, evaluarea practică a forţei de pretensionare din tiranţii rezervoarelor sferice se poate face fie prin intermediul determinării frecvenţei vibraţiei proprii a tirantului însuşi, fie prin intermediul determinării frecvenţei de oscilaţie proprie a unei coarde din oţel, montate pe tirant astfel, încît ea să evolueze împreună cu tirantul respectiv.

Evident, în prima alternativă, coarda vibrantă este însuşi tirantul, vibraţiile corespunzătoare fiind urmărite, valoric, cu ajutorul unui vibrometru electronic. Însă, procedeul respectiv are precizie de citire mică (cu bandă îngustă de frecvenţe, corespunzătoare unei game largi de valori ale forţei de pretensionare) şi prezintă amortizare relativ rapidă a vibraţiilor (în consecinţă, timpul de citire trebuind să fie scurt).

Pentru a creşte sensibilitatea de măsurare, se recomandă opţiunea pentru a doua alternativă, care constă în utilizarea unui tensometru

cu coardă vibrantă. De această dată, elementul sensibil al tensometrului este coarda, confecţionată din fir de oţel şi ataşată, prin intermediul unui dispozitiv, la tirantul ce se pretensionează. Sub acţiunea unei excitaţii exterioare, coarda, care este tensionată concomitent cu tirantul, intră în vibraţie, excitarea realizîndu-se cu ajutorul unui electromagnet, ai cărui

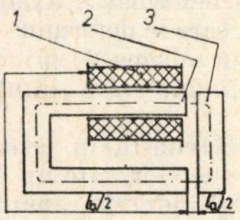


Fig. 24. — Traductorul cu întrefier variabil: *1* — bobina; *2* — miezul; *3* — armătura mobilă.

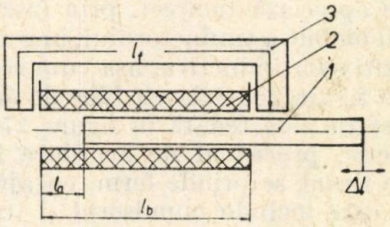


Fig. 25. — Traductorul cu miez deplasabil: *1* — miezul deplasabil; *2* — bobina; *3* — miezul.

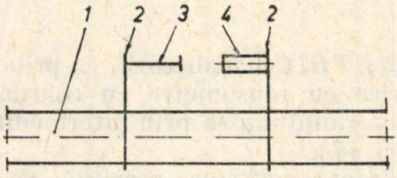


Fig. 26. — Schema de principiu a metodei de acordare inductivă: *1* — tirantul; *2* — colierele de prindere; *3* — impulsorul; *4* — traductorul inductiv.

Fig. 27. — Schema-bloc de acordare inductivă: *1* — impulsorul; *2* — traductorul inductiv; *3* — cutia de comutare; *4* — amplificatorul; *5* — osciloscopul.

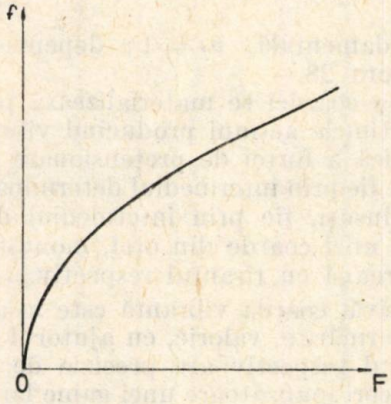


Fig. 28. — Dependenţa frecvenţei fundamentale de întinderea coardei.

poli sînt plasaţi foarte aproape de coardă (fig. 29). După ce coarda a primit şocul electric, ea oscilează amortizat, cu frecvenţa ei proprie şi induce în bobinele electromagnetului, de la care a primit impulsul, o tensiune

alternativă de aceeași frecvență. Frecvența curentului indus este determinată cu ajutorul unui frecvențmetru cu afișaj digital, care înlesnește mult operația de citire.

Deoarece coarda vibrantă a tensometrului se pretensionează inițial, cînd tirantul este încă neîntins, frecvența corespunzătoare unui anumit

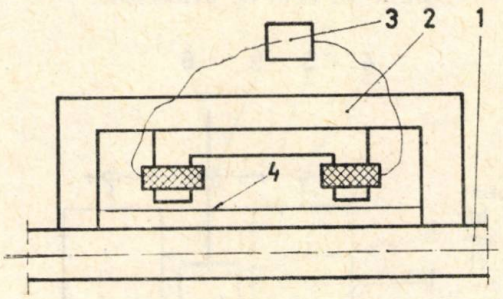


Fig. 29. — Schema de principiu a emițătorului electromagnetic: *1* — tirantul; *2* — emițătorul; *3* — frecvențmetrul; *4* — coarda.

stadiu de pretensionare a tirantului, căruia îi corespunde deformația specifică ε_{PT}, se calculează cu formula:

$$f = \sqrt{f_0^2 + \frac{E\varepsilon_{PT}\, g}{4l_0^2\,\gamma}}\,. \tag{28}$$

6. *ACORDAREA HIDRAULICĂ* a tiranților rezervoarelor sferice constă în realizarea forței de pretensionare cu ajutorul unor dispozitive hidraulice [7]. Metoda prezintă o serie de avantaje și anume: se poate lucra în orice condiții atmosferice; se realizează forțe mari de pretensionare; toți tiranții se întind, uniform și concomitent, cu aceeași forță; timpul necesar acordării se reduce simțitor, în comparație cu celelalte metode. Cel mai însemnat avantaj, însă, îl constituie realizarea pe cale hidraulică a forței de pretensionare, înlăturîndu-se efortul fizic uman (preponderent în cazul celorlalte metode). Ca dezavantaj poate fi amintită greutatea dispozitivelor hidraulice, care poate fi, însă, diminuată prin utilizarea unor materiale de construcții cu rezistență mecanică ridicată. Trebuie precizat că, pentru aplicarea acestei metode, sistemul tirant-mufă are forme special adaptate.

Schema de principiu a pretensionării (acordării) hidraulice a tiranților rezervoarelor sferice este redată în figura 30. Forța dezvoltată de cilindrii hidraulici depinde de secțiunea transversală a pistoanelor, de presiunea fluidului de lucru, de diametrul tijei pistonului și de coeficientul de frecare piston-cilindru. Ca urmare a acționării simultane a celor doi cilindri, reprezentați în figura 30, se dezvoltă o forță teoretică de întindere dată de formula:

$$F = 2\left[\frac{\pi}{4}(D_c^2 - d_t^2)p - F_f\right]. \tag{29}$$

Pentru acordarea practică a tiranților, formula (29) nu este utilizată ca atare, întrucît nu se cunoaște valoarea forței F. Se impune, așadar,

ca pentru fiecare pereche de cilindri, care compun dispozitivul hidraulic, experimental, să se traseze diagrama caracteristică reală (fig. 31).

★

Pentru aplicarea practică a metodelor de acordare prezentate (mici excepţii făcînd metoda acordării hidraulice) trebuie parcursă o anumită *metodologie de acordare* care se expune în cele ce urmează.

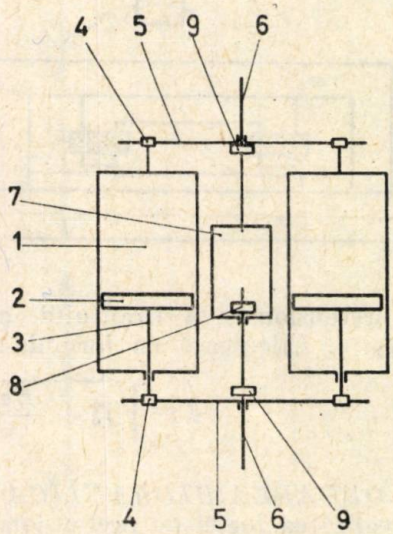


Fig. 30. — Schema de principiu a pretensionării hidraulice a tiranţilor rezervoarelor sferice: *1* — cilindrul hidraulic; *2* — pistonul; *3* — tija pistonului; *4* — urechea de prindere; *5* — jugul; *6* — semitirantul; *7* — mufa; *8* — piuliţa specială; *9* — piuliţa opritoare.

MARCAREA TIRANŢILOR (fig. 32) este necesară pentru uşurarea efectuării conexiunilor dispozitivelor sau TTR, aplicate pe tiranţi, la aparatura de măsurare, precum şi pentru o mai bună conducere a operaţiei de acordare, în conformitate cu schema prestabilită.

APLICAREA TTR ŞI DISPOZITIVELOR se face pe feţele laterale ale tiranţilor (vezi fig. 10 şi fig. 11), aceasta pentru a evita influenţa negativă a efectelor gravitaţionale şi a eventualelor montaje defectuoase asupra stabilirii stadiului de zero, corespunzător sistemului nesolicitat [4].

INDICAŢIA INIŢIALĂ (de zero) este prima care se determină în operaţia propriu-zisă de pretensionare-acordare. Pentru aceasta, prin slăbirea mufei (piuliţei) întinzătoare, se procedează la descărcarea tiranţilor. De remarcat că acest mod de determinare este relativ imprecis, deoarece slăbirea tiranţilor este arbitrară şi subiectivă, fiind lăsată la aprecierea celui care o execută. Deocamdată, însă, această alternativă este singura posibilă, în cazul cînd tiranţii sînt blocaţi în bolţuri (articulaţii) sau cînd urechile de prindere ale acestora sînt sudate direct la coloanele de rezemare.

Eliberarea tirantului din articulaţia inferioară (de la baza piciorului) este unica modalitate certă de determinare corectă, precisă, a indicaţiei iniţiale (notate, în general, cu i_0), fiind recomandată în special în variantele acordării electrotensometrice şi electrorezistive, cînd, pentru

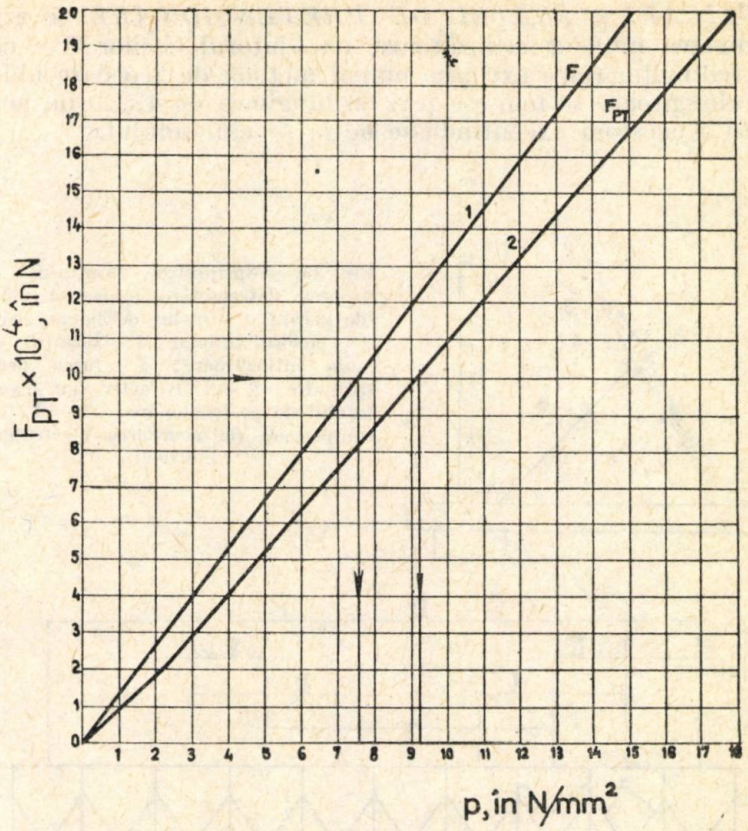


Fig. 31. — Diagrama caracteristică de operare a dispozitivului hidraulic de pretensionare-acordare: *1* — diagrama caracteristică teoretică [trasată conform cu (29), neglijindu-se forța de frecare F_f]; *2* — diagrama caracteristică reală (obținută experimental).

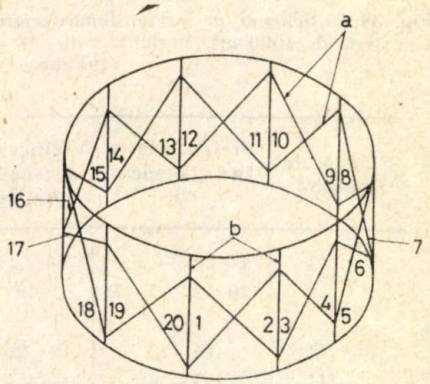


Fig. 32. — Marcarea tiranților rezervoarelor sferice: *a* — tiranții (1...20); *b* — picioarele tubulare.

a elimina efectele unei eventuale aplicări necorespunzătoare a TTR, se impune sprijinirea adecvată a tirantului respectiv (fig. 33). După înregistrarea indicației inițiale (de zero), tiranții se montează din nou în articulații, fără a li se modifica (prin rotire) poziția.

APLICAREA FORŢEI DE PRETENSIONARE se realizează prin strîngerea mufelor întinzătoare, cu ajutorul cheilor fixe cu mîner pentru prelungitor (face excepţie numai metoda de acordare hidraulică). Drept prelungitoare se folosesc ţevi cu lungimea de 4...5 m, acţionarea (manuală) a acestora executîndu-se de la nivelul solului.

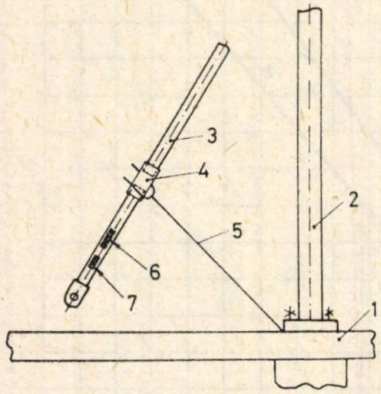


Fig. 33. — Sprijinirea tirantului, în vederea determinării indicaţiei iniţiale (de zero): *1* — inelul de beton armat; *2* — piciorul tubular; *3* — tirantul; *4* — mufa întinzătoare; *5* — furca pentru sprijinire; *6* — TTR activ sau dispozitivului de pretensionare; *7* — TTR de compensare (la acordarea electrotensometrică).

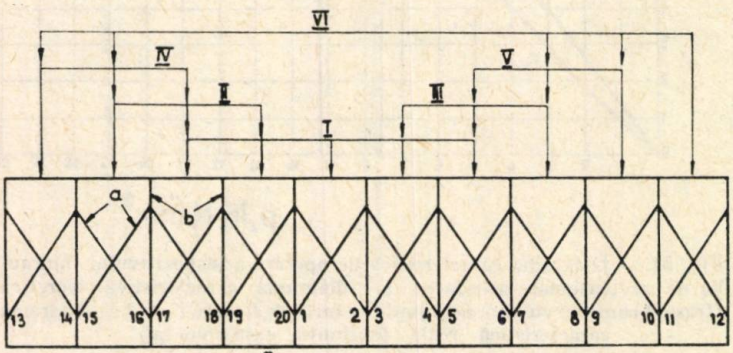


Fig. 34. — Schema de pretensionare-acordare a tiranţilor unui rezervor sferic de 1000 m³. Variantă: *a* — tiranţii (1...20); *b* — picioarele tubulare.

Etapele de strîngere	Pretensionarea tiranţilor-pereche	Verificarea pretensionării în tiranţii-pereche	Strîngerea definitivă a contrapiuliţelor tiranţilor-pereche
I	1—2; 3—4; 10—20; 17—18 5—6	1—2; 3—4 19—20	1— 2
II	15—16	19—20; 17—18	19—20
III	7— 8	3—4; 5—6	3— 4
IV	13—14	17—18; 15—16	17—18
V	9—10	5—6; 7—8	5— 6
VI	11—12	7—8; 9—10	15—16; 13—14

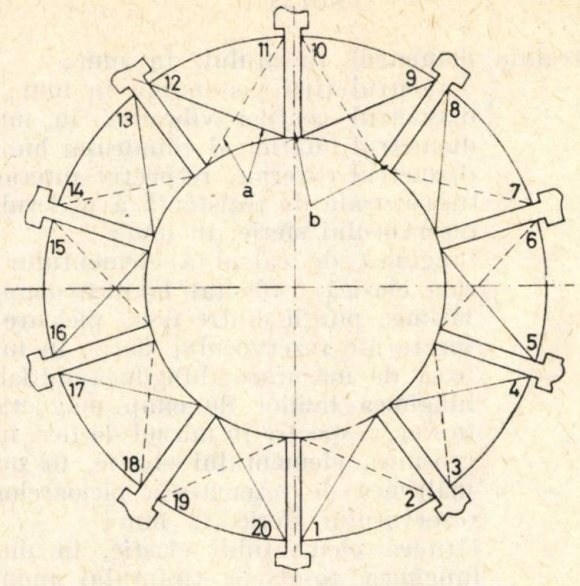


Fig. 35. — Schema de pretensionare-acordare a tiranților unui rezervor sferic de 1000 m³. Variantă : *a* — tiranții (1...20) ; *b* — picioarele tubulare.
——— tiranții care se pretensionează-acordează în prima etapă ;
— — — tiranții care se pretensionează-acordează în a doua etapă.

Dată fiind valoarea relativ ridicată a forței ce trebuie realizată, finalizarea pretensionării tiranților nu se face dintr-o dată, într-o singură treaptă, ci în mai multe trepte, pentru fiecare treaptă asigurîndu-se acordarea tuturor tiranților. Valoarea procentuală, față de cea totală, a treptelor de pretensionare scade în măsura în care se mărește nivelul forței realizate la un moment dat, întrucît crește influența pe care o produce strîngerea unui tirant asupra celorlalți (în special vecini) acordarea devenind mai dificilă. Practic, s-a dovedit că, la forțe mici, interinfluențele, în sistemul de rezemare ale strîngerii unui tirant, sînt neglijabile [4].

Realizarea acordării uniforme a tuturor tiranților unui rezervor sferic, pentru un anumit nivel de forță de pretensionare, este posibilă numai dacă se ține seamă de influențele reciproce, care apar pe parcursul pretensionării, în care scop se aplică, după caz, diferite scheme de acordare. În figurile 34 și 35 sînt indicate două scheme de acordare experimentale și, deci, recomandabile în acordarea tiranților rezervoarelor sferice de 1000 m³ sprijinite pe 10 picioare, asigurate antiseismic prin 20 de tiranți.

CORECTAREA VALORILOR forței de pretensionare se face ori de cîte ori apar abateri de la valorile nominale, ca urmare a interinfluențării tiranților întinși. Această operație se face atît după fiecare treaptă intermediară de acordare, cît și în finalul lucrării. La terminarea acordării, se strîng contrapiulițele existente la ambele capete ale mufei întinzătoare, în scopul asigurării menținerii în timp a forței de pretensionare.

Primită la redacție la 16 ianuarie 1982

NOTAŢII

d	reprezintă	diametrul tirantului, în mm;
d_t	—	diametrul tijei pistonului, în mm;
d_c	—	diametrul coardei vibrante, în mm;
D	—	diametrul interior al cilindrului hidraulic, în mm;
D_{ep}, D_{ip}	—	diametrul exterior, respectiv interior, al secţiunii transversale de rezistenţă a piciorului tubular al rezervorului sferic, în mm;
l	—	lungimea de calcul a elementului sensibil (consolă clasică), solicitat la încovoiere, în mm;
l_p	—	lăţimea punţii dintre două picioare tubulare alăturate ale rezervorului sferic, în mm;
l_0	—	baza de măsurare (lungimea iniţială), în mm;
l_a, l_b, l_f	—	lungimea liniilor de cîmp magnetic în întrefier, în fier, respectiv în miezul de fier, în mm;
h	—	grosimea elementului elastic, în mm;
h_p	—	înălţimea de rezemare a picioarelor tubulare ale rezervorului sferic, în mm;
b_e	—	lăţimea elementului elastic, în mm;
L_T	—	lungimea totală a tirantului montat, măsurată între centrele bolţurilor articulaţiilor, în mm;
L_c	—	lungimea coardei vibrante, în mm;
s_p	—	grosimea de rezistenţă a peretelui piciorului tubular, în mm;
$A_{t\,min}=\min(\pi d^2/4)$	—	aria minimă a secţiunii transversale de rezistenţă a tirantului, în mm^2;
f_T	—	săgeata tirantului, sub acţiunea greutăţii proprii, în mm;
Δl	—	deformaţia (deplasarea) axială, în mm;
Δl_{PT}	—	deformaţia axială de pretensionare, în mm;
$\Delta l_{I,II}$	—	deformaţia axială afectată suplimentar de fibra (tirantului) întinsă şi, respectiv, comprimată suplimentar din încovoiere, în mm;
ε	—	deformaţia specifică;
$\varepsilon_{x,y}$	—	deformaţia specifică corespunzătoare direcţiei longitudinale, respectiv transversale, a elementului sensibil;
ε_{PT}	—	deformaţia specifică de pretensionare;
$\varepsilon_{I,II}$	—	deformaţia specifică afectată de fibra tirantului întinsă, respectiv comprimată suplimentar la încovoiere;
$x(\tau)$	—	funcţia, în mm, care caracterizează răspunsul dinamic al sistemului elastic dat la o oscilaţie liberă sau forţată;
x_{max}, x^p_{max}	—	săgeata statică a elementului elastic (oscilant) dat, determinată în dreptul acţiunii statice a sarcinii dinamice, respectiv a sarcinii seismice, orizontale, în mm;

$I = \min [\pi(D_{ep}^4 - D_{ip}^4)/64]$		momentul de inerţie axial minim al secţiunii transversale de rezistenţă a peretelui piciorului tubular, în mm^4;
K_p	—	rigiditatea totală a picioarelor tubulare ale rezervorului sferic, definită ca fiind forţa necesară pentru a produce — pe direcţia acesteia — o deplasare unitară a tuturor picioarelor respective, în N/mm;
K_t	—	rigiditatea totală a tiranţilor întinşi (prin acţiuni seismice), în N/mm;
$K = K_p + K_t$	—	rigiditatea totală a sistemului de rezemare discretă a rezervorului sferic, în N/mm;
nEI	—	rigiditatea la încovoiere a sistemului de rezemare, în $N \cdot mm^2$;
F, P	—	forţa, în N;
F_f	—	forţa de frecare, în N;
F_{PT}	—	forţa de pretensionare, în N;
S	—	sarcină seismică orizontală (forţa tăietoare la bază), în N;
M	—	momentul încovoietor, în $N \cdot mm$;
σ_{max}	—	efortul unitar maxim, în N/mm^2;
$\sigma_c = \sigma_{0.2}$	—	limita (tehnică) de curgere a materialului de bază al tirantului, în N/mm^2;
σ_a	—	rezistenţa admisibilă, corespunzătoare solicitării statice de întindere, a materialului de bază al tirantului, în N/mm^2;
σ_{PT}	—	efortul unitar de pretensionare, în N/mm^2;
E	—	modulul de elasticitate, longitudinal (modulul lui Young), în N/mm^2;
p	—	presiunea, în N/mm^2;
τ	—	timpul, în s;
f_0, f	—	frecvenţa oscilaţiilor proprii ale coardei, pretensionate iniţial, respectiv întinse cu forţa F_{PT}, în s^{-1};
G_{max}	—	greutatea maximă a rezervorului sferic, în N;
m_{max}	—	masa maximă a rezervorului sferic, în kg;
g	—	acceleraţia gravitaţională, în m/s^2, mm/s^2;
γ	—	greutatea specifică, în N/mm^3;
k	—	constanta elastică a elementului sensibil, în N/mm;
$k_{1,2}$	—	mărimea dimensională, în mm/N;
k_{PT}	—	coeficientul pretensionării;
$m = \frac{\sigma_{PT} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT}}$	—	coeficientul condiţiilor de lucru;
c_c	—	coeficientul global de siguranţă faţă de limita tehnică de curgere;
μ	—	coeficientul lui Poisson;
α, β, φ	—	unghiurile, în grd;
$i_{0;1}$	—	indicaţiile punţii tensometrice înainte de şi, respectiv, după solicitarea tirantului;
n	—	numărul picioarelor tubulare ale unui rezervor sferic;

n_c — numărul de diviziuni al comparatorului;
$a = c_c^{-1}$; $b = m^{-1}$ — coeficienţii numerici.

BIBLIOGRAFIE

1. A. PAVEL, *Dinamica rezervoarelor sferice in condiţiile acţiunilor seismice*, Construcţii, 6, 44—49 (1980).
2. A. PAVEL, *Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice*. I şi II, St. cerc. mec. apl., **38**, *4* şi *5*, 537—555 şi 717—730 (1979).
3. A. PAVEL, *Contribuţii la rezolvarea problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice de mare capacitate*, Revista de chimie, **30**, *12*, 1256—1259 (1979).
4. A. PAVEL, L. RIZEA, *Acordarea electrotensometrică a tiranţilor rezervoarelor sferice*, Revista de chimie, **32**, 7, 675—681 (1981).
5. A. PAVEL ş.a., *Acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice*, St. cerc. mec. apl., **40**, *4*, 619—628 (1981).
6. A. PAVEL ş.a., *Acordarea mecanică a tiranţilor rezervoarelor sferice*, St. cerc. mec. apl., **40**, *5*, 773—782 (1981).
7. A. PAVEL ş.a., *Metode şi mijloace pentru pretensionarea şi acordarea tiranţilor rezervoarelor sferice de 1000 m³*, Simpozionul „10 ani de activitate productivă a industriei petrochimice din Argeş—realizări şi perspective", Piteşti, Combinatul Petrochimic, 1980.
8. ICCPDC, *Normativ pentru proiectarea antiseismică a construcţiilor de locuinţe, social-culturale, agrozootehnice şi industriale*, Indicativ P 100—78. Bucureşti, 1978.
9. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1966.
10. P. S. THEOCARIS ş.a., *Analiza experimentală a tensiunilor*. Vol. I şi II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1977.

METODĂ DE CALCUL A ÎMBINĂRILOR FILETATE CU UMĂR. III

de DORIN CONSTANTINESCU, TUDOR-VASILE HUNCKER, ION MOHORA, MARINEL PETRE

Institutul de Cercetări și Inginerie Tehnologică pentru Utilaj Petrolier, IPCUP, Ploiești

Lucrarea prezintă o metodă completă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr, utilizate în special în industria petrolieră, la asamblarea etanșă a materialului tubular. Partea a treia a lucrării conține relațiile și metodologia calculului de rezistență, în scopul verificării și determinării capacității portante a elementelor de îmbinare.

5.1. CALCULUL DE VERIFICARE

Metodologia calculului de rezistență are la bază varianta de verificare, prin care se asigură condițiile necesare de rezistență pentru fiecare din secțiunile (posibil) critice ale îmbinărilor [5.1]:

— Rezistența la strivire a umărului îmbinării trebuie să satisfacă condiția

$$\sigma_{su} = F/A_u \leqslant \sigma_{cmin}/c_s,$$

în care aria umărului este (5.1)

$$A_u = \pi(D_s^2 - d_s^2)/4 \sin u$$

sau coeficientul de siguranță la strivirea umărului

$$c_{su} = \sigma_{cmin}/\sigma_{su} \geqslant c_s, \tag{5.2}$$

σ_{cmin} fiind limita de curgere minimă a materialelor utilizate la execuția elementelor de îmbinare.

— Eforturile unitare din secțiunile posibil critice ale elementelor de îmbinare, datorate solicitărilor axiale $\sigma_a^{(\prime)}$ și la torsiune $\tau_t^{(\prime)}$, pe tipurile caracteristice de îmbinări, sînt date în tabelul 5.2. Conform relațiilor (2.9), (4.10) și (4.11), expresiile analitice ale momentelor de torsiune transmise prin filet în a doua etapă funcțională sînt

$$M_f = K(F \sin u + K_p \cdot G) M_F/[M + (K \cdot K_p - K_e \cdot K_G)G]$$

și, respectiv, (5.3)

$$M_u = K_e(F - K_G \cdot G) M_F/[M + (K \cdot K_p - K_e \cdot K_G)G].$$

Solicitările radiale din elementele de îmbinare au ca efect de fapt atît eforturi unitare radiale, cît și tangențiale, similar cazului de calcul al tuburilor cu pereți groși [5.2] (fig. 5.1), adică

$$\sigma_r = \frac{d_I^2 \cdot p_I - d_E^2 \cdot p_E}{d_E^2 - d_I^2} - \frac{(p_I - p_E) d_I^2 \cdot d_E^2}{d_r^2(d_E^2 - d_I^2)} \quad \text{și}$$

Tabelul 5.2. Expresiile solicitărilor axiale și de torsiune, la cep și mufă (în secțiunile critice)

Nr. crt.	Simbolul tipului constructiv al îmbinării	Elementul de îmbinare	Eforturile unitare, în etapele de solicitare: 1 (aplicarea momentului de strângere M) σ_a (c sau m)	1 (aplicarea momentului de strângere M) τ_t (c sau m)	2 (aplicarea forței de tracțiune G_o, a momentului M_F și a pres. p_i) σ'_a (c sau m)	2 (aplicarea forței de tracțiune G_o, a momentului M_F și a pres. p_i) τ'_t (c sau m)
1	IKE	CEPUL	$\frac{4F\sin u}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_c\,K\cdot F\sin u}{\pi(d_c^4-d^4)}$	$\frac{4(F\sin u+K_p G)}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_c}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot\frac{K(F\sin u+K_p\cdot G)}{M+(K\cdot K_p-K_e\cdot K_G)G}M_F$
2		MUEA	$-\frac{4F\sin u}{\pi(D^2-d_{m1}^2)}$	$\frac{16\,D\cdot K_e\cdot F}{\pi(D^4-d_{m1}^4)}$	$\frac{4G}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D}{\pi(D^4-d_m^4)}\cdot M_F$
3	ICE	CEPUL	$\frac{4F\sin u}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_c\cdot K\cdot F\sin u}{\pi(d_c^4-d^4)}$	$\frac{4(F\sin u+K_p G)}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot\frac{K(F\sin u+K_p G)}{M+(K\cdot K_p-K_e\cdot K_G)G}M_F$
4		MUFA	$-\frac{4F\sin u}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D\cdot K_e\cdot F}{\pi(D^4-d_m^4)}$	$\frac{4G}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D}{\pi(D^4-d_m^4)}\cdot M_F$
5	IKI	CEPUL	$-\frac{4F\sin u}{\pi(d_{c1}^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_{c1}\,K_e\cdot F}{\pi(d_{c1}^4-d^4)}$	$\frac{4G}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_c}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot M_F$
6		MUFA	$\frac{4F\sin u}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D\cdot K\cdot F\sin u}{\pi(D^4-d_m^4)}$	$\frac{4(F\sin u+K_p G)}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D}{\pi(D^4-d_m^4)}\cdot\frac{K(F\sin u+K_p\cdot G)}{M+(K\cdot K_p-K_e\cdot K_G)G}M_F$
7	ICI	CEPUL	$-\frac{4F\sin u}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_c\cdot K_e\cdot F}{\pi(d_c^4-d^4)}$	$\frac{4G}{\pi(d_c^2-d^2)}$	$\frac{16\,d_c}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot M_F$
8		MUFA	$\frac{4F\sin u}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D\cdot K\cdot F\sin u}{\pi(D^4-d_m^4)}$	$\frac{4(F\sin u+K_p G)}{\pi(D^2-d_m^2)}$	$\frac{16\,D}{\pi(D^4-d_m^4)}\cdot\frac{K(F\sin u+K_p\cdot G)}{M+(K\cdot K_p-K_e\cdot K_G)G}M_F$

$$\sigma_t = \frac{d_I^2 \cdot p_I - d_E^2 \cdot p_E}{d_E^2 - d_I^2} + \frac{(p_I - p_E) d_I^2 \cdot d_E^2}{d_r^2 (d_E^2 - d_I^2)},$$

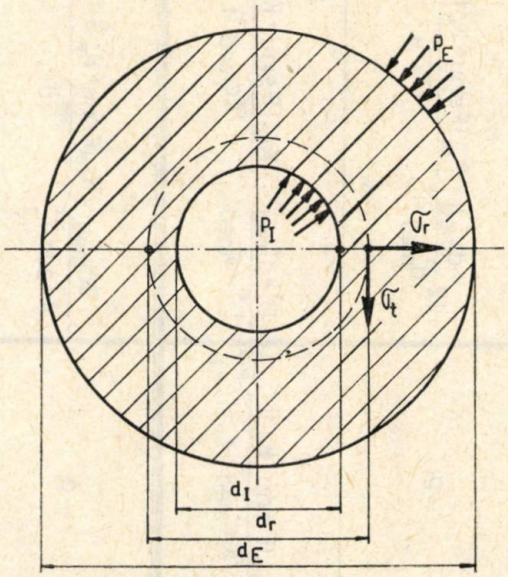


Fig. 5.1

ale căror valori maxime apar la interior, deci pentru $d_r = d_1$, adică

$$\sigma_{rmax.} = -p_I \text{ și}$$

$$\sigma_{tmax.} = \frac{(d_E^2 + d_I^2) \cdot p_I - 2 d_E^2 \cdot p_E}{d_E^2 - d_I^2};$$

rezultatele obținute prin aplicarea acestor relații pentru cazurile concrete de solicitare ale îmbinărilor, presiunile din filete fiind considerate corespunzător suprafeței medii

$$A_f = \pi d_{med} \cdot l_f \tag{5.4}$$

sînt indicate în tabelul 5.3.

Compunîndu-se aceste eforturi unitare din secțiunile periculoase ale cepului și mufei, rezultă rezistențele reduse și coeficienții de siguranță corespunzători, care trebuie să satisfacă condițiile

$$\begin{aligned}
&\sigma_{redc} = \sqrt{\sigma_{ac}^2 + \sigma_{tc}^2 + 3\tau_{tc}^2} \leqslant \sigma_{cc}/c_c \text{ sau} \\
&c_{redc} = \sigma_{cc}/\sigma_{redc} \geqslant c_c, \text{ respectiv} \\
&\sigma_{redm} = \sqrt{\sigma_{am}^2 + \sigma_{rm}^2 + \sigma_{tm}^2 + 3\tau_{tm}^2} \leqslant \sigma_{cm}/c_m \text{ sau} \\
&c_{redm} = \sigma_{cm}/\sigma_{redm} \geqslant c_m
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Tabelul 5.3. Expresiile solicitărilor radiale, la cep și mufă (în secțiunile critice)

Nr. crt.	Simbolul tipului constructiv al îmbinării	Elementul de îmbinare	Eforturile unitare, corespunzătoare etapelor de solicitare: 1 (aplicarea momentului de strângere M) — Eforturile unitare radiale, σ_r (c sau m)	1 (aplicarea momentului de strângere M) — Eforturile unitare tangențiale, σ_t (c sau m)	2 (aplicarea forței de tracțiune G_0, a momentului M_F și a pres. p_i) — Eforturile unitare radiale, σ_r (c sau m)	2 (aplicarea forței de tracțiune G_0, a momentului M_F și a pres. p_i) — Eforturile unitare tangențiale σ_t (c sau m)
1	IKE, ICE	CEPUL	—	$-2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_R\cdot F\sin u}{\pi\, l_f}$	$-p_i$	$-\left[2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u+K_P G)}{\pi\, l_f}+p_i\right]$
2		MUFA	$-\frac{K_R\cdot F\sin u}{\pi d_{med}\, l_f}$	$+\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\cdot\frac{K_R\, F\sin u}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$-\left[\frac{K_{RD}(F\sin u+K_P G)}{\pi d_{med}\, l_f}+p_i\right]$	$\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\cdot\left[\frac{K_{RD}(F\sin u+K_P\cdot G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}+p_i\right]$
3	IKI, ICI	CEPUL	—	$-2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_R\cdot F\sin u}{\pi\, l_f}$	$-p_i$	$-\frac{2d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u+K_P G)}{\pi\, l_f}+\frac{d_{med}^2+d^2}{d_{med}^2-d^2}p_i$
4		MUFA	$-\frac{K_R\cdot F\sin u}{\pi d_{med}\, l_f}$	$+\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\cdot\frac{K_R\cdot F\sin u}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$-\frac{K_{RD}(F\cdot\sin u+K_P G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u+K_P G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}$

pentru prima etapă de solicitare, şi

$$\sigma'_{redc} = \sqrt{\sigma'^2_{ac} + \sigma'^2_{rc} + \sigma'^2_{tc} + 3\tau'^2_{tc}} \leqslant \sigma_{cc}/c_c$$

sau

$$c'_{redc} = \sigma_{cc}/\sigma'_{redc} \geqslant c_c, \text{ respectiv} \qquad (5.6)$$

$$\sigma'_{redm} = \sqrt{\sigma'^2_{am} + \sigma'^2_{rm} + \sigma'^2_{tm} + 3\tau'^2_{tm}} \leqslant \sigma_{cm}/c_m$$

sau

$$c'_{redm} = \sigma_{cm}/\sigma'_{redm} \geqslant c_m$$

pentru a doua etapă de solicitare.

— Relaţiile de calcul ale eforturilor unitare de încovoiere şi de forfecare din filete sînt

$$\sigma'_{ic} = \frac{3K_s(t+j)(K_p \cdot G + F\sin u)}{\pi n_s \cdot d_{cmed} \cdot l_s^2} \quad \text{şi}$$

$$\tau'_{fc} = K_s(K_p \cdot G + F\sin u)/\pi n_s \cdot d_{cmed} \cdot l_s$$

la cep, respectiv (5.7)

$$\sigma'_{im} = \frac{3K_s(t+j)(K_p \cdot G + F\sin u)}{\pi n_s \cdot d_{mmed} \cdot l_s^2} \quad \text{şi}$$

$$\tau'_{fm} = K_s(K_p \cdot G + F\sin u)/\pi n_s \cdot d_{mmed} \cdot l_s$$

la mufă,
rezultînd rezistenţele reduse şi coeficienţii de siguranţă

$$\sigma'_{redfc} = \sqrt{\sigma'^2_{ic} + 3\tau'^2_{fc}} \leqslant \sigma_{cc}/c_c \quad \text{şi}$$

$$c'_{redfc} = \sigma_{cc}/\sigma'_{redfc} \geqslant c_c$$

pentru filetul cepului, respectiv (5.8)

$$\sigma'_{redfm} = \sqrt{\sigma'^2_{im} + 3\tau'^2_{fm}} \leqslant \sigma_{cm}/c_m \quad \text{şi}$$

$$c'_{redfm} = \sigma_{cm}/\sigma'_{redfm} \geqslant c_m$$

pentru filetul mufei
în care, pentru îmbinările cilindrice, d_{cmed} şi d_{mmed} sînt egale cu d_c şi, respectiv, cu d_m, iar K_s este coeficientul de supraîncărcare a spirelor filetului, necesar a fi aplicat datorită variaţiei neliniare a eforturilor axiale în zona filetelor (dedus statistic, de exemplu din [5.3], după date experimentale).

— Rezistenţa la strivire a spirelor filetelor şi coeficientul de siguranţă corespunzător sînt conform expresiilor

$$\sigma'_{sf} = K_{ND} \cdot K_s (K_p \cdot G + F \sin u)/\pi n_s (t - j)\, d_{med} \cdot \frac{1}{\cos \alpha'} \leqslant \sigma_{cmin}/c_s$$

şi (5.9)

$$c'_{sf} = \sigma_{cmin}/\sigma'_{sf} \geqslant c_s.$$

Observaţii.

— Deoarece diametrele de calcul ale mufei d_{mmed} sau d_m sînt mai mari decît ale cepului d_{cmed} sau, respectiv, d_c, calculul filetului mufei este obligatoriu numai în cazul cînd aceasta este executată dintr-un material cu valori inferioare pentru proprietăţile mecanice, în raport cu ale cepului.

— Pentru situaţiile în care G_0 reprezintă forţă de apăsare, secţiunile (posibil) critice sînt indicate în tabelul 5.4, iar expresiile solicitărilor unitare, din etapa a doua funcţională, tabelul 5.5. Pentru această situaţie, la calculul de verificare se consideră

$$\sigma_{su} = (F + K_G \cdot G)/A_u \leqslant \sigma_{cmin}/c_s \tag{5.10}$$

pentru rezistenţa la strivire a umărului, $\sigma'_{a(c \text{ sau } m)}$, $\sigma'_{r(c \text{ sau } m)}$, $\sigma'_{t(c \text{ sau } m)}$ şi $\tau'_{t(c \text{ sau } m)}$ pentru eforturile unitare compuse $\sigma'_{red(c \text{ sau } m)}$, conform relaţiilor (5.6) şi expresiilor din tabelul 5.5,

$$\sigma_{ic} = 3K_s(t + j) F \sin u/\pi n_s \cdot d_{cmed} \cdot l_s^2 \text{ şi}$$

$$\tau_{fc} = K_s \cdot F \sin u/\pi n_s \cdot d_{cmed} \cdot l_s, \text{ la cep, respectiv} \tag{5.11}$$

$$\sigma_{im} = 3K_s(t + j) F \sin u/\pi n_s \cdot d_{mmed} \cdot l_s^2 \text{ şi}$$

$$\tau_{fm} = K_s \cdot F \sin u/\pi n_s \cdot d_{mmed} \cdot l_s, \text{ la mufă}$$

pentru eforturile unitare de încovoiere şi de forfecare din filete (în care, pentru îmbinările cilindrice, d_{cmed} şi d_{mmed} sînt egale cu d_c şi, respectiv, cu d_m),

$$\sigma_{redfc} = \sqrt{\sigma_{ic}^2 + 3\tau_{fc}^2} \leqslant \sigma_{cc}/c_c \text{ şi}$$

$$c_{redfc} = \sigma_{cc}/\sigma_{redfc} \geqslant c_c, \text{ la cep, respectiv} \tag{5.12}$$

$$\sigma_{redfm} = \sqrt{\sigma_{im}^2 + 3\tau_{fm}^2} \leqslant \sigma_{cm}/c_m \text{ şi}$$

$$c_{redfm} = \sigma_{cm}/\sigma_{redfm} \geqslant c_m, \text{ la mufă}$$

Tabelul 5.4. Secțiunile critice (G_o – forță de apăsare)

Nr. crt	Simbolul tipului constructiv al îmbinării	Secțiunile (posibil) critice ale elementului de îmbinare	Tipul eforturilor unitare (simbolul secțiunii critice) corespunzător etapelor de solicitare:	
			1 (aplicarea momentului de strîngere M_F)	2 (aplicarea forței de apăsare G_o, a momentului M_F și a presiunii p_i)
1	IKE, ICE	Suprafața umărului de strîngere	—	Strivire (S_U)
2		Secțiunea cepului	Întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)	întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)
3		Secțiunea mufei	compres, eforturi radiale și torsiune (S_1)	compres., eforturi radiale și torsiune (S_1)
4		Secțiunea filetului cepului	Încovoiere și forfecare (S_{fc})	—
5		Secțiunea filetului mufei	încovoiere și forfecare (S_{fm})	—
6		Suprafața de contact a filetului	Strivire (S_{sf})	—
7	IKI, ICI	Suprafața umărului de strîngere	—	Strivire (S_U)
8		Secțiunea cepului	Întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)	Întindere, eforturi radiale și torsiune (S_1)
9		Secțiunea mufei	compres, eforturi radiale și torsiune (S_1)	compres., eforturi radiale și torsiune (S_1)
10		Secțiunea filetului cepului	Încovoiere și forfecare (S_{fc})	—
11		Sectiunea filetului mufei	Încovoiere și forfecare (S_{fm})	—
12		Suprafața de contact a filetului	Strivire (S_{sf})	—

Tabelul 5.5. Expresiile solicitărilor unitare în etapa a doua funcțională (G_o - forță de apăsare)

Nr. crt.	Simbolul tipului constructiv al îmbinării	Elementul de îmbinare	Eforturile axiale, σ'_a (c sau m)	Eforturile radiale, σ'_r (c sau m)	Eforturile tangențiale, σ'_t (c sau m)	Eforturile la torsiune τ'_t (c sau m)
1	IKE	CEPUL	$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u - K_p G}{d_c^2 - d^2}$	$-p_i$	$-\left[2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p\cdot G)}{\pi l_f}+p_i\right]$	$\frac{16\,d_c}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot\frac{K(F\sin u - K_p G)}{M+(K_e\cdot K_G - K\cdot K_p)G}M_F$
2		MUFA	$-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\cdot\sin u + K_G G\sin u}{D^2-d_{m1}^2}$	$-\left[\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}+p_i\right]$	$\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\left[\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p\cdot G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}+p_i\right]$	$\frac{16D}{\pi(D^4-d_{in}^4)}\cdot\frac{K_e(F+K_G\cdot G)}{M+(K_e\cdot K_G - K\cdot K_p)G}M_F$
3	ICE	CEPUL	$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u - K_p\cdot G}{d_c^2-d^2}$	$-p_i$	$-\left[2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p\cdot G}{\pi l_f}+p_i\right]$	$\frac{16\,d_c}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot\frac{K(F\sin u - K_p\cdot G)}{M+(K_e K_G - K\cdot K_p)G}M_F$
4		MUFA	$-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u + K_G G\sin u}{D^2-d_m^2}$	$-\left[\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}+p_i\right]$	$\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\left[\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p\cdot G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}+p_i\right]$	$\frac{16\,D}{\pi(D^4-d_{in}^4)}\cdot\frac{K_e(F+K_G\cdot G)}{M+(K_e\cdot K_G - K\cdot K_p)G}M_F$
5	IKI	CEPUL	$-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u + K_G G\sin u}{d_{c_1}^2-d^2}$	$-p_i$	$-2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi l_f}+\frac{d_{med}^2+d^2}{d_{med}^2-d^2}p_i$	$\frac{16\,d_{c_1}}{\pi(d_{c_1}^4-d^4)}\cdot\frac{K_e(F+K_G\cdot G)}{M+(K_e\cdot K_G - K\cdot K_p)G}M_F$
6		MUFA	$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u - K_p\cdot G}{D^2-d_m^2}$	$-\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$\frac{16D}{\pi(D^4-d_m^4)}\cdot\frac{K(F\sin u - K_p G)}{M+(K_e\cdot K_G - K\cdot K_p)G}M_F$
7	ICI	CEPUL	$-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u + K_G G\sin u}{d_c^2-d^2}$	$-p_i$	$-2\frac{d_{med}}{d_{med}^2-d^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi l_f}+\frac{d_{med}^2+d^2}{d_{med}^2-d^2}p_i$	$\frac{16\,d_c}{\pi(d_c^4-d^4)}\cdot\frac{K_e(F+K_G G)}{M+(K_e K_G - K K_p)G}M_F$
8		MUFA	$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{F\sin u - K_p\cdot G}{D^2-d_m^2}$	$-\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$\frac{D^2+d_{med}^2}{D^2-d_{med}^2}\cdot\frac{K_{RD}(F\sin u - K_p G)}{\pi d_{med}\cdot l_f}$	$\frac{16D}{\pi(D^4-d_m^4)}\cdot\frac{K(F\sin u - K_p\cdot G)}{M+(K_e\cdot K_G - K K_p)G}M_F$

pentru rezistențele reduse și coeficienții de siguranță corespunzători din filetele cepului și al mufei,

$$\sigma_{sf} = K_N \cdot K_s \cdot F \sin u/\pi n_s(t - j)\, d_{med} \cdot \frac{1}{\cos \alpha'} \leqslant \sigma_{cmin}/c_s \text{ și} \qquad (5.13)$$

$$c_{sf} = \sigma_{cmin}/\sigma_{sf} \geqslant c_s$$

pentru rezistențele la strivire a spirelor filetului și coeficientului de siguranță corespunzător (restul relațiilor de calcul fiind identice cu cele din situațiile în care G_0 reprezintă forța de tracțiune).

De asemenea, se constată că, în conformitate cu relațiile (2.12), (4.16) și (4.17), expresiile analitice ale momentelor de torsiune transmise prin filet și prin umăr, în a doua etapă funcțională, sînt

$$M_f = K(F \sin u - K_p \cdot G) M_F/[M + (K_e \cdot K_G - K \cdot K_p)G] \text{ și, respectiv,}$$

$$M_u = K_e(F + K_G \cdot G) M_F/[M + (K_e \cdot K_G - K \cdot K_p)G]. \qquad (5.14)$$

5.2. CALCULUL PENTRU DETERMINAREA CAPACITĂȚII

Fiind date valorile maxime ale solicitărilor exterioare, caracteristicile mecanice și dimensiunile elementelor de îmbinare, determinarea capacității portante a îmbinării s-a realizat corespunzător etapelor de solicitare.

Pentru calculul momentului de strîngere maxim admis, M_{max}, se utilizează coeficienții de capacitate (la preluarea momentului de strîngere) K_t, proveniți din relațiile (5.1)...(5.8) și care corespund secțiunilor (posibil) critice din îmbinare, tabelele 5.6....5.9, adică de la (2.4),

$$M_{max} = K_u \cdot F_{max}, \qquad (5.15)$$

în care

$$F_{max} = \text{minim}\,(F_{maxu}, F_{maxc}, F_{maxm}, F_{maxfc}, F_{maxfm}, F_{maxsf})$$

reprezintă forța maximă admisă (capacitatea) în îmbinare, la aplicarea momentului de strîngere, iar

$$F_{maxu} = A_u \cdot \sigma_{cmin}/c_s,\ F_{maxc} = K_{\sigma c} \cdot \sigma_{cc}/c_c,$$

$$F_{maxm} = K_{\sigma m} \cdot \sigma_{cm}/c_m,\ F_{maxfc} = K_{\sigma fc} \cdot \sigma_{cc}/c_c, \qquad (5.16)$$

$$F_{maxfm} = K_{\sigma fm} \cdot \sigma_{cm}/c_m \text{ și } F_{maxsf} = K_{psf} \cdot \sigma_{cmin}/c_s$$

sînt capacitățile secțiunilor critice corespunzătoare, din îmbinare.

Pentru cea de a doua etapă funcțională, în care acționează cele trei componente ale regimului tehnologic de foraj, forța de tracțiune G_0, momentul M_F și presiunea p_t, capacitatea îmbinării este definită de dome-

Tabelul 5.6 Coeficienții de capacitate K_i, pentru IKE

Nr. crt.	Simbol	Zona posibil critică	Relația de calcul
1	A_u	Umărul de strîngere (Suprafața de contact S_u)	$\pi(D_s^2 - d_s^2)/4 \sin u$
2	$K_{\sigma c}$	Cepul (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sin u \sqrt{4/(d_c^2 - d^2)^2 + K_R^2 \cdot d_{med}^2 / l_f^2 (d_{med}^2 - d^2)^2 + 192 K^2 d_c^2/(d_c^4 - d^4)^2}$
3	$K_{\sigma m}$	Mufa (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sqrt{4 \sin^2 u/(D^2 - d_{m1}^2)^2 + K_R^2 (D^4 + d_{med}^4) \sin^2 u / 2 d_{med}^2 \cdot l_f^2 (D^2 - d_{med}^2)^2 + 192 K_e^2 D^2/(D^4 - d_{m1}^4)^2}$
4	$K_{\sigma fc}$	Filetul cepului (Secțiunea S_{fc})	$\pi n_s \cdot d_{cmed} l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9(t+j)^2 + 3 l_s^2}$
5	$K_{\sigma fm}$	Filetul mufei (Secțiunea S_{fm})	$\pi n_s \cdot d_{m\,med} \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9(t+j)^2 + 3 l_s^2}$
6	$K_{psf}^{(1)}$	Suprafața filetului (Suprafața de contact S_{sf})	$\pi n_s (t-j) \cdot d_{med} / K_{N(ND)} \; K_S \cdot \sin u \cos \alpha'$

Tabelul 5.7. Coeficienții de capacitate K_i, pentru ICE

Nr. crt	Simbol	Zona posibil critică	Relația de calcul
1	A_u	Umărul de strîngere (Suprafața de contact' Su)	$\pi(D_s^2 - d_s^2)/4 \sin u$
2	$K_{\sigma t}$	Cepul (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sin u \sqrt{4/(d_c^2 - d^2)^2 + K_R^2 \cdot d_{med}^2 / l_f^2 (d_{med}^2 - d^2)^2 + 192 K^2 d_c^2/(d_c^4 - d^4)^2}$
3	$K_{\sigma m}$	Mufa (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sqrt{4 \sin^2 u/(D^2 - d_m^2)^2 + K_R^2 (D^4 + d_{med}^4) \sin^2 u/2 d_{med}^2 \cdot l_f^2 (D^2 - d_{med}^2)^2 + 192 K_e^2 D^2/(D^4 - d_m^4)^2}$
4	$K_{\sigma fc}$	Filetul cepului (Secțiunea S_{fc})	$\pi n_s \cdot d_c \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9 \cdot (t+j)^2 + 3 l_s^2}$
5	$K_{\sigma fm}$	Filetul mufei (Secțiunea S_{fm})	$\pi n_s \cdot d_m \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9 \cdot (t+j)^2 + 3 l_s^2}$
6	$K_{psf}^{(')}$	Suprafața filetului (Suprafata de contact S_{sr})	$\pi n_s \cdot (t-j) \cdot d_{med} / K_{N(ND)} K_S \sin u \cos \alpha'$

Tabelul 5.8. Coeficienții de capacitate K_i, pentru ÎKÎ

Nr. crt	Simbol	Zona posibil critică	Relația de calcul
1	A_u	Umărul de strîngere (Suprafața de contact S_u)	$\pi(D_s^2 - d_s^2)/4 \sin u$
2	$K_{\sigma c}$	Cepul (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sqrt{4 \sin^2 u/(d_{c1}^2 - d^2)^2 + K_R^2 \cdot d_{med}^2 \cdot \sin^2 u / l_f^2 (d_{med}^2 - d^2)^2 + 192 K_c^2 \cdot d_c^2/(d_{c1}^4 - d^4)^2}$
3	$K_{\sigma m}$	Mufa (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sin u \sqrt{4/(D^2 - d_m^2)^2 + K_R^2 (D^4 + d_{med}^4)/2 d_{med}^2 \cdot l_f^2 (D^2 - d_{med}^2)^2 + 192 K^2 \cdot D^2/(D^4 - d_m^4)^2}$
4	$K_{\sigma fc}$	Filetul cepului (Secțiunea S_{fc})	$\pi n_s \cdot d_{cmed} \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9(t+j)^2 + 3l_s^2}$
5	$K_{\sigma fm}$	Filetul mufei (Secțiunea S_{fm})	$\pi n_s \cdot d_{mmed} \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9(t+j)^2 + 3l_s^2}$
6	$K_{fsf}^{(1)}$	Suprafața filetului (Suprafata de contact S_{sf})	$\pi n_s \cdot (t-j) \cdot d_{med} / K_{N(ND)} K_S \sin u \cos \alpha'$

Tabelul 5.9. Coeficienții de capacitate K_I, pentru ICi

Nr. crt.	Simbol	Zona posibil critică	Relația de calcul
1	A_u	Umărul de strîngere (Suprafața de contact S_u)	$\pi(D_s^2 - d_s^2)/4 \sin u$
2	$K_{\sigma c}$	Cepul (Secțiunea S_1)	$\pi/2\sqrt{4\sin^2 u/(d_c^2 - d^2)^2 + K_R^2 \cdot d_{med}^2 \cdot \sin^2 u / l_f^2 (d_{med}^2 - d^2)^2 + 192 K_e^2 \cdot d_c^2/(d_c^4 - d^4)^2}$
3	$K_{\sigma m}$	Mufa (Secțiunea S_1)	$\pi/2 \sin u \sqrt{4/(D^2 - d_m^2)^2 + K_R^2 (D^4 + d_{med}^4)/2 d_{med}^2 \cdot l_f^2 (D^2 - d_{med}^2)^2 + 192 K^2 \cdot D^2/(D^4 - d_m^4)^2}$
4	$K_{\sigma fc}$	Filetul cepului (Secțiunea S_{fc})	$\pi n_s \cdot d_c \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9(t+j)^2 + 3 l_s^2}$
5	$K_{\sigma fm}$	Filetul mufei (Secțiunea S_{fm})	$\pi n_s \cdot d_m \cdot l_s^2 / K_s \cdot \sin u \sqrt{9(t+j)^2 + 3 l_s^2}$
6	$K_{rsf}^{(\prime)}$	Suprafața filetului (Suprafața de contact S_{sf})	$\pi n_s \cdot (t-j) \cdot d_{med} / K_{N(ND)} \cdot K_S \cdot \sin u \cdot \cos \alpha'$

niul de utilizare maxim admis, reprezentînd suprafeţele de sub curbele de egală rezistenţă ale variaţiilor $G_0(M_F, p_i)$, provenind din aplicarea relaţiei (5.0) (fig. 5.2). Domeniul de utilizare admis reprezintă minima dintre capacităţile secţiunilor critice de la cep, mufă şi filete.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor de gradul doi provenite din (5.6) şi avîndu-se în vedere (2.5), rezultă expresiile funcţiilor forţei de tracţiune G_0 (în raport cu M_F şi p_i), reprezentînd capacităţile cepului şi mufei,

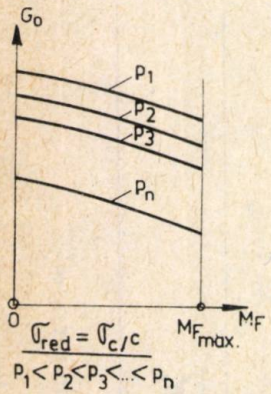


Fig. 5.2

$$G_{0cE}(M_F, p_i) \leqslant (\sqrt{V_{cE}^2 + W_{cE}} - V_{cE} + F \sin u)/K_p - G_{pi} \quad (5.17)$$

şi

$$G_{0mE}(M_F, p_i) \leqslant \sqrt{V_{mE}^2 + W_{mE}} - V_{mE} - G_{pi} \quad (5.18)$$

pentru îmbinările cu umăr exterior, respectiv

$$G_{0cI}(M_F, p_i) \leqslant \sqrt{V_{cI}^2 + W_{cI}} - V_{cI} - G_{pi} \quad (5.19)$$

şi

$$G_{0mI}(M_F, p_i) \leqslant (\sqrt{W_{mI}} - F \sin u)/K_p - G_{pi} \quad (5.20)$$

pentru îmbinările cu umăr interior, în care coeficienţii V şi W sînt conform tabelelor 5.10 şi 5.11. Întrucît în relaţiile (5.17) şi (5.20) M_F nu este exprimat explicit şi conform (5.3)

$$M_F = \{1 + K_e[F - K_G(G_0 + G_{pi})]/K[F \sin u + K_p(G_0 + G_{pi})]\} M_f, \quad (5.21)$$

pentru determinarea capacităţilor cepului îmbinărilor cu umăr exterior G_{0cE} şi a mufei îmbinărilor cu număr interior G_{0mI} este necesară rezolvarea suplimentară a sistemelor de ecuaţii de gradul patru, formate din (5.17) şi (5.21), respectiv din (5.20) şi (5.21). Rezolvarea acestor sisteme este posibilă prin procedeele cunoscute, direct (prin substituţie şi aplicarea formulelor lui Cardan), sau de rezolvare aproximativă. Astfel, dacă se consideră că cepul îmbinărilor cu umăr exterior şi mufa îmbinărilor cu umăr interior transmit momentul corespunzător capacităţii lor, adică, respectîndu-se relaţiile (2.10), (4.10) şi (4.11),

$$M_f \cong K(F \sin u + K_p \cdot G), \quad (5.22)$$

expresiile (5.17) şi (5.20) devin

$$G'_{0cE} \leqslant (\sqrt{V'^2_{cE} + W'_{cE}} - V'_{cE} - F \sin u)/K_p - G_{pi}, \quad (5.23)$$

reprezentînd o valoare aproximativă pentru G_{0cE} şi, respectiv,

$$G'_{0mI} \leqslant (\sqrt{W'_{mI}} - F \sin u)/K_p - G_{pi} \quad (5.24)$$

COEFICIENȚII ECUAȚIILOR $G_0(M_F, p_i) = 0$

Tabelul 5.10

Nr. crt.	SIMBOLUL TIPULUI CONSTRUCTIV AL ÎMBINARII	ELEMENTUL DE ÎMBINARE (indicii de simbolizare ai coeficienților)	A	B	C	D
1.	IKE , ICE	CEPUL (cE)	$\frac{16}{\pi^2(d_c^2-d^2)^2}$	$\frac{2K_{RD}\,d_{med}}{\pi\, l_f(d_{med}^2-d^2)}$	$\frac{768\cdot d_c^2}{\pi^2(d_c^4-d^4)^2}$	—
2.		MUFA (mE)	$\frac{16}{\pi^2(D^2-d_m^2)^2}$	$1+\frac{(D^2+d_{med}^2)^2}{(D^2-d_{med}^2)^2}$	$\frac{K_{RD}}{\pi\, d_{med}\cdot l_f}$	$\frac{768\cdot D^2}{\pi^2(D^4-d_m^4)^2}$
3.	IKI , ICI	CEPUL (cI)	$\frac{16}{\pi^2(d_c^2-d^2)^2}$	$\frac{d_{med}^2+d^2}{d_{med}^2-d^2}$	$\frac{2K_{RD}\cdot d_{med}}{\pi\cdot l_f(d_{med}^2-d^2)}$	$\frac{768\cdot d_c^2}{\pi^2(d_c^4-d^4)^2}$
4.		MUFA (mI)	$\frac{16}{\pi^2(D^2-d_m^2)^2}$	$\left[1+\frac{(D^2+d_{med}^2)^2}{(D^2-d_{med}^2)^2}\right]\frac{K_{RD}^2}{\pi^2 d_{med}^2\cdot l_f^2}$	$\frac{768\,D^2}{\pi^2(D^4-d_m^4)^2}$	—

COEFICIENȚII FUNCȚIILOR $G_0(M_F ; p_i)$

Tabelul 5.11

Nr. crt.	SIMBOLUL TIPULUI CONSTRUCTIV AL ÎMBINĂRII	ELEMENTUL DE IMBINARE (INDICII DE SIMBOLIZARE AI COEFICIENTILOR)	V	W	V'	W'
1.	IKE, ICE	CEPUL (cE)	$\dfrac{B_{cE}\cdot p_i}{A_{cE}+B_{cE}^2}$	$\dfrac{\frac{\sigma_{cc}^2}{c_c^2}-2p_i^2-C_{cE}\cdot M_f^{2'}}{A_{cE}+B_{cE}^2}$	$\dfrac{B_{cE}\cdot p_i}{A_{cE}+B_{cE}^2+C_{cE}K^2}$	$\dfrac{\frac{\sigma_{cc}^2}{c_c^2}-2p_i^2}{A_{cE}+B_{cE}^2+C_{cE}K^2}$
2.		MUFA (mE)	$B_{mE}\cdot C_{mE}\cdot K_p\cdot\dfrac{C_{mE}\cdot F\sin u+p_i}{A_{mE}+B_{mE}\cdot C_{mE}^2\cdot K_p^2}$	$\dfrac{\frac{\sigma_{cm}^2}{c_m^2}-B_{mE}p_i^2-2B_{mE}C_{mE}p_iF\sin u-B_{mE}C_{mE}^2F^2\sin^2u-D_{mE}M_F^2}{A_{mE}+B_{mE}\cdot C_{mE}^2\cdot K_p^2}$	—	—
3.	IKI, ICI	CEPUL cI	$\dfrac{C_{cI}^2K_p\cdot F\sin u-B_{cI}C_{cI}\cdot K_p\cdot p_i}{A_{cI}+C_{cI}^2\cdot K_p^2}$	$\dfrac{\frac{\sigma_{cc}^2}{c_c^2}-(1+B_{cI}^2)p_i^2+2B_{cI}C_{cI}p_iF\sin u-C_{cI}^2F^2\sin^2u-D_{cI}M_F^2}{A_{cI}+C_{cI}^2\cdot K_p^2}$	—	—
4.		MUFA (mI)	—	$\dfrac{\frac{\sigma_{cm}^2}{c_m^2}-C_{mI}\cdot M_f^2}{A_{mI}+B_{mI}}$	—	$\dfrac{\sigma_{cm}^2}{A_{mI}+B_{mI}+C_{mI}K^2}$

reprezentînd o valoare aproximativă pentru G_{0mI}, în care V'_{cE}, W'_{cE} și W'_{mI} sînt în conformitate cu tabelele 5.10 și 5.11 ; pe de altă parte, din (5.17) și (5.20) rezultă expresiile

$$M_{fcE} = \sqrt{[\sigma_{cc}^2/c_c^2 - (A_{cE} + B_{cE}^2)Q^2 - 2B_{cE}\cdot p_i\cdot Q - 2p_i^2]/C_{cE}} \quad (5.25)$$

și, respectiv,

$$M_{fmI} = \sqrt{[\sigma_{cm}^2/c_m^2 - (A_{mI} + B_{mI})Q^2]/C_{mI}}, \quad (5.26)$$

în care

$$Q = F\sin u + K_p(G_0 + G_{pi}). \quad (5.27)$$

Plecîndu-se de la valorile G'_0 calculate conform (5.23) și (5.24), se calculează prin încercări iterative, pentru diferite G_0, valorile M_{fcE} și M_{fmI} care satisfac relația (5.21), pentru valorile M_F date.

Capacitățile filetelor elementelor de îmbinare rezultă din relațiile (5.8) și (5.9), indiferent de tipul constructiv al îmbinării, adică

$$G_{0fc}(p_i) \leqslant (K_{\sigma fc}\cdot \sigma_{cc}/c_c - F)\sin u/K_p - G_{pi}$$

pentru filetul cepului,

$$G_{0fm}(p_i) \leqslant (K_{\sigma fm}\cdot \sigma_{cm}/c_m - F)\sin u/K_p - G_{pi} \quad (5.28)$$

pentru filetul mufei și

$$G_{0sf}(p_i) \leqslant (K'_{psf}\cdot \sigma_{cmin}/c_s - F)\sin u/K_p - G_{pi}$$

pentru suprafața de contact a filetelor.

Întrucît eforturile unitare din filete nu sînt influențate în mod direct de momentele de torsiune din îmbinare, rezultă că G_0 conform (5.28) nu variază în raport cu M_F (fig. 5.3).

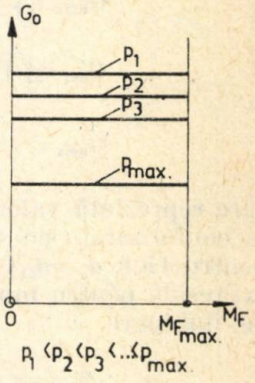


Fig. 5.3

Observație

Pentru situațiile în care G_0 este forță de apăsare, utilizînd relațiile din tabelul 5.5, conform (5.6), pentru a doua etapă de solicitare și rezolvînd corespunzător, rezultă expresiile $G_0(M_F, p_i)$, reprezentînd capacitățile cepului și mufei, astfel

$$G_{0cE}(M_F, p_i) \leqslant (-\sqrt{V_{cE}^2 + W_{cE}} + F\sin u)/K_p + G_{pi} \quad (5.29)$$

și

$$G_{0mE}(M_F, p_i) \leqslant \sqrt{V_{mE}^2 + W_{mE}} + V_{mE} + G_{pi} \quad (5.30)$$

pentru îmbinările cu umăr exterior (în cazul IKE, d_m devenind d_{m1}), respectiv

$$G_{0cI}(M_F, p_i) \leqslant \sqrt{V_{cI}^2 + W_{cI}} - V_{cI} + G_{pi} \tag{5.31}$$

şi

$$G_{0mI}(M_F, p_i) \leqslant (-\sqrt{W_{mI}} + F \sin u)/K_p + G_{pi} \tag{5.32}$$

pentru îmbinările cu umăr interior (în cazul IKI, d_c devenind d_{c1}), în care coeficienţii V şi W sînt conform tabelelor 5.10 şi 5.12. Întrucît în relaţiile (5.29)...(5.32) M_F nu este exprimat explicit, fiecare din aceste relaţii, împreună cu relaţia corespunzătoare (5.14), formează sisteme de ecuaţii de gradul patru, prin a căror rezolvare se obţin capacităţile G_0 ale elementelor îmbinărilor de diferite tipuri. Similar situaţiilor în care G_0 este forţă de tracţiune, dacă iniţial se consideră că elementele de îmbinare transmit momente la nivelul capacităţii lor, adică ţinîndu-se seama de relaţiile (2.13), (4.16) şi (4.17),

$$M_F \cong K(F \sin u - K_p \cdot G) \text{ şi}$$

$$M_u \cong K_e(F + K_G \cdot G), \tag{5.33}$$

expresiile (5.29)...(5.32) devin

$$G'_{0cE} \leqslant (-\sqrt{V'^2_{cE} + W'_{cE}} + V'_{cE} + F \sin u)/K_p + G_{pi}, \tag{5.34}$$

$$G'_{0mE} \leqslant \sqrt{V'^2_{mE} + W'_{mE}} + V'_{mE} + G_{pi}, \tag{5.35}$$

$$G'_{0cI} \leqslant \sqrt{V'^2_{cI} + W'_{cI}} - V'_{cI} + G_{pi} \tag{5.36}$$

şi

$$G'_{0mI} \leqslant (-\sqrt{W'_{mI}} + F \sin u)/K_p + G_{pi} \tag{5.37}$$

care reprezintă valori aproximative pentru G_0, coeficienţii V' şi W' fiind în conformitate cu tabelele 5.10 şi 5.12 (pentru IKE, d_m devine d_{m1}, iar pentru IKI, $d_c - d_{c1}$); pe de altă parte, din relaţiile (5.29)...(5.32) rezultă expresiile pentru momentele reale transmise corespunzător de elementele de îmbinare,

$$M_{fcE} = \sqrt{\{\sigma_{cc}^2/c_c^2 - A_{cE}[K_p(G_0 - G_{pi}) - F \sin u]^2 - p_i^2 - \mathscr{A}^2\}/C_{cE}}, \tag{5.38}$$

$$M_{umE} = \sqrt{\left\{\frac{\sigma_{cm}^2}{c_m^2} - A_{mE}[F \sin u + K_G(G_0 - G_{pi}) \sin u]^2 - B_{mE}\mathscr{B}^2\right\} \Big/ D_{mE}}, \tag{5.39}$$

$$M_{ucI} = \sqrt{\left\{\frac{\sigma_{cc}^2}{c_c^2} - A_{cI}[F \sin u + K_G(G_0 - G_{pi}) \sin u]^2 - p_i^2 - \mathscr{C}^2\right\} \Big/ D_{cI}} \tag{5.40}$$

COEFICIENTII FUNCTIILOR $G_o(M_F, p_i)$ (G_o - forță de apăsare)

Tabelul 5.12

Nr. crt.	Simbolul constructiv al îmbinării	Elementul de îmbinare (indicii de simbolizare ai coeficienților)	V	W	V'	W'
1.	IKE, ICE	CEPUL (cE)	$\frac{B_{cE} \cdot p_i}{A_{cE} + B_{cE}^2}$	$\frac{\frac{\sigma_{cc}^2}{C_c^2} - 2p_i^2 - C_{cE} M_f^2}{A_{cE} + B_{cE}^2}$	$\frac{B_{cE} \cdot p_i}{A_{cE} + B_{cE}^2 + C_{cE} K^2}$	$\frac{\frac{\sigma_{cc}^2}{C_c^2} - 2p_i^2}{A_{cE} + B_{cE} + C_{cE} K^2}$
2.		MUFA (mE)	$\frac{B_{mE} C_{mE}^2 K_p F \sin u + B_{mE} C_{mE} K_p p_i - A_{mE} K_G F \sin^2 u}{A_{mE} K_G^2 \sin^2 u + B_{mE} C_{mE}^2 K_p^2}$	$\frac{\frac{\sigma_{cm}^2}{C_m^2} - F^2 \sin^2 u (A_{mE} + B_{mE} C_{mE}^2) - B_{mE} \frac{p_i}{2} (p_i + 2 C_{mE} F \sin u) - D_{mE} M_f^2}{A_{mE}^2 K_G^2 \sin^2 u + B_{mE} C_{mE}^2 K_p^2}$	$\frac{B_{mE} C_{mE} K_p (C_{mE} F \sin u + p_i) - A_{mE} K_G F \sin^2 u - D_{mE} K_e^2 K_G F}{A_{mE} K_G^2 \sin^2 u + B_{mE} C_{mE}^2 K_p^2 + D_{mE} K_G^2 K_e^2}$	$\frac{\frac{\sigma_{cm}^2}{C_m^2} - F^2 \sin^2 u (A_{mE} + B_{mE} C_{mE}^2) - B_{mE} \frac{p_i}{2} (p_i + 2 C_{mE} F \sin u) - D_{mE} K_e^2 F^2}{A_{mE} K_G^2 \sin^2 u + B_{mE} C_{mE}^2 K_p^2 + D_{mE} K_G^2 K_e^2}$
3.	IKI, ICI	CEPUL (cI)	$\frac{A_{cI} K_G F \sin^2 u + B_{cI} C_{cI} K_p p_i - C_{cI}^2 K_p F \sin u}{A_{cI} K_G^2 \sin^2 u + C_{cI}^2 K_p^2}$	$\frac{\frac{\sigma_{cc}^2}{C_c^2} - A_{cI} F^2 \sin^2 u - \left(1 + B_{cI}^2\right) p_i^2 + C_{cI} F \sin u \left(2 B_{cI} p_i - C_{cI} F \sin u\right) - D_{cI} M_f^2}{A_{cI} K_G^2 \sin^2 u + C_{cI}^2 K_p^2}$	$\frac{A_{cI} K_G F \sin^2 u + B_{cI} C_{cI} K_p p_i + D_{cI} K_e^2 K_G F - C_{cI}^2 K_p F \sin u}{A_{cI} K_G^2 \sin^2 u + C_{cI}^2 K_p^2 + D_{cI} K_e^2 K_G^2}$	$\frac{\frac{\sigma_{cc}^2}{C_c^2} - A_{cI} F^2 \sin^2 u - \left(1 + B_{cI}^2\right) p_i^2 + 2 B_{cI} C_{cI} F \sin u - F^2 \left(C_{cI}^2 \sin^2 u + D_{cI} K_e^2\right)}{A_{cI} K_G^2 \sin^2 u + C_{cI}^2 K_p^2 + D_{cI} K_e^2 K_G^2}$
4.		MUFA (mI)	———	$\frac{\frac{\sigma_{cm}^2}{C_m^2} - C_{mI} M_f^2}{A_{mI} + B_{mI}}$	———	$\frac{\frac{\sigma_{cm}^2}{C_m^2}}{A_{mI} + B_{mI} + C_{mI} \cdot K^2}$

unde $\mathscr{A} = p_i - B_{cE} \cdot K_p(G_0 - G_{pi}) + B_{cE} \cdot F \sin u$,

$$\mathscr{B} = C_{mE} \cdot F \sin u - C_{mE} \cdot K_p(G_0 - G_{pi}) + p_i,$$

$$\mathscr{C} = B_{cI} \cdot p_i - C_{cI} \cdot F \sin u + C_{cI} \cdot K_p(G_0 - G_{pi})$$

şi

$$M_{fmI} = \sqrt{\left\{ \frac{\sigma_{cm}^2}{c_m^2} - (A_{mI} + B_{mI})[F \sin u - K_p(G_0 - G_{pi})]^2 \right\} \Big/ C_{mI}}. \quad (5.41)$$

Plecîndu-se de la valorile G_0' rezultate conform (5.34), (5.35), (5.36) şi (5.37), se calculează corespunzător, prin încercări iterative, pentru diferite G_0, utilizînd relaţiile (5.38), (5.39), (5.40), şi respectiv (5.41), valorile M_{fcE}, M_{umE}, M_{ucI} şi M_{fmI}, care satisfac relaţiile (5.14), pentru valorile M_F date. Capacităţile umerilor îmbinărilor corespund relaţiei

$$G_0 \leqslant (\sigma_{cmin} \cdot A_u/c_s - F \sin u)/K_G \sin u + G_{pi} \quad (5.42)$$

(capacităţile maxime ale filetelor de îmbinare corespunzînd primei etape funcţionale de solicitare).

Primită la redacţie la 23 noiembrie 1983

BIBLIOGRAFIE

5.1. D. CONSTANTINESCU, T. V. HUNCKER, I. MOHORA, M. PETRE, *Metodă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr. I, II*. St. cerc. mec. apl., **43**, **44**, *4*, *1*, 1984 (1985).
5.2. GH. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor*, vol. II, Edit. tehn., Bucureşti, 1957.
5.3. GH. MANEA, *Organe de maşini*, vol. I, Edit. tehn., Bucureşti, 1970.

CÎTEVA CONSIDERAŢII ASUPRA DEZVOLTĂRII MODELELOR MATEMATICE ALE MECANICII. II

de P. P. TEODORESCU
Universitatea din Bucureşti

Se prezintă un scurt istoric al dezvoltării mecanicii pînă la Newton, ca şi al mecanicii newtoniene şi al mecanicilor neclasice ; o atenţie specială este acordată mecanicii mediilor continue deformabile şi tendinţelor actuale de dezvoltare a mecanicii. Cu această ocazie se face şi o prezentare a dezvoltării mecanicii în România.

§ 3. SCURT ISTORIC AL DEZVOLTĂRII MECANICII

3.1. **Dezvoltarea mecanicii pînă la Newton. Mecanica newtoniană. Mecanici neclasice.** Omul a fost pus în legătură cu fenomenele mecanice din cele mai vechi timpuri, înaintea erei noastre ; cunoştinţele empirice i-au permis să-şi făurească unelte şi dispozitive mecanice, după cum rezultă şi din desenele şi basoreliefurile Egiptului antic şi Asiriei.

Începuturile mecanicii în epoca antică datează din secolele VI—V înaintea erei noastre, odată cu cele mai vechi însemnări. Mo Tzî, în China antică, prezintă unele noţiuni de mecanică privitoare la timp, mişcare, forţă în scrierile sale. La Anaximandru (610—546 î.e.n.), la Anaximene (585—525 î.e.n.), la Heraclit din Efes (540—470 î.e.n.) şi la şcoala lui Pitagora (571—477 î.e.n.) întîlnim referiri asupra materiei în mişcare. Anaxagoras din Clazomene (500—428 î.e.n.) consideră că există unele forţe datorită cărora corpurile cereşti nu cad unele spre altele. *Aporiile mişcării* (Ahile şi broasca ţestoasă, săgeata, stadionul, dihotomia, care sînt paradoxurile lui Zenon din Eleea (490—430 î.e.n.) (contribuie la stimularea studiilor asupra spaţiului, timpului, problemelor de continuitate şi discontinuitate. Archytas din Tarent (430—360 î.e.n.) inventează scripetele, şurubul şi unele aparate mecanice pentru trasarea curbelor ; lui i se atribuie primele lucrări scrise asupra mecanicii. Aristotel (384—322 î.e.n.) sesizează primul caracterul relativ al mişcării şi intuieşte principiul deplasărilor virtuale în studiul echilibrului pîrghiilor. Materialiştilor atomişti Democrit din Abdera (460—370 î.e.n.), Epicur (341—270 î.e.n.) şi Carus Lucretius (98—55 î.e.n.) le aparţin unele rezultate incipiente cu privire la căderea corpurilor şi structura materiei. Euclid (320—270 î.e.n.), autorul celebrelor „Elemente" ce stau la baza geometriei care-i poartă numele, aduce interesante contribuţii la statică. Arhimede (287—212 î.e.n.) a trăit la Siracuza în Sicilia, putînd fi considerat întemeietorul staticii ; el inventează diferite maşini simple şi defineşte centrul de greutate. Arhimede este figura cea mai importantă a mecanicii antice, lucrarea sa „Despre echili-

brul suprafeţelor plane şi al centrelor de greutate" fiind comparabilă cu „Elementele" lui Euclid. După Ctesibios (aprox. 200 sau 180 î.e.n.), Hiparh (190—120 î.e.n.), Filon din Bizanţ (a doua jumătate a secolului al II-lea î.e.n.) şi Posidonios din Rodos (135—84 î.e.n.), numele cel mai important este cel al lui Heron din Alexandria (sec. I î.e.n.), căruia i se datoreşte un important tratat privind mecanismele. Dintre romani menţionăm pe Marcus Vitruvius Pollio (50 î.e.n.—20 e.n.), care publică tratatul „De arhitectura".

La începutul erei noastre, Claudiu Ptolemeu (70—147) consideră sistemul stelar geocentric. Ma Kim (sec. al III-lea) crecază în China mecanisme cu roţi dinţate. Pappus (sec. al IV-lea) este autor al unor sinteze de rezultate cunoscute din matematică, astronomie şi mecanică; aici se găsesc şi celebrele probleme privitoare la centrele de greutate (reluate de Guldin). Reprezentant de frunte al ştiinţei bizantine este Proclos (410—485), care face numeroase comentarii asupra mecanicii. Filipon Ioan (Ioan Grămăticul, sec. al VI-lea) din Alexandria dezvoltă noţiunea de *impetus* (care face corpul să continue mişcarea fără acţiunea agentului exterior). Pînă în secolul al XII-lea, ştiinţa arabă este cea care reia şi amplifică aceste rezultate; menţionăm astfel pe Abu-Naşr-Muhammed ibn Muhammed al Farabi (870—951), care scrie „Despre mişcarea eternă a sferei cereşti", pe Abu Ali Al-Husein ibn Abdalla ibn Sina (zis Avicenna) (980—1037), filozof şi medic tadjic, care a considerat ca fundamentală mişcarea materiei, pe Ibn Ruşd zis Averroes (1126—1198) din Cordoba, care a comentat pe Aristotel, şi pe Al Bitrogi zis Alpetragius (sec. al XII-lea), care simplifică sistemul cosmic al lui Ptolemeu şi aplică „impetusul" la mişcarea corpurilor cereşti.

Odată cu secolul al XIII-lea apar marile şcoli europene, unde se traduc importante lucrări ale antichităţii şi evului mediu, ceea ce va face să se dezvolte ideile timpului; scolastica adaptează la cerinţele bisericii catolice multe dintre aceste idei. O interpretare critică a lui Aristotel va fi făcută, printre alţii, de Siger din Brabant (1235—1281), de Toma din Aquino (1226—1274) şi de Richard din Middletown (începutul sec. al XIV-lea). Curentul nominalist oglindeşte o oarecare libertate de gîndire şi poziţie, faţă de biserică, iniţiind metode de cercetare bazate pe experienţă; citäm astfel pe Pierre Abelard (Petrus Abaelardus (1079—1142), pe Roger Bacon (1214—1294), dar mai ales pe Jordanus din Nemore (Jordanus Nemorarius) (sec. al XIII-lea), care studiază mişcarea corpurilor grele pe o curbă şi conduce o adevărată şcoală de mecanică. De la sfîrşitul secolului al XIII-lea pînă în secolul al XV-lea apar antiscolasticii, dintre care menţionăm pe Jean Buridan (1300—1360), pe Nicolas Oresme (1323—1382), pe Filippo Brunelleschi (1377—1446), sculptor şi arhitect florentin, pe Thomas Bradwardine (1290—1349), reprezentant al şcolii de mecanică de la Oxford, pe Biagio Pelacani (Blasius din Parma) (? — 1416) şi pe cardinalul german Nicolaus Krebs (Nicolaus Cusanus) (1401—1464).

Secolul al XV-lea aduce cu sine Renaşterea; se fac cercetări pe bază experimentală, iar statica devine o disciplină închegată. Nicolaus Copernic (1473—1543) îşi expune concepţia heliocentrică asupra lumii în „De revolutionibus orbium coelestium" (Nürnberg, 1543); alte lucrări sînt publicate de Leone Battista Alberti (1404—1472) şi de Giorgio Valla

(1447—1500). Figura cea mai importantă a acestei epoci este Leonardo da Vinci (1452—1519), după care „mecanica este paradisul cunoștințelor matematice, pentru că, prin intermediul ei, ajungem la roadele matematicii"; el studiază legile căderii libere și ale frecării, introduce noțiunea de moment și aplică principiul deplasărilor virtuale. La progresul mecanicii în această perioadă contribuie și Jules César Scaliger (1484—1558), care adoptă numele de *motio* pentru noțiunea de impetus, Girolamo Cardan (1501—1576), Nicolo Fontana (Tartaglia) (1499 sau 1501—1557), Frederic Commandin din Urbino (1509—1575) și Giovanni Battista Benedetti (1530—1590). În secolele XVI—XVII are loc un nou avînt al mecanicii, tehnologiile diverselor ramuri de producție cunoscînd o deosebită dezvoltare și creînd premisele marii industrii de mai tîrziu. Apar „Academiile de științe" (la Roma, Accademia dei Lincei (1590), La Florența, Accademia del Cimento (1651), la Londra, Royal Society (1662—63), la Paris, Académie des sciences (1666) etc.), care contribuie la promovarea cercetărilor teoretice și experimentale. În secolul al XVII-lea se completează modelul matematic al mecanicii clasice. Simon Stevin (1548—1620), matematician și fizician flamand, rezolvă problema planului înclinat și enunță regula compunerii forțelor. Giordano Bruno (1548—1600) aduce argumente împotriva lui Aristotel, iar Luca Valerio (1552—1618) determină un număr de centre de greutate. Galileo Galilei (1564—1642) este unul din întemeietorii dinamicii moderne. Lui i se datoresc principiul inerției și principiul condițiilor inițiale, a căror formulare reprezintă un pas revoluționar în dezvoltarea mecanicii, punîndu-se definitiv capăt concepțiilor aristotelice; el formulează așa-numita „regulă de aur a mecanicii" și anume : *cît se cîștigă în forță se pierde în viteză* și studiază mișcarea unui proiectil în vid. Cele mai importante idei ale sale sînt cuprinse în „Dialogo di Galileo Galilei delle due massimi sistemi del mondo, il Tolemaico e il Copernicano" (1632) și în „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali "(Leyda, 1638). Francis Bacon (1561—1626) consideră mișcarea ca o proprietate a materiei și critică concepțiile scolastice în „Novum organum" (1620). Evangelista Torricelli (1608—1647), elev al lui Galilei, dezvoltă teoria mișcării corpurilor grele și a stabilității echilibrului. Johannes Kepler (1571—1630) pleacă de la observațiile lui Tycho de Brahe (1546—1601) asupra planetei Marte și în „De revolutionibus orbium coelestium" enunță cele trei legi celebre ale sale, care înlocuiesc mișcarea copernicană, presupusă circulară și uniformă, a planetelor cu mișcarea pe o elipsă. Alte contribuții la construcția modelului matematic al mecanicii se datoresc lui Tomaso Campanella (1568—1639), lui Salomon din Caus (1576—1630), lui Paul Guldin (1577—1643), care regăsește teoremele lui Pappus, lui Marin Mersenne (1588—1648), care prezintă opera lui Galilei la Paris, lui René Descartes (1596—1650), care studiază ciocnirea corpurilor și enunță teorema conservării impulsului, fiind primul care pune în evidență caracterul infinitezimal al deplasărilor virtuale, lui Pierre Fermat (1601—1665), căruia îi aparține „teorema timpului minim", lui Gilles Personne de Roberval (1602—1675), care s-a ocupat de pîrghii și balanțe, făcînd cercetări de statică și cinematică, lui Giovanni Alfonso Borelli (1608—1679), care pune bazele biomecanicii, lui John Wallis (1616—1703), care se ocupă de ciocnirea corpurilor neelastice, lui

Jacques Rohault (1620—1675), lui Pierre Varignon (1654—1722), care dezvoltă teoria momentelor, lui Christian Huygens (1629—1695), care studiază pendulul fizic, descoperă izocronismul pendulului cicloidal și inventează ceasul cu pendul, lui Cristoph Wren (1652—1723), lui Nicole Malebranche (1638—1715) și lui Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), care consideră „forța vie" drept caracteristică mecanică fundamentală a mișcării.

Dar cel care și-a atașat numele de primul model matematic al mecanicii, modelul mecanicii clasice, a fost Isaac Newton (1743—1727), ilustru matematician, fizician și astronom englez. El a definit noțiunea de masă, a generalizat noțiunea de forță și a formulat legile mecanicii în „Philosophiae naturalis principia mathematica" (Londra, 1686); tot Newton a descoperit legea atracției universale, verificînd, pe baza acestei legi, mișcarea planetelor în jurul Soarelui. Dar Newton a schițat și un vast plan de dezvoltare a științei astfel create; astăzi, mecanica clasică se dezvoltă în cadrul larg al celor trei legi fundamentale ca o știință teoretică și experimentală, care trebuie mereu să introducă concepte noi și să-și confrunte construcțiile teoretice cu realitatea.

În secolul al XVIII-lea începe revoluția industrială, ceea ce conduce și la o dezvoltare intensivă a mecanicii clasice; de asemenea, se înființează primele școli tehnice superioare, de exemplu Școala politehnică din Paris (1794) care, prin activitatea lui Gaspard Monge (1746—1818) și a lui Louis Poinsot (1777—1859), a avut un rol important în dezvoltarea mecanicii. Jacques (Jacob) Bernoulli (1654—1705) s-a ocupat de dinamica sistemelor mecanice supuse la legături, dînd și soluția problemei centrului de oscilație; unele corecții sînt aduse apoi de Guillaume François de l'Hospital (1661—1704). Jean (Johannes) Bernoulli (1667—1748) formulează corect principiul deplasărilor virtuale, iar fiul său Daniel Bernoulli (1700—1782) studiază principiul conservării „forțelor vii". Jacob Hermann (1678—1733) studiază dinamica sistemelor supuse la legături, Colin McLaurin (1698—1746) exprimă primul, în 1742, legea a doua a lui Newton sub forma (2), iar Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698—1759) formulează (1744) principiul minimei acțiuni. O contribuție deosebită o aduce Leonhard Euler (1707—1783), unul din cei mai mari matematicieni și mecanicieni ai secolului, introducînd noțiunile de punct material, moment de inerție și moment al cantităților de mișcare; el studiază mișcarea solidului rigid, stabilește ecuațiile diferențiale ale rigidului cu punct fix și le integrează într-un caz particular. De asemenea, el exprimă legea fundamentală a mecanicii, în 1748, sub forma (2). Mihail Vasilievici Lomonosov (1711—1765) extinde „principiul conservării materiei" la „conservarea mișcării". Samuel Koenig (1712—1757) polemizează cu Maupertuis în legătură cu prioritatea asupra principiului minimei acțiuni; la această polemică participă și Euler și François Marie Arouet (zis Voltaire) (1694—1778). Alexis Claude Clairaut (1713—1765) se ocupă de mișcarea relativă și studiază mișcarea lunii. Jean le Rond d'Alembert (1717—1783) prezintă în „Traité de dynamique" (Paris, 1743) o metodă generală de studiu a sistemelor mecanice discrete (principiul lui d'Alembert). Paul d'Arcy (1725—1779) enunță teorema conservării momentului cinetic pentru un sistem conservativ (1747). Charles-Augustin de Coulomb (1736—1806) face importante cercetări

asupra frecării de alunecare și rostogolire. Pierre-Simon de Laplace (1749—1827) publică celebrul său „Traité de mécanique céleste" (Paris, 1799—1825), în cinci volume, unde face cunoscute importante ipoteze cosmogonice. Joseph-Louis Lagrange (1736—1813) prin „La mécanique analytique" (Paris, 1788) a influențat considerabil direcțiile ulterioare de dezvoltare ale mecanicii; în acest volum, care cuprinde celebrele ecuații ce-i poartă numele, se studiază sistemele mecanice discrete, fără figuri, numai cu metodele analizei matematice. El se ocupă de studiul micilor mișcări ale unui sistem mecanic în jurul unei poziții stabile de echilibru. Contribuții fundamentale la dezvoltarea metodelor analitice în mecanică aduc William Rowan Hamilton (1805—1865), care stabilește ecuațiile canonice și enunță principiul variațional ce-i poartă numele, Carl Gustav Jacob Jacobi (1804—1851), Siméon-Denis Poisson (1781—1840) și Joseph Liouville (1809—1882), care au contribuții importante cu privire la integrarea sistemului canonic, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805—1859), Jules Henri Poincaré (1854—1912), Adolf Hurwitz (1859—1919) și Aleksandr Mihailovici Liapunov (1857—1918), ultimii ocupîndu-se de problema stabilității mișcării. Gustav Gaspard Coriolis (1792—1843) descoperă accelerația complementară, utilizată de Jean Bernard Léon Foucault (1819—1868), care pune în evidență mișcarea de rotație a Pămîntului cu ajutorul pendulului ce-i poartă numele. George Atwood (1746—1807) verifică legile căderii corpurilor cu mașina căreia i-a dat numele, iar Lazare Nicolas Carnot (1753—1823) a formulat prima definiție analitică a principiului deplasărilor virtuale și a enunțat teorema asupra pierderii de energie în ciocnirea elastică. Carl Friedrich Gauss (1777—1855) elaborează o metodă de calcul a orbitelor eliptice a planetelor. Jacques Philippe Marie Binet (1786—1856) se ocupă de acțiunea forțelor centrale, Mihail Vasilievici Ostrogradski (1801—1862) enunță, independent de Hamilton, un principiu variațional similar și dezvoltă mecanica sistemelor cu legături unilaterale. André Marie Ampère (1775—1836) studiază numeroase probleme de cinematică, introducînd și această denumire. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830) încearcă să dea o demonstrație generală a principiului lucrului mecanic virtual. Jean Victor Poncelet (1788—1867) leagă noțiunea de lucru mecanic de cea de energie. Rodrigues B. Olinde (1794—1851) se ocupă de principiul minimei acțiuni, Jacob Steiner (1796—1863) studiază momentele de inerție, iar Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796—1832) calculează echivalentul mecanic al căldurii. Eugen Dühring (1833—1921), Felix Klein (1849—1925) și Ernst Mach (1839—1916) critică mecanica clasică, fiind combătuți de Vladimir Ulianov (Lenin) (1870—1924). Ivan Vsevolod Meșcerski (1895-1935), Konstantin Eduardovici Țiolkovski (1857—1935) și Tullio Levi-Civita (1873—1941) elaborează lucrări fundamentale cu privire la *dinamica corpului de masă variabilă*. William-John Macquron Rankine (1820—1872) găsește expresia exactă a energiei cinetice, înlăturînd noțiunea de „forță vie". Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821—1894) extinde principiul minimei acțiuni la fenomene nemecanice. Sofia V. Kovalevskaia (1850—1891) se ocupă de mișcarea rigidului cu un punct fix. Contribuții importante au și James Clerk Maxwell (1831—1879), William Thomson (lord Kelvin) (1842—1907), Eötvös Loránd (1848—1919), Isaac Todhunter (1820—1884), Karl Pearson (1857—1936),

Paul Émile Appel (1855—1930), Heinrich Rudolf Hertz (1857—1894), Paul Painlevé (1863—1933), Serghei Alekseevici Ceaplîghin (1869—1942) şi Georg Hamel (1877—1955).

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858—1947) ajunge în 1900 la concluzia că schimbul de energie dintre radiaţie şi substanţă (problema radiaţiei corpului negru) se face discontinuu, în cuante, fundamentîndu-se astfel *teoria cuantelor*. Erwin Schrödinger (1887—1961), Paul Adrien Maurice Dirac (n. 1902) şi Werner Karl Heisenberg (1901—1976) pun, în jurul anilor 1925—1926, bazele *mecanicii cuantice*. Plecînd de la experimentele lui Albert Abraham Michelson (1852—1931) şi Edward Williams Morley (1838—1923), de la interpretările lui Hendrik Antoon Lorentz (1853—1928) şi ale altora, Albert Einstein (1879—1955) pune, prin lucrarea „Zur Elektrodynamik der bewegter Körper" (Annalen der Physik, 1905), bazele *relativităţii restrînse* şi, prin lucrarea „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" (Annalen der Physik, 1916), bazele *relativităţii generale*; Hermann Minkovski (1864—1909), H. Poincaré şi M. Planck contribuie la dezvoltarea acestor teorii. Josiah Dixon Willard Gibbs (1839—1903) şi Ludwig Eduard Boltzmann (1844—1906), pun, prin studiile lor, bazele *mecanicii statistice*. Louis Victor Pierre Raymond de Broglie (n. 1892) pune bazele *mecanicii ondulatorii*.

3.2. **Mecanica mediilor continue deformabile. Tendinţe actuale de dezvoltare a mecanicii.** Din cele mai vechi timpuri, de cînd oamenii au început să construiască, s-au pus probleme de mecanica mediilor continue deformabile, în general, şi de rezistenţa materialelor sau de hidraulică, în special; diferite probleme pentru solide deformabile sau pentru fluide (aceste proprietăţi ale lor nereieşind destul de clar în evidenţă) au fost impuse de practică.

Probleme de rezistenţa materialelor şi-au pus şi au rezolvat, într-o anumită formă, constructori celebri cum au fost Archytas din Tarent sau arhitecţi ca Vitruvius. Egiptenii au avut, probabil, reguli empirice de care au ţinut seama. Grecii, mai avansaţi, au dezvoltat statica (este suficient să citäm pe Arhimede, care stabileşte legile fundamentale ale hidrostaticii în lucrarea „Asupra corpurilor plutitoare"), care stă la baza studiului corpurilor reale. Heron din Alexandria s-a ocupat de studiul construirii bolţilor. Romanii au fost, de asemenea, mari constructori, multe din realizările lor fiind utilizate şi astăzi; menţionăm astfel faimosul pod „Pont du Gard" din sudul Franţei. Multe din cunoştinţele căpătate înainte de era noastră sau la începutul acestei ere au ajuns, cu puţine completări, în timpul Renaşterii; între altele, aceste cunoştinţe se găsesc în manuscrise arabe, care cuprind, de exemplu, descrieri cu privire la orga hidraulică, la aparate înzestrate cu mişcări automate etc.

Începînd din secolul al XIV-lea, în legătură cu cerinţele tehnicii construcţiilor, unii arhitecţi şi oameni de artă ai timpului (de exemplu Filippo Brunelleschi) sînt interesaţi de probleme de rezistenţa materialelor şi hidraulică. Leonardo da Vinci s-a ocupat de cele mai diverse probleme de rezistenţă puse de fire, grinzi, arce etc. El este primul care face încercări la rupere asupra unui fir de oţel. Astfel, la capătul unui fir suspendat se găseşte un vas în care se lasă să curgă încet nisip; firul se lungeşte pînă la rupere. Leonardo da Vinci menţionează că este bine să se facă mai multe experienţe şi să se ia media rezultatelor. În secolele XVI—

XVIII se pun probleme noi în domeniul construcțiilor, de exemplu în ceea ce privește construcția navelor. Simon Stevin calculează presiunea laterală și pe fundul vasului a lichidelor și stabilește principiul vaselor comunicante. Galilei este unul din cei mai de seamă ingineri ai timpului său. El arată cum se poate experimenta o bară la întindere. De asemenea, el este primul care admite o anumită distribuție de tensiuni într-o bară în consolă, acționată la capătul liber de o forță concentrată; după Galilei, în secțiunea de încastrare ar apărea tensiuni normale uniform distribuite pe toată secțiunea transversală, ceea ce ulterior s-a dovedit a fi o aproximație destul de depărtată de realitatea fizică. Arhitectul Domenico Fontana (1543—1607) folosește asemenea rezultate pentru ridicarea unui obelisc la Vatican. Toricelli rezolvă probleme de hidrostatică și formulează (fără demonstrații) legea curgerii lichidelor, stabilind așa numita „formulă a lui Torricelli". Robert Hooke (1635—1703), bazat pe diferite experiențe, enunță în 1678 celebra sa lege „ut tensio sic vis" (cît este întinderea atît este forța), creînd astfel *primul model matematic al unui solid deformabil* (modelul hookeian al solidului liniar elastic). Edmé Mariotte (1620—1684) verifică această lege pe epruvete de lemn; el studiază încovoierea grinzilor elastice (fără a putea să stabilească formula exactă a încovoierii, precum și unele probleme de mecanica lichidelor și gazelor. Idei prețioase legate de noțiunea de elasticitate enunță M.V. Lomonosov. Blaise Pascal (1623—1662) este unul dintre principalii creatori ai hidrostaticii. El a formulat legile presiunii aerului și lichidelor, a inventat presa hidraulică și a aplicat „principiul deplasărilor virtuale" la deducerea condițiilor de echilibru ale unui lichid în vase comunicante și la stabilirea legii transmiterii uniforme a presiunii în lichide (legea lui Pascal); Pascal a stabilit greutatea masei de aer.

În secolele XVII și XVIII se realizează progrese în domeniul mecanicii construcțiilor, rezistenței materialelor și hidraulicii. Multe din rezultatele obținute au un caracter aplicativ, corespunzînd problemelor noi puse în domeniul construcțiilor civile, construcțiilor hidrotehnice și al construcțiilor de mașini. Menționăm unele rezultate teoretice obținute de frații Jacques și Jean Bernoulli (primului i se datorește *ipoteza secțiunilor plane* la bare drepte), de fiul celui din urmă, Daniel Bernoulli, și de nepotul acestuia Jacques Bernoulli (1759—1789). Daniel Bernoulli stabilește unele teoreme fundamentale în hidrodinamică. L. Euler studiază deformațiile mari ale barelor elastice subțiri (așa numita problemă „elastica"); tot el se ocupă de stabilitatea barei drepte, stabilind, în 1749, celebra formulă a *sarcinii critice de flambaj*, care-i poartă numele. De problemele mecanicii fluidelor, pe lîngă L. Euler, se ocupă Clairaut, care studiază formele de echilibru ale lichidelor neomogene în mișcare de rotație, d'Alembert, Laplace și Lagrange. Alte cercetări teoretice și experimentale se datoresc lui Poncelet, d'Alembert, Dirichlet și Franz Grashof (1826—1893).

Bazele *teoriei elasticității* au fost puse în prima jumătate a secolului al XIX-lea prin lucrările lui Louis-Marie-Henri Navier (1785—1836) și Ostrogradski; dar cel care stabilește ecuațiile fundamentale ale corpurilor elastice (ecuațiile de echilibru static și dinamic și relațiile dintre deplasări și deformații specifice, valabile pentru mediile continue deformabile oarecare), sub forma care se utilizează astăzi, a fost Augustin-Louis Cauchy

(1789—1857). Importante contribuții aduc Poisson, care introduce noțiunea de contracție transversală, Benoît-Paul-Émile Clapeyron (1799—1864), care stabilește o teoremă de echivalență între lucrul mecanic interior și lucrul mecanic exterior, și Gauss, care introduce utilizarea sistematică a coordonatelor curbilinii. Lui Gabriel Lamé (1795—1870) i se datorește, în special, formularea în deplasări a problemelor fundamentale ale teoriei elasticității și scrierea unui important tratat în această direcție. Mecanica corpurilor elastice s-a dezvoltat apoi prin lucrările lui George Green (1793—1841), Gustav Robert Kirchhoff (1824—1887), Sophie Germain (1776—1831), Franz Ernst Neumann (1798—1895), George-Biddell Airy (1801—1892), care formulează problema plană corespunzătoare, George Gabriel Stokes (1819—1903), Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833—1872), Jean-Marie-Constant Duhamel (1797—1872), lord Kelvin, Maxwell și alții. Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797—1886) formulează condițiile de continuitate a deformației și se ocupă de problema solicitării barei drepte de secțiune oarecare prin *metoda semiinversă de calcul*. Alte contribuții importante aduc Eugenio Beltrami (1835—1900), Giacinto Morera (1856—1909), John Henry Michell(1863—1940), Enrico Betti (1823—1892), John William Strutt (lord Rayleigh) (1842—1919), în special în ceea ce privește propagarea sunetelor, Alberto Castigliano (1847—1884), August Föppl (1854—1924), Joseph Valentin Boussinesq (1842—1929), Horace Lamb (1839—1934), Augustus-Edward-Hough Love (1863—1940), Piotr Fedorovici Papkovici (1887—1946), Vito Volterra (1860—1940), Boris Grigorievici Galerkin (1871—1945), Stephen P. Timoshenko (1878—1972), Richard von Mises (1883—1953), Nikolai Ivanovici Musheliṣvili (1891—1976) și Heinz Neuber (n. 1906). Frații Eugène-Maurice Pierre Cosserat (1866—1931) și François Cosserat pun bazele unui *model generalizat* al mecanicii solidelor elastice.

Primele studii privind liniile de alunecare s-au făcut în *mecanica pămînturilor* de către Coulomb, Rankine și Maurice Lévy (1838—1910). Importanța lor a fost sesizată de Henri-Édouard Tresca (1814—1885), care publică în 1864 și 1872 mai multe note privitoare la o condiție de plasticitate, și de către Christian Otto Mohr (1835—1918), care formulează, pe această bază, în 1882, o *teorie a rezistenței materialelor*. B. de Saint-Venant recenzează lucrările lui Tresca la Academia de științe din Paris, și cu această ocazie, dezvoltă ecuațiile fundamentale ale teoriei plasticității; cu aceasta putem afirma că, în 1870, a luat naștere *teoria plasticității*. Tot în a doua jumătate a secolului al XIX-lea a început să se pună problema studiului corpurilor solide pentru care trebuie să ținem seama de viteza de deformare. Astfel, Maxwell, lord Kelvin și Woldemar Voigt (1850—1919) definesc *modele vîscoelastice* particulare (corpuri de tip Maxwell și de tip Kelvin (sau Voigt), ultimii doi ajungînd la rezultate analoage prin studii independente), care corespund la anumite corpuri reale. Cu toate acestea, din punct de vedere formal, *reologia* ia naștere de-abia la un congres internațional din 1929 (cu această ocazie se introduce și denumirea de reologie); în special, se dezvoltă *teoria vîscoelasticității* și *teoria vîscoplasticității*.

Ecuațiile fundamentale ale *mecanicii fluidelor* sînt stabilite de Navier și Stokes în 1822. Rezultate importante în această direcție se datoresc lui Helmholtz, Kirchhoff, lord Kelvin, Ceaplîghin, Henri-Philibert-Gaspard Darcy (1803—1858), care stabilește *legile curgerii fluidelor*

în medii poroase (*modele bifazice*), William Froude (1810—1879), lord Rayleigh, Stokes, Osborne Reynolds (1842—1912), Nikolai Egorovici Jukovski (1847—1921), Ludwig Prandtl (1875—1953) și Theodor von Kármán (1881—1963).

Actualmente, cercetările în cadrul modelelor clasice și neclasice ale mecanicii sau în domeniul mecanicii mediilor continue deformabile s-au dezvoltat foarte mult, în multiple direcții, cuprinzînd metode noi de calcul, atît analitice, cît și numerice. Una din tendințele actuale este reprezentată de extinderea și generalizarea modelelor mecanicii. Alte eforturi se depun de către Clifford Ambrose Truesdell (n. 1919) și Walter Noll (n. 1925) în direcția *axiomatizării mecanicii clasice*. În așa-numitul cadru al mecanicii generale se dezvoltă problemele de vibrații, stabilitate, și control optimal. Un avînt deosebit ia teoria sistemelor mecanice continue deformabile, atît prin rezolvarea multor probleme la limită, cît și prin *cuplarea* fenomenelor mecanice respective cu alte fenomene nemecanice (corespunzătoare unui cîmp termic, unui cîmp electromagnetic etc.). Datorită acestei mari dezvoltări este foarte dificil de a trece, oricît de sumar în revistă pe cei mai însemnați oameni de știință care se ocupă de aceste probleme. De aceea, am preferat să menționăm numai pe cercetătorii deveniți clasici și să menționăm numai cercetări făcute pînă în primele decenii ale acestui secol.

În prezent, se întreprind vaste studii de natură teoretică și experimentală în cadrul a diferite *școli naționale*, dintre care citățm, în primul rînd, realizările obținute în Uniunea Sovietică și S.U.A. în toate direcțiile moderne de cercetare ale mecanicii; în ordinea importanței rezultatelor obținute, mai citățm Anglia, R.F. Germania, Franța, Italia, Japonia, Austria. Dintre țările socialiste (în afară de U.R.S.S.), cele mai avansate în această direcție sînt R.P. Polonă, R.S. România, R.S.F. Jugoslavia, R.S. Cehoslovacă și R.D. Germană.

3.3. **Dezvoltarea mecanicii în România.** În țara noastră au existat preocupări de mecanică legate de diferite probleme puse de tehnica construcțiilor sau de tehnica militară încă de la începutul erei noastre; ocuparea Daciei de către romani introduce un spirit practic, ingineresc și o tehnică înaintată.

În secolul al XVI-lea se dezvoltă și se înmulțesc școlile, apar primele tipărituri și lucrări în manuscris. Conrad Haas din Sibiu (1529—1579) face studii de balistică și de proiectile cu reacție de tipul rachetelor; el este un precursor atît în ceea ce privește propulsarea dispozitivelor cu mai multe trepte, cît și în privința direcționării lor prin aripioare delta. Fizica (și, prin aceasta, mecanica) pătrunde pe teritoriul țării noastre prin școala superioară calvină sau prin universitatea catolică din Transilvania; la academiile domnești înființate la București (în 1640 sau 1644) și Iași (în 1714 sau 1716) se predau elemente de fizică coridaleană după Teofil Corydaleu (1565—1646), fost rector al universității grecești din Fanar. Dimitrie Cantemir (1673—1723) se ocupă de unele elemente de mecanică privind diferite aspecte ale mișcării. Spre sfîrșitul secolului al XVIII-lea, predarea fizicii începe să capete aspecte moderne. Nicolae Chiriac Cercel (Zarzulis) (?—1773) este între 1760—1773 primul profesor de fizică experimentală și teoria gravitației; el traduce o parte din opera lui Newton. Dimitrie Gobdela (1775—1831) predă mecanica la Academia

domnească din Iași după marile opere ale lui René Descartes (1596—1650) și Newton. Farkaș Bolyai (1775—1856) aplică elemente de calcul diferențial la mecanică, la Colegiul reformat din Tg. Mureș. Gheorghe Asachi (1788—1869) la Iași, în 1814, și Gheorghe Lazăr (1779—1823) la București, în 1818, înființează cursuri de inginerie în limba română. János Bolyai (1802—1860) are concepții interesante cu privire la teoria gravitației, legată de geometria lui neeuclidiană. Mecanica continuă să se predea în condiții din ce în ce mai bune în școli cu caracter mixt, liceal și universitar. Gheorghe Șincai (1754—1816) publică în 1809, lucrarea „Învățătura firească spre surparea superstiției norodului", care cuprinde primele noțiuni de mecanică în limba română ; Alexe Marin (1814—1895) publică în 1842 cartea „Moș Pătru sau învățătorul de sat. Convorbiri asupra mecanicii", destinată a da unele cunoștințe elementare celor ce urmau să învețe pe alții. Înființarea Universității din Iași (1860) și a Universității din București (1864), a Școlii de poduri, șosele și mine (1867) și reînființarea Universității din Cluj (1872) aduc un nou suflu în predarea mecanicii și în dezvoltarea acestei științe a naturii în țara noastră.

La *Universitatea din București* predau mecanica Emanoil Bacaloglu (1830—1891), Constantin Miculescu (1863—1937), care expune o metodă originală pentru determinarea echivalentului mecanic al căldurii, Ion Fălcoianu, Iacob Lahovary (1846—1907), Ion Stravolca, (1848—1910), Constantin Mironescu (1850—1937) și Elie Angelescu (1830—1882). Primul mare mecanician român, profesor la această universitate, a fost Spiru Haret (1851—1912), cunoscut prin remarcabila sa teză de doctorat, susținută la Paris, asupra invariabilității axelor mari ale orbitelor planetare. Alți profesori de mecanică la această universitate sînt Nicolae Coculescu (1866—1952), Traian Lalescu (1882—1929), Gheorghe Demetrescu (1885—1969) și, mai ales, Dimitrie Pompeiu (1873—1954), Victor Vâlcovici (1885—1970) și Octav Onicescu (1892—1983). La *Universitatea din Iași* au predat mecanica (după ce la Academia Mihăileană au avut o asemenea activitate Alexandru Costinescu (1812—1872) și Ștefan Micle (1820—1879)) Ioan Melik (1840—1889), Petre Poni (1841—1925), Dragomir Hurmuzescu (1865—1954), Miltiade Tzony (1843—1898), D. Pompeiu, Neculai Culianu (1834—1915), Ștefan Baldovin, Ion Rallet (1851—1916), Aurelian Mănescu (1859—1919), Alexandru Myller (1879—1965), V. Vâlcovici, Simion Sanielevici (1870—1963), Constantin Popovici (1878—1956) și Ioan Plăcințeanu (1893—1960). La *Universitatea din Cluj* predau mecanica Antoniu Abt (1829—1902), Réthy Móritz (1846—1925), Fárkas Gyula (1847—1930), Ludwig Schlessinger (1864—1933), Ortvay Rudolf (n. 1885), Vasile Demirean, A. Petrescu, Valyi G., Ștefan Burileanu (1874—1949), Gheorghe Bratu (1881—1941), Theodor Angheluță (1882—1964), Teofil Vescan (1913—1963), Nicolae Abramescu (1884—1957), Valer Novacu (n. 1909), Radu Bădescu (n. 1904), Dumitru V. Ionescu (n. 1901) și Caius Iacob (n. 1912) (începînd din 1950 predă la Universitatea din București). La *Școala națională de poduri și șosele din București* (apoi Politehnica din București) mecanica a fost predată de Constantin Zeuceanu (1838—1906), E. Angelescu, Ion G. Cantacuzino (1847—1911), Constantin Mănescu (1852—1922), Gheorghe Kirilov (1844—1908), care utilizează pentru prima oară la noi modelarea vectorială, C. Mironescu, Andrei G. Ioachimescu (1868—1943), Gheorghe Em. Filipescu (1882—1937), Ion Ionescu (1870—

1946), Constantin C. Teodorescu (1892—1972), Dionisie Germani (1877—1948), Cristea Mateescu (1894—1979), Dorin Pavel (1900—1979), Constantin Budeanu (1886—1959), Elie Carafoli (1901—1983), Aurel A. Beleș (1891—1976), Alexandru Ion Stoenescu (1905—1968) și Ștefan Bălan (n. 1913). La *Politehnica din Timișoara* (înființată în 1922) au predat cursuri de mecanică C.C. Teodorescu. V. Vâlcovici, Ștefan Drăgănescu (1885—1935), Pompiliu Nicolau (1891—1972), Mihail Ghermănescu (1901—1962), Ștefan Nădășan (1901—1967) și Aurel Bărglăzan (1905—1960), iar la *Politehnica din Iași* (înființată în 1937) a predat mecanica I. Plăcinteanu. Printre cei citați mai sus am considerat atît pe cei care au predat mecanică generală, cît și pe cei care au predat mecanică aplicată (probleme de mecanica mediilor continue deformabile).

După primul război mondial, de o mare importanță pentru dezvoltarea mecanicii este organizarea unor societăți științifice și apariția unor reviste de specialitate, care au îndrumat și dezvoltat această activitate. George (Gogu) Constantinescu (1881—1965) descoperă *sonicitatea*, iar Henri Coandă (1886—1972) pune în evidență efectul reactiv la avioane și *efectul Coandă*. Profesori din universități și politehnici duc o remarcabilă activitate științifică, atît înainte de 23 August 1944 cît și, mai ales, după această dată. Astfel, în domeniul mecanicii generale citățm pe D. Pompeiu, V. Vâlcovici, care se ocupă de teoremele generale ale mecanicii, C. Iacob și Nicolae Ciorănescu (1903—1957). Dan Barbilian (1895—1961) studiază geometria mișcării și axiomatizarea mecanicii clasice. Gheorghe Vrănceanu (1900—1979) se ocupă de sistemele mecanice neolonome și are rezultate interesante în teoria relativității; în acest scop creează și studiază spațiile neolonome. În domeniul mecanicii solidelor menționăm pe Elie Radu (1853—1931), Anghel Saligny (1854—1925), I. Ionescu, Gh. Em. Filipescu, Nicolae Profiri (1886—1967), A. A. Beleș, C. C. Teodorescu, Cr. Mateescu, Mihail Hangan (1897—1964), Șt. Bălan și Șt. Nădășan. În ceea ce privește mecanica fluidelor, remarcăm pe D. Germani, V. Vâlcovici, Cr. Mateescu, E. Carafoli și C. Iacob.

În ceea ce privește *studiul matematic al mediilor continue deformabile*, primele cercetări, datînd de la începutul acestui secol, au, mai ales, un caracter de studiu al ecuațiilor fizicii matematice, datorindu-se unor profesori de la facultățile de științe ale Universităților din București și Iași, care și-au luat doctoratul în Franța sau Germania. Astfel, prima lucrare în această direcție este teza de doctorat a lui Anton Davidoglu (1876—1958), susținută la Paris în 1900, privitoare la aplicarea metodei aproximațiilor succesive a lui Émile Picard (1856—1941) la studiul unor ecuații diferențiale de ordinul al patrulea, corespunzătoare vibrațiilor transversale ale barelor elastice neomogene; în aceeași ordine de idei, menționăm tezele de doctorat ale lui Alexandru Myller (1879—1965) și S. Sanielevici. Teze de doctorat care au constituit puncte de plecare pentru alte cercetări sînt, în domeniul mecanicii generale, cea a lui Mendel Haimovici (1906—1973), în domeniul mecanicii solidelor, cele ale lui Grigore C. Moisil (1906—1973) și Nicolae Teodorescu (n. 1906), iar în domeniul mecanicii fluidelor cele ale lui V. Vâlcovici, E. Carafoli și C. Iacob. Gr. C. Moisil, M. Haimo-

vici, A. A. Beleş şi Şt. Bălan au reuşit să creeze adevărate şcoli de mecanica solidelor în ţara noastră, iar V. Vâlcovici, E. Carafoli şi C. Iacob izbutesc acelaşi lucru în domeniul mecanicii fluidelor.

Am menţionat mai sus profesori şi oameni de ştiinţă care şi-au desfăşurat sau şi-au început activitatea înainte de 1944 ; marea amploare pe care au luat-o cercetările de mecanică în toate direcţiile, după această dată, nu ne permite, în mod practic, să trecem în revistă aceste cercetări sau să menţionăm pe oamenii de ştiinţă respectivi. Evidenţiem numai construirea mecanicii invariantive de către O. Onicescu, care pleacă de la invariantul fundamental Poincaré-Cartan şi pune unele axiome naturale privind cvadrivectorul impuls-energie.

Se lucrează foarte mult (teoretic şi experimental), atît în universităţi şi institute tehnice de învăţămînt superior, cît şi în institute de cercetare ştiinţifică, obţinîndu-se rezultate remarcabile, cu caracter fundamental şi aplicativ, rezultate cu care ne mîndrim.

Primită la redacţie la 23 noiembrie 1983

RECENZII

D. D. CIOCLOV, *Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune şi deformaţie*, Bucureşti, Editura Academiei R.S. România, 1983, 356 p.

Lucrarea, de nivel academic, are caracter fundamental şi este structurată potrivit stărilor limită care se pot succeda într-un sistem tehnic de tipul recipientelor presurizate.

Considerîndu-se starea elastică ca o stare fizică primară în procesul deformării sub sarcină, în primul capitol se abordează problematica de ansamblu a teoriei generale, clasice, a învelişurilor de revoluţie simetrice şi subţiri, în contextul valabilităţii ipotezei Kirchhoff-Love. Se formulează de asemenea, problema conturului şi se fundamentează aşa-numiţii coeficienţi de influenţă. Sînt valorificate, astfel, contribuţii datorate unor specialişti de renume ca Timoshenko, Vlasov, Flügge, Galletly ş.a.

Într-o formă uşor aplicabilă în activitatea practică de cercetare şi proiectare, capitolele 2—4 sintetizează particularizări ale teoriei generale a învelişurilor subţiri şi unele metode moderne de analiză care sînt adecvate componentelor tipice ale recipientelor sub presiune de speţa virolă, manta, fund, flanşă, racord, tubulatură rectilinie sau curbă, placă tubulară, suport etc. În mod aparte, se insistă asupra unor probleme de interes practic deosebit privind joncţiunea de componente de recipiente şi aparate tehnologice (intersecţii, ramificaţii, îmbinări, racordări, alte discontinuităţi structurale) şi se expun cîteva dintre aspectele mai puţin facile ale teoriei componentelor de recipiente — monostrat sau multistrat — cu perete gros (cap. 5). Analiza teoretică a eforturilor unitare termice în plăcile plane şi în învelişurile cilindrice sau sferice, cu perete subţire sau cu perete gros, face obiectul capitolului şase, în limitele căruia se prezintă într-o manieră generală.

Este cu totul remarcabilă tratarea stărilor limită raportate la diferitele ipostaze ale fenomenului de plasticitate, respectiv ale stadiului de comportare inelastică sau cvasiplastică a recipientelor sub presiune, distingîndu-se — într-o măsură clară — următoarele stări limită: 1) iniţierea curgerii plastice (cap. 7); 2) iniţierea curgerii plastice instabile (cap. 8) şi 3) deformarea în timp (prin fluaj sau relaxare — cap. 9). Într-un asemenea context, stările limite sînt tratate cu incidenţă la recipientele executate din materiale metalice fie perfect plastice (potrivit ipotezei lui Prandtl), fie aşa-zise plastice cu consolidare (ecruisare). Într-o formă nouă, se studiază, de asemenea, problema cedării recipientelor prin ruperi cu caracter ductil şi se prezintă baza de calcul pentru rezistenţa la plesnire a structurilor de tip recipient presurizat.

Dată fiind actualitatea conjuncturală a modalităţilor automate de calcul, care a promovat noi metode de analiză numerică, cu aplicaţie la stările de solicitare-deformare corespunzătoare sistemelor tehnice de tip recipient sub presiune, în capitolul ultim al lucrării (cap. 10) se expun bazele metodei elementelor finite, în general, se prezintă elementele plane încovoiate, modelîndu-se ca atare învelişurile curbe subţiri şi, de asemenea, se redau cîteva elemente finite speciale (elementele izoparametrice; elementele finite axial simetrice ca segmente de înveliş subţire).

Prin originalitatea structurii şi conţinutului său, de asemenea printr-o excelentă punere în valoare a unui material bibliografic de excepţie, lucrarea în discuţie se impune ca referinţă în patrimoniul literaturii tehnice, de înalt nivel, privind rezistenţa mecanică a structurilor de tipul recipientelor presurizate.

A. Pavel

WERNER FISTER, *Fluidenergiemaschinen. Band 1: Physikalische Voranssetzungen Kenngrössen, Elementarstufen der Strömungs— und Verdrängermaschinen* (Maşini care utilizează energia fluidelor. Vol. I. Preliminarii fizice, mărimi caracteristice, trepte elementare ale maşinilor rotative şi ale maşinilor cu piston), Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1984, 494 p. cu il.

Werner Fister este profesor la facultatea de Construcţii de Maşini a Universităţii Ruhr din Bochum, prelegerile sale formînd materialul de bază al acestei lucrări. Concepţia autorului

constă într-o tratare comună a tuturor mașinilor hidraulice și pneumatice de lucru sau de forță, atît a celor volumice, cît și a turbomașinilor.

Lucrarea este concepută în două volume.

Primul volum conține studiul proceselor hidro-gazodinamice și termodinamice de curgere, fără a se intra în dimensionarea de gabarit și proiectarea mașinilor.

În capitolul 1, după definirea mașinilor energetice pentru fluide, se prezintă un scurt istoric, foarte sistematizat, al dezvoltării, precum și o schemă de clasificare a acestor mașini. Sînt incluse și mașinile pentru fluide cu funcționare pe principiul electromagnetic : generatorul MHD și pompa electromagnetică.

Se expun principiile de funcționare și schemele de amplasare în instalațiile tuturor tipurilor de mașini energetice pentru fluide.

Capitolul al doilea este consacrat noțiunilor fundamentale de termodinamică : principiile termodinamicii aplicate sistemelor închise și deschise ; energia și anergia ; procesele termodinamice ale gazelor ideale și reale în mașini, cu analiza disipațiilor și definirea randamentelor.

Capitolul al treilea, conține ecuațiile fundamentale ale mecanicii fluidelor : ecuația continuității ; teoremele impulsului și momentului cinetic ; ecuația energiei ; ecuațiile de mișcare laminară Navier-Stokes în sistemele de referință fix și mobil și în coordonatele carteziene și cilindrice ; ecuația lui Bernoulli. De asemenea, se dau noțiunile fundamentale despre : mișcările potențiale plane ; stratul limită ; mișcările turbulente ; frecarea discului rotitor în fluid ; profilele izolate ; aripa de anvergură finită ; rețelele liniare de profile ; curgerile secundare ; cavitația în mașinile hidraulice, dinamica gazelor (mișcări subsonice și supersonice ; mișcări izentropice, ajutajul Laval, mișcarea adiabatică în conductă ; unda de șoc normală și oblică) ; mișcarea potențială plană subsonică a gazelor cu liniarizarea Prandtl-Glauert pentru profile zvelte izolate sau plasate în rețea liniară.

Capitolul 4 este consacrat similitudinii mașinilor energetice pentru fluide. Deși cea mai mare parte a acestui capitol se referă la turbomașini, considerăm ca un amănunt interesant introducerea unor coeficienți adimensionali de similitudine și pentru mașinile volumice de lucru și extinderea diagramei Cordier la clasificarea suflantelor și compresoarelor volumice.

În capitolul 5 se expune teoria treptei de turbomașină : triunghiurile vitezelor ; schimbul de energie dintre fluid și paletajele treptei ; gradul de reacțiune ; ecuația fundamentală a turbomașinilor ; teoria unidimensională ;analiza detaliată a proceselor de curgere în treptele axială și radială și caracteristicile energetice ale rețelelor de profile.

Capitolul 6 cuprinde studiul energetic și termodinamic al mașinilor volumice, cu detalierea compresoarelor cu piston și a motoarelor cu ardere internă. Se dau și unele noțiuni sumare despre pompele cu piston și mașinile volumice rotative.

Aplicarea formulelor teoretice expuse în lucrare este ilustrată prin 18 exemple de calcul.

Nivelul teoretic al lucrării este ușor accesibil studenților și inginerilor.

În al doilea volum, plănuit de autor, se va face o tratare amănunțită a dimensionării și calculului hidroaerodinamic, precum și unele calcule de rezistență ale mașinilor energetice pentru fluide.

Gheorghe Zidaru

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînare şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Colegiului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 5.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DAN CONSTANTINESCU, **Efectele structurale ale curgerii lente a betonului**, 1985, 208 p., 19,50 lei.
GHEORGHE MĂRMUREANU, **Rezistența posteritică**, 1985, 302 p., 31 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor compresibile**, 1984, 886 p., 68 lei.
IOAN ANTON, **Cavitația**, Vol. I, 1984, 338 p., 46 lei.
C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, **Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor**, 1984, 446 p., 47 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, Vol. II, 1984, 244 p., 22 lei.
A. PAVEL, **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983, 310 p., 26 lei.
SERGIU T. CHIRIACESCU, **Stabilitatea în dinamica aşchierii metalelor**, 1984, 188 p., 16,50 lei.
D. F. SĂMĂRESCU, **Difuzia cîmpului electromagnetic și aplicații**, 1983, 238 p., 20 lei.
DRAGOŞ CIOCLOV, **Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune și deformație**, 1983, 354 p., 32 lei.
V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, vol. I, 1983, 198 p., 18 lei.
ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNE (sub redacția), **Cutremurul de pămînt din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p., 10 lei.
ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**, 1982, 253 p., 20 lei.
GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurată și informatică**, 1982, 192 p., 14,50 lei.
VOICU DOLOCAN, **Fizica joncțiunilor cu semiconductoare**, 1982, 320 p., 30 lei.
A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 39 lei.
DAN TEODORESCU, **Modele stohastice**, 1982, 246 p., 20 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 630 p., 44 lei.
VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România: Matematica, Mecanica, Astronomia**, 1981, 618 p., 9 lei.
LIVIU DUMITRAȘCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.
TITUS PETRILĂ, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.
ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.
MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.
DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**, 1981, 327 p., 26 lei.
HRISTACHE POPESCU, VETURIA CHIROIU, **Calculul structurilor optimale**, 1981, 239 p., 20,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

RM—ISSN 0039—4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 2, 1985, P. 103—214

I.P. Informația c. 2752

Lei 55.—

$ 69 pour un abonnement annuel

R

F 2557

4

TOMUL 44

iul. — aug.

1985

1985 III 2

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad I. ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ROMPRESFILATELIA — sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele ,cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 44, nr. 4 iulie — august 1985

SUMAR

STUDII

V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEŢUŞE, Asupra mişcării laminare şi turbulente în ajutaje conice 323

EUGEN SOÓS, Constante efective şi probleme la limită în teoria statistică a materialelor compozite. Apeoximaţia corelaţională 335

I. SETEANU, M. ERHAN, Metode analitico-numerice în studiul mişcării fluidelor grele cu suprafaţa liberă 356

VASILE IONESCU, ION TUTUNEA, ALEXANDRU TURTĂ, Influenţa frecării intermoleculare a particulelor fluide în mişcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul liniar. II 363

IOAN DAVID, Model de calcul pentru drenajul subteran reversibil în subirigaţie 376

RADU I. IATAN, MIHAIL, RENERT, Cercetări experimentale privind starea de tensiuni în zona cilindrică a construcţiilor cu flanşe cu nervuri 384

I. COLUMBEANU, AL. D. STAN, Rugozitatea la spaţiile axiale cu deschideri reduse 396

NOTE

ALEXANDRU FITI, Asupra ecuaţiei constitutive a fluidelor simple în cadrul mişcărilor viscometrice 406

RECENZII 409

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 35, nr. 4 Iulie — august 1985

SUMAR

STUDII

V. N. CONSTANTINESCU, S. GÂLEȚEANU, Asupra mișcării lagărelor cu tur-
bulență în ajutaje conice 323

EUGEN SOOS, Constante electrice și probleme în limita în teoria elasticității a unele-
cuplor compozite. Aproximația corelațională 335

I. SIETEANU, M. BERTOLA, Metode analitico-numerice în studiul mișcării fluide-
lor greie cu suprafață liberă 359

VASILE IONESCU, ION FLITNEA, ALEXANDRU FLITEA, Influența fre-
cării interioare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid vâscos
între-un tuboin poros. Cazul liniar 369

IOAN DAVID, Model de calcul pentru determinarea reversibilă în sulfitiga-
ție 379

RADU I. LATAȘ, MIHAI BENERT, Cercetări experimentale privind
stăpa de fonsiuni în zona rădăcinăa conștructiilor cu flanșe cu nervuri 391
I. COLȚ, VIOREL ȘT. D. STAN, Propagarea în spațiile axiale cu descăr-
deri radiale 399

NOTE

ALEXANDRU FLITEA, Asupra ecuației constitutive a fluidelor simple în cadrul
mișcărilor izocore 409

RECENZII 409

ASUPRA MIȘCĂRII LAMINARE ȘI TURBULENTE ÎN AJUTAJE CONICE

de V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLETUȘE

Institutul Politehnic, București

Se studiază mișcarea laminară și turbulentă în ajutaje conice convergente și divergente prin metode analitice aproximative (laminar) și numeric (laminar și turbulent) obținîndu-se profilele de viteze.

În ajutajele convergente mișcarea este accelerată, iar profilul de viteze tinde către unul constant pe secțiune cu o comportare tip strat limită la perete. În ajutajele divergente mișcarea este alterată considerabil prezentînd un contracurent la perete.

INTRODUCERE

După cum este cunoscut, mișcările fluidelor vîscoase în ajutaje reprezintă cazuri de curgere visco-inerțiale de importanță pentru diferite aplicații. Astfel, în regim laminar, mișcările plane între pereți înclinați pot fi studiate pentru fluide newtoniene fără dificultăți deosebite, reprezentînd cazuri a unor mișcări mai generale de tip Jeffrey-Hamel [1], [2]. Aceleași mișcări pot fi studiate și în regim turbulent prin considerarea unui model de turbulență oarecare, de exemplu ipoteza lungimii de amestec [3], [4].

Mișcarea laminară în ajutaje conice convergente sau divergente este ceva mai dificil de studiat analitic. Astfel, o soluție similară cu cea plană nu poate fi dedusă decît în condiții mai restrictive și anume cînd forțele de inerție au o contribuție neglijabilă. Într-adevăr, efectul forțelor de inerție alterează alura profilelor de viteze care nu mai rămîn aceleași la diferite raze, respectiv în diferite secțiuni [5], [6]. O soluție analitică a fost dedusă prin dezvoltări în serie de N. A. Slezkin [7].

În cele ce urmează, ne propunem să reluăm studiul mișcării laminare în ajutaje conice extinzîndu-l în mod aproximativ și la cazul mișcărilor turbulente, de o manieră oarecum similară cu cea preconizată în cazul mișcărilor plane [3], [4].

MIȘCĂRI LAMINARE

Să considerăm mișcarea într-un ajutaj conic, convergent (fig. 1*a*) sau divergent (fig. 1*b*).

Vom considera ipoteza (destul de restrictivă) că mișcarea în interiorul ajutajului este complet dezvoltată, respectiv că efectele distribuțiilor

ST. CERC. MEC. APLI., TOM 44, NR. 4. 1985, P. 323—334

de viteză inițiale sînt complet anihilate de efectul stratului limită care pornește de la perete. După cum se vede, ipoteza limitează valabilitatea rezultatelor la ajutaje relativ lungi și cu semiunghiuri ale conului mici.

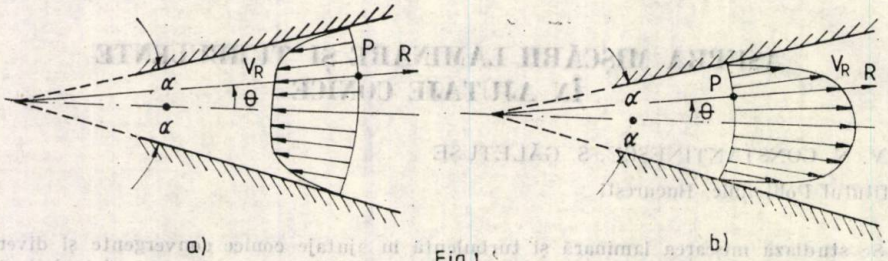


Fig. 1

Fig. 1. — Secțiuni meridiane prin ajutaje conice : *a*) convergent ; *b*) divergent.

În aceste condiții sistemul natural de coordonate este un sistem sferic R, θ, ω avînd originea în vîrful (fictiv) conului.

Este de remarcat de la început că ipoteza unei mișcări după drepte concurente (riguros valabile în cazul plan) nu mai este valabil în cazul ajutajelor conice.

Astfel, să admitem de exemplu că

$$v_R = v_R(R, \theta), \; v_\theta = 0, \; v_\omega = 0. \tag{1}$$

În aceste condiții ecuația de continuitate impune ca

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 v_R) = 0, \tag{2}$$

respectiv că viteza radială este de forma

$$v_R = \frac{F(\theta)}{R^2}. \tag{3}$$

Ecuațiile Navier-Stokes în coordonate sferice se scriu atunci

$$\begin{aligned} \rho v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} &= -\frac{\partial p}{\partial R} + \mu\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial v_R}{\partial R}\right)+\right. \\ &\left.+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right)-\frac{2v_R}{R^2}\right], \\ 0 &= -\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{R^2}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial\omega}, \end{aligned} \tag{4}$$

unde p este presiunea, iar μ — vîscozitatea.

Eliminînd presiunea din primele relații de mai sus și ținînd seama de (3) rezultă că funcția F' ar trebui să satisfacă condiția

$$F''' + \operatorname{cotg}\theta \cdot F'' + \left(6 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) F' + \frac{4}{\nu R} FF' = 0, \tag{5}$$

unde am notat cu $\nu = \mu/\rho$. Apare astfel clar că ipoteza (3) nu este justificată deoarece ultimul termen din (5) depinde de R.

Condiția (3) poate fi aproximativ corectă numai în cazul cînd forțele de inerție sînt neglijabile, termenul în cauză reprezentînd tocmai contribuția forțelor de inerție asupra echilibrului în direcția R.

Această ipoteză este justificată dacă numărul Reynolds este relativ redus și la raze relativ mari.

În asemenea condiții relația (5) se scrie

$$F''' + \operatorname{cotg}\theta \cdot F'' + \left(6 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) F' = 0, \tag{6}$$

cu condițiile la limită

$$\theta = \alpha,\ F = 0;\ \theta = 0,\ F' = 0. \tag{7}$$

Soluția căutată se deduce fără dificultăți observînd că funcția simetrică $\cos^2\theta$ este o soluție particulară a ecuației (6). Prin urmare, soluția căutată are forma

$$F = C_1 + C_2 \cos^2\theta, \tag{8}$$

unde constantele C_1 și C_2 se deduc din prima condiție (7) și din relația exprimînd debitul ce curge prin ajutaj,

$$\frac{Q}{2\pi} = \int_0^\alpha R^2 v_R \sin\theta\, d\theta =$$

$$= C_1(1 - \cos\alpha) + \frac{C_2}{3}(1 - \cos^3\alpha). \tag{9}$$

Rezultă astfel

$$C_1 = -\frac{3Q}{2\pi} \frac{\cos^2\alpha}{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha},$$

$$C_2 = \frac{3Q}{2\pi} \frac{1}{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}, \tag{10}$$

unde $Q > 0$ în cazul ajutajului divergent (fig. 1*b*) și $Q < 0$ pentru ajutaj convergent (fig. 1*a*).

Viteza radială va rezulta sub forma

$$v_R = \frac{3Q}{2\pi R^2} \frac{\cos^2\theta - \cos^2\alpha}{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}, \tag{11}$$

iar presiunea se deduce din a doua ecuație (4) sub forma

$$p = p_0 + \frac{\mu Q}{\pi R^3} \frac{3\cos^2\theta - 1}{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}. \tag{12}$$

Este de remarcat că raportul

$$\frac{v_R}{v_{R\,max}} = \frac{\cos^2\theta - \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \tag{13}$$

rezultă același, indiferent de semnul lui Q, iar profilele de viteze (13) rezultă identice cu cele obținute în ajutajele plane. Mai mult, dacă unghiul α este mic regăsim mișcarea Hagen-Poisseuille.

O soluție a ecuațiilor Navier-Stokes, considerînd

$$v_R = v_R(R, \theta), \quad v_\theta = v_\theta(R, \vartheta), \quad v_\omega = 0, \tag{14}$$

a fost obținută de N. Slezkin [7], care a considerat o dezvoltare în serie pentru funcția de curent $\psi(R, \theta)$ sub forma

$$\psi(R, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(\sigma)}{R^{k-1}}; \quad \sigma = \cos\theta, \tag{15}$$

în care caz componentele vitezelor au expresiile

$$v_R = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(\sigma)}{R^{k+1}}, \quad v_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{f_k(\sigma)}{R^{k+1}}. \tag{16}$$

Funcțiile f_k pot fi deduse analitic dar calculele sînt extrem de laborioase. De aceea autorul citat s-a limitat la primii doi termeni ai dezvoltării în care caz

$$\psi = f_1(\sigma) + \frac{f_2(\sigma)}{R} = \pm C(1-\sigma)(\sigma^2 + \sigma + 1 - 3\sigma_0^2) +$$

$$+ \frac{C^2}{\nu R}(1-\sigma^2)(\sigma - \sigma_0)^2 \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{5\sigma_0}{4} + \frac{3}{4\sigma_0} \right), \tag{17}$$

unde $\sigma_0 = \cos\alpha$, iar

$$C = \frac{|Q|}{2\pi(1-\sigma_0^2)(2\sigma_0 + 1)}, \tag{18}$$

semnul plus în (17) corespunzînd ajutajelor convergente, iar semnul minus celor divergente.

Componentele vitezelor sînt pentru acest caz aproximativ

$$v_R = \pm \frac{3C}{R^2}(\sigma^2 - \sigma_0^2) + \frac{C^2}{2\nu R^3}(\sigma - \sigma_0)\left[5\sigma^3 - \left(13\sigma_0 - \frac{6}{\sigma_0}\right)\sigma^2 + (5\sigma_0 - 6)\sigma + 6\sigma_0 - \frac{3}{\sigma_0}\right], \tag{19}$$

și

$$v_0 = \frac{C^2}{2\nu R^3}\sqrt{1-\sigma^2}(\sigma - \sigma_0)^2\left(\sigma - \frac{5}{2}\sigma_0 + \frac{3}{2\sigma_0}\right), \tag{20}$$

iar distribuția de presiuni este dată de relația

$$p - p_0 = 2\mu C(1 - 3\sigma^2)\left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{R^3}\right), \tag{21}$$

unde p_0 este presiunea la o rază R_0.

O examinare a acestor relații arată că luarea în considerare numai a primilor doi termeni ai soluției restrînge destul de mult valabilitatea ei la cazul cînd unghiul α este relativ mic și pentru numere Reynolds de asemenea mici.

Acest lucru apare evident din figurile 2 *a*, *b* de unde se constată, de exemplu, că un ajutaj convergent cu un număr Reynolds mediu $Re_m = 10$ conduce la o distribuție de viteze cu un maxim inelar care nu corespunde realității fizice. Numărul Re_m este definit față de viteza medie și unghiul solid $\beta = 2\pi(1 - \sigma_0)$ corespunzător conului de semiunghi α,

$$Re_m = \frac{v_m \beta R}{\nu}. \tag{22}$$

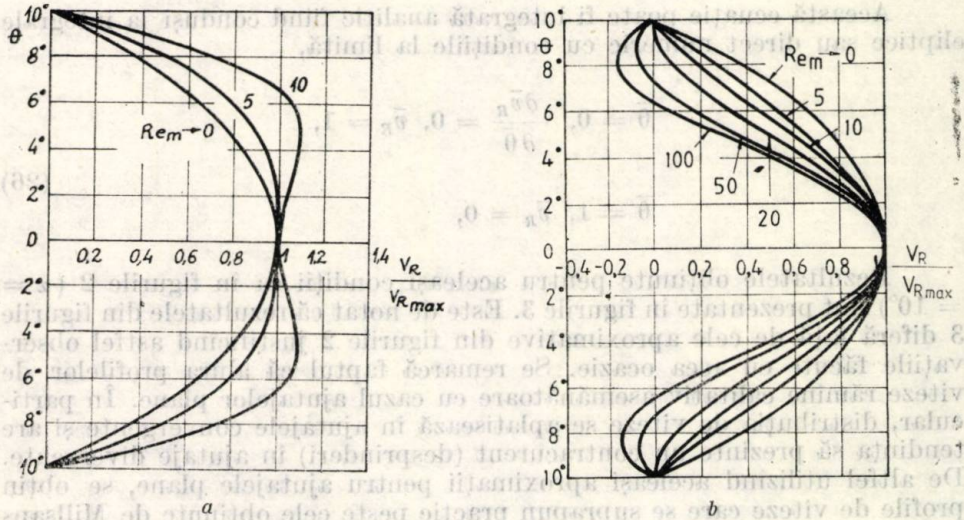


Fig. 2. — Profile de viteze (Slezkin) pentru $\alpha = 10°$, laminar : *a*) convergent ; b) divergent.

O manieră de tratare aproximativă, dar destul de corectă pentru unghiuri α mici se poate deduce extinzînd unele raționamente anterioare efectuate în cazul ajutajelor plane [3], [4]. Astfel apare ca judicioasă, în condițiile arătate, neglijarea componentei v_θ (care din formula (20) rezultă mult mai mică decît v_R schimbînd și de semn în interiorul intervalului); în plus din aceleași motive derivata presiunii în raport cu θ poate fi neglijată față de derivata presiunii în raport cu R.

Cu aproximațiile menționate, ecuațiile de mișcare (4) se simplifică sub forma

$$\rho v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} = -\frac{\partial p}{\partial R} + \mu\left[\frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right)\right], \tag{23}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial\theta}.$$

Să introducem parametri adimensionali

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\alpha},\quad \bar{v}_R = \frac{v_R}{v_{R\,max}},\quad Re = \frac{\rho v_{R\,max} R\alpha}{\mu},$$

$$A = Re\cdot\alpha,\quad B_R = -\frac{R^2\alpha^2}{\mu v_{R\,max}}\frac{\partial p}{\partial R}; \tag{24}$$

prima ecuație (23) ia atunci forma:

$$\frac{1}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\left(\bar{\theta}\frac{\partial\bar{v}_R}{\partial\bar{\theta}}\right) + B_R - 2A\bar{v}_R^2 = 0. \tag{25}$$

Această ecuație poate fi integrată analitic fiind conduși la integrale eliptice sau direct numeric cu condițiile la limită,

$$\bar{\theta} = 0,\quad \frac{\partial\bar{v}_R}{\partial\bar{\theta}} = 0,\quad \bar{v}_R = 1,$$

$$\bar{\theta} = 1,\quad \bar{v}_R = 0, \tag{26}$$

Rezultatele obținute pentru aceleași condiții ca în figurile 2 ($\alpha = 10°$) sînt prezentate în figurile 3. Este de notat că rezultatele din figurile 3 diferă față de cele aproximative din figurile 2 justificînd astfel observațiile făcute cu acea ocazie. Se remarcă faptul că alura profilelor de viteze rămîne calitativ asemănătoare cu cazul ajutajelor plane. În particular, distribuția de viteze se aplatisează în ajutajele convergente și are tendința să prezinte un contracurent (desprinderi) în ajutaje divergente. De altfel utilizînd aceleași aproximații pentru ajutajele plane, se obțin profile de viteze care se suprapun practic peste cele obținute de Millsaps și Polhausen [2].

După cum rezultă din figura 3*b*, în ajutajele divergente desprinderea apare dacă numărul Reynolds mediu în valoare absolută depășește aproximativ valoarea 7, ceea ce corespunde la valoarea $Re \cdot \alpha \cong 10$.

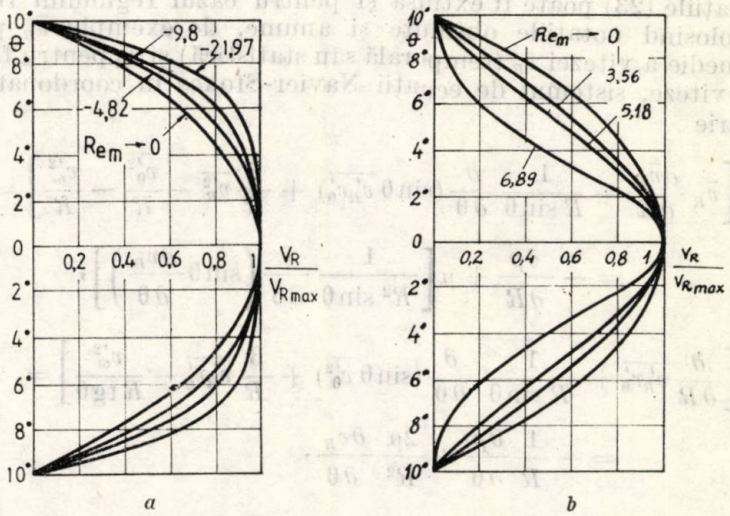


Fig. 3. — Profile de viteze obținute numeric ($\alpha = 10°$, laminar): a) convergent; *b*) divergent.

Pentru mișcarea laminară, profilele de viteze depind în realitate de parametrul $A = Re \cdot \alpha$ și sînt prezentate cîteva astfel de profile în figura 4.

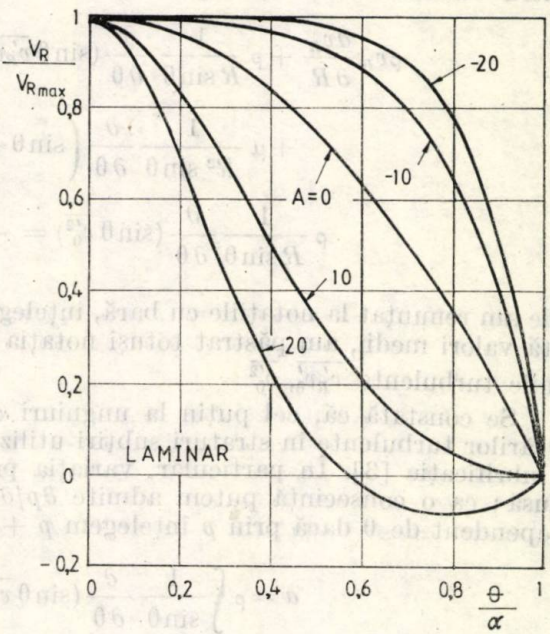


Fig. 4. — Profile de viteze pentru regim laminar funcție de parametrul $A = Re\alpha$ (numeric).

MIȘCĂRI TURBULENTE

Ca și pentru mișcarea plană [3], [4] metoda aproximativă care pleacă de la ecuațiile (23) poate fi extinsă și pentru cazul regimului turbulent. Astfel, folosind notațiile obținute și anume, de exemplu $\bar{v}_R$ pentru o valoare medie a vitezei v_R (temporală sau statistică) și v'_R pentru fluctuația aceleiași viteze, sistemul de ecuații Navier-Stokes în coordonate sferice se va scrie

$$\rho\left[\bar{v}_R\frac{\partial\bar{v}_R}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\overline{v'_Rv'_\theta})+\frac{2}{R}\overline{v'^2_R}-\frac{\overline{v'^2_\theta}}{R}-\frac{\overline{v'^2_\omega}}{R}\right]=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial R}+\mu\left[\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right)\right],$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial R}\overline{v'_Rv'_\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\overline{v'^2_\theta})+\frac{3}{R}\overline{v'_Rv'_\theta}-\frac{\overline{v'^2_\omega}}{R\,\mathrm{tg}\,\theta}\right]=$$

$$=-\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{R^2}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}, \tag{27}$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial R}\overline{v'_Rv'_\omega}+\frac{\partial}{R\partial\theta}\overline{v'_\theta v'_\omega}+\frac{3\overline{v'_Rv'_\omega}}{R}+\frac{2\overline{v'_\theta v'_\omega}}{R\,\mathrm{tg}\,\theta}\right]=-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\omega}=0,$$

unde am considerat mișcarea medie cu simetrie axială și $\bar{v}_\theta=0$.

Operînd acum simplificări similare cu cazul laminar (23), vom obține pentru direcțiile R și θ, respectiv,

$$\rho v_R\frac{\partial v_R}{\partial R}+\rho\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\overline{v'_Rv'_\theta})=-\frac{\partial p}{\partial R}+$$

$$+\mu\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right), \tag{28}$$

$$\rho\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\overline{v'^2_\theta})=-\frac{\partial p}{R\partial\theta},$$

unde am renunțat la notațiile cu bară, înțelegînd că toate mărimile reprezintă valori medii, am păstrat totuși notația cu bară numai pentru tensiunile turbulente $\overline{v'_Rv'_\theta}$, $\overline{v'^2_\theta}$.

Se constată că, cel puțin la unghiuri α mici regăsim proprietățile mișcărilor turbulente în straturi subțiri utilizate de exemplu în problema de lubrificație [3]. În particular, variația presiunii în raport cu θ este redusă; ca o consecință putem admite $\partial p/\partial R$ în prima ecuație (28) ca independent de θ dacă prin p înțelegem $p+a$, unde a este

$$a=\rho\int\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\overline{v'^2_R})\,\mathrm{d}\theta. \tag{29}$$

În consecinţă, putem obţine o primă informaţie asupra profilului de viteze v_R din integrarea primei ecuaţii (28) evaluînd tensiunea turbulentă $\overline{v'_R v'_\theta}$ cu ajutorul unuia din modelele de turbulenţă curente. De pildă, utilizînd conceptul de lungime de amestec vom considera

$$\overline{v'_R v'_\theta} = -l_a^2 \frac{\partial v_R}{R\partial\theta}\left|\frac{\partial v_R}{R\partial\theta}\right| \tag{30}$$

Admiţînd ,după cum am menţionat numai unghiuri α mici putem considera aproximativ $\sin\theta = \theta$. În aceste condiţii prima ecuaţie (28) se va scrie

$$\rho v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \rho \frac{1}{R\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(l_a^2\theta \frac{\partial v_R}{R\partial\theta}\left|\frac{\partial v_R}{R\partial\theta}\right|\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial R} + \mu \frac{1}{R^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta \frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right), \tag{31}$$

unde în apropierea peretelui superior, de exemplu,

$$l_a = k^* R(\alpha - \theta), \tag{32}$$

în care k^* poate fi considerat fie o constantă, fie o funcţie de numărul Reynolds după modul în care se racordează zona turbulentă centrală cu substratul laminar [8].

Ecuaţia (31) poate fi scrisă adimensional folosind mărimile deja folosite (24). Obţinem astfel

$$Re\frac{1}{\bar\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\left[\bar\theta\bar l_a^2 \frac{\partial\bar v_R}{\partial\bar\theta}\left|\frac{\partial\bar v_R}{\partial\bar\theta}\right|\right] + \frac{1}{\bar\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\left(\bar\theta\frac{\partial\bar v_R}{\partial\bar\theta}\right) +$$

$$+ B_R - 2Re\alpha\bar v_R^2 = 0, \tag{33}$$

unde

$$\bar l_a = \frac{l_a}{R\alpha}. \tag{34}$$

În continuare, această ecuaţie poate fi integrată numeric utilizînd de exemplu legea (32) pentru zona centrală (turbulent complet dezvoltată) şi evoluînd în mod corespunzător mişcarea în vecinătatea pereţilor. Astfel, dacă pentru simplificare se utilizează metoda propusă în referinţele [8], [9], respectiv renunţarea la considerarea unui strat laminar separat în apropierea fiecărui perete, calculele se simplifică; în aceste condiţii însă constanta k^* trebuie micşorată funcţie de numărul Reynolds, deoarece prin procedeul aproximativ considerat se supraevaluează tensiunile turbulente la perete. Pentru valoarea $k^*(Re)$ se pot considera datele din referinţa [8] deduse pe baza unor experienţe relative la mişcări paralele.

Unele rezultate sînt prezentate în figurile 5 și 6. Astfel, în figurile 5 *a*, *b*, *c* se prezintă profilele de viteză pentru un număr Reynolds *Re* definit în relația (24) și pentru diferite valori *A* (24), unde în continuare $A < 0$ reprezintă un ajutaj convergent iar $A > 0$ un ajutaj divergent.

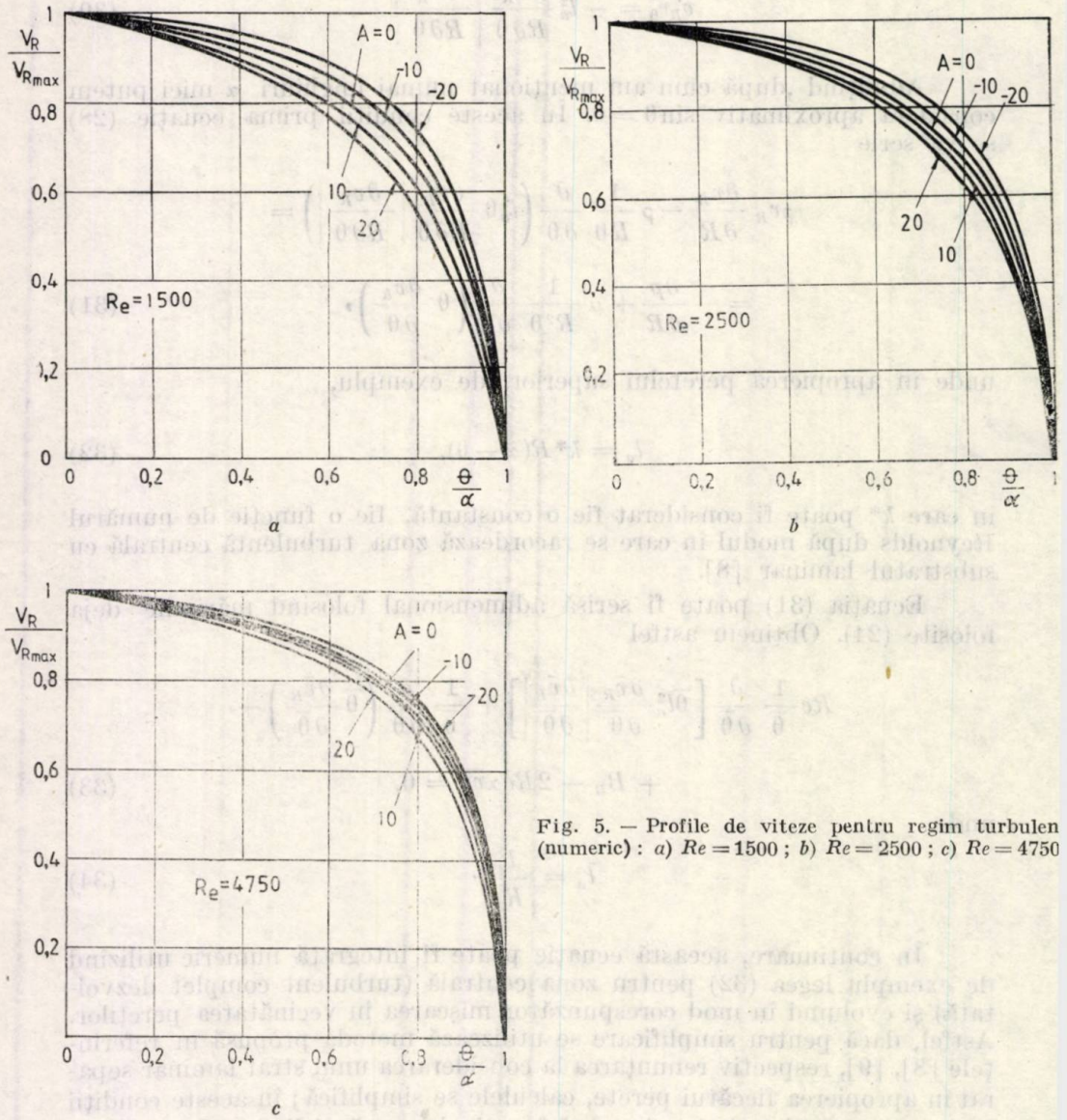


Fig. 5. — Profile de viteze pentru regim turbulen (numeric): *a*) $Re = 1500$; *b*) $Re = 2500$; *c*) $Re = 4750$

Deoarece în cazul cînd *Re* = constant și *A* variabil reprezintă ajutaje cu unghiuri diferite, în figura 6 s-au reprezentat cazurile $\alpha = 5°$ pentru dieferite valori *Re* (respectiv diferite valori pentru parametrul *A*).

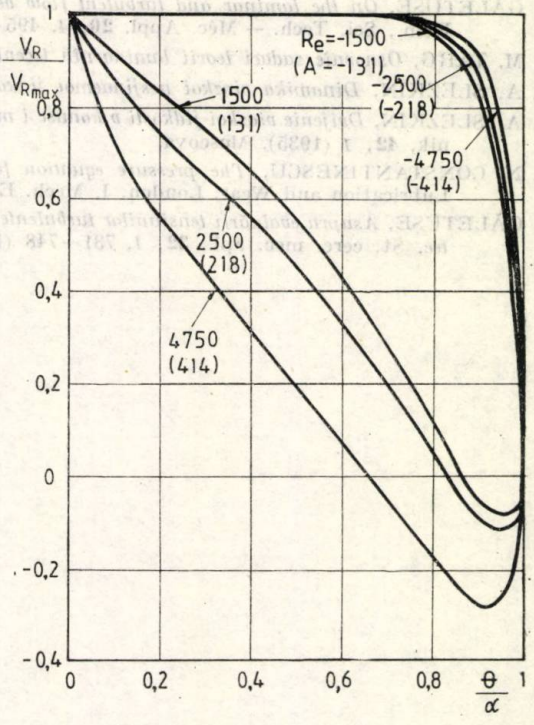


Fig. 6. — Profile de viteze pentru regim turbulent pentru $\alpha = 5°$ și diferite numere Reynolds.

CONCLUZII

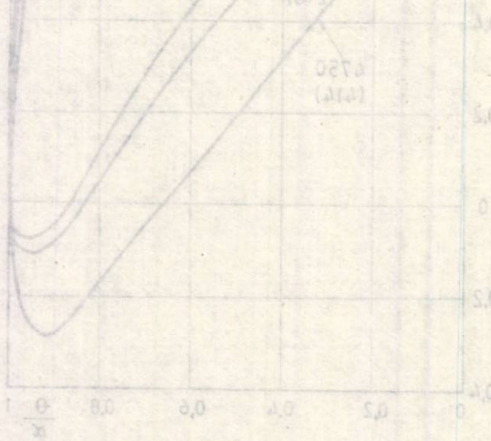
Din considerațiile precedente rezultă că, cel puțin pentru valori mici, mișcarea în ajutajele conice poate fi studiată prin metode, în multe privințe, asemănătoare cazului ajutajelor plane. Apariția turbulenței în asemenea ajutaje alterează semnificativ profilul de viteze reducînd într-o măsură importantă influența unghiului de înclinare respectiv a gradientului axial de presiune. În ajutajele convergente mișcarea este accelerată, iar profilul de viteze tinde către unul constant pe secțiune cu o comportare tip strat limită la perete. În ajutajele divergente mișcarea este alterată considerabil față de cazul Poisseuille prezentînd relativ repede un contracurent la perete.

Primită la redacție la 24 iulie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. H. SCHLICHTING, *Boundary layer theory*, Springer, Berlin, 1968.
2. K. MILLSAPS, K. POLHAUSEN, *Thermal distribution in Jeffrey-Hamel flows between nonparallel plane walls*, JAS, **20**, 187—196 (1953).
3. V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLETUȘE, *On the possibilities of improving the accuracy, of the evaluation of inertia forces in laminar and turbulent films*, ASME Trans-SSeries F, J. of Lub. Tech., **96**, *1*, 69—79 (1974).

4. S. GĂLETUȘE, *On the laminar and turbulent flow between non-parallel plane walls*, Rev. Rom., Sci. Tech. — Méc. Appl. **20**, *4*, 495—506 (1975).
5. S. M. TARG, *Osnovnie zadaci teorii laminarnih tecenii*, G.I.T.T.L., — Moscova 1951.
6. N. A. SLEZKIN, *Dinamika viazkoi nesjinaemoi jidkosti*, G.I.T.T.L., Moskova, 1955.
7. N. A. SLEZKIN, *Dvijenie viazkoi jidkosti v konuse i mejdn dvunia konusami*, Matem. Sbornik, **42**, *1* (1935), Moscova.
8. V. N. CONSTANTINESCU, *The pressure equation for turbulent lubrication*, Proc. Conf. Lubrication and Wear, London, I. Mech. Eng., **182**, 132—134 (1967).
9. S. GĂLETUȘE, *Asupra evaluării tensiunilor turbulente de frecare folosind lungimea de amestec*, St. cerc. mec. apl., **32**, *4*, 731—748 (1973).



CONSTANTE EFECTIVE ȘI PROBLEME LA LIMITĂ ÎN TEORIA STATISTICĂ A MATERIALELOR COMPOZITE. APROXIMAȚIA CORELAȚIONALĂ.

de EUGEN SOÓS

Centrul de Matematică, INCREST

Pentru materiale compozite, statistic omogene și izotrope, în aproximația corelațională, se formulează condițiile la limită adecvate. Se cercetează asemănările și deosebirile existente între modelul statistic și cel corespunzător teoriei deterministe a materialelor de ordinul unu. Se arată că în cadrul modelului statistic soluția în general nu este unică.

1. INTRODUCERE

Una din problemele fundamentale ale mecanicii materialelor compozite constă în determinarea ecuației constitutive satisfăcută de tensiunea și de deformația medie, cunoscînd ecuațiile constitutive ale componentelor și caracteristicile geometrice ale distribuțiilor fazelor. Obținerea ecuației constitutive trebuie să fie însoțită de deducerea ecuației de echilibru ce trebuie să fie satisfăcută de tensiunea medie. În cazul în care distribuția fazelor are caracter aleator, cele două probleme precizate pot fi atacate și rezolvate cu mai mult sau mai puțin succes de mecanica statistică a corpurilor continue, teorie ce folosește aparatul matematic al teoriei probabilităților, mai precis teoria funcțiilor aleatoare. Elementele aecestei teorii sînt prezentate concentrat, dar clar în monografia lui Teodosiu și Dincă ([1], cap. VII). Sinteze din ce în ce mai complete privind rezultatele obținute în teoria materialelor elastice compozite, abordată pe cale probabilistă, sînt prezentate în monografiile lui Beran [2], Lomakin [3], Kröner [4] și Șermergor [5]. O caracteristică comună a tuturor lucrărilor de sinteză sau a articolelor poate fi rezumată astfel: deducerea ecuației de echilibru satisfăcută de tensiunea medie și stabilirea ecuației constitutive, satisfăcută de tensiunea medie și de deformația medie, nu este însoțită de formularea condițiilor la limită ce trebuie să fie verificate de entitățile menționate. Drept ilustrare a acestei situații pot fi citate lucrările lui Beran și McCoy [6, 7], în care se abordează situația dificilă în care, deși compozitul, format din faze liniare, elastice, omogene, izotrope, este statistic omogen și izotrop, nici deformația medie, nici tensiunea medie nu sînt omogene în corp. Stabilirea ecuației de echilibru este însoțită de deducerea ecuației constitutive în cazul în care corelațiile coeficienților elastici ai compozitului, considerați ca funcții aleatoare, sînt mici, în comparație cu valorile medii ale acelorași coeficienți, iar variațiile spațiale ale deformației medii sînt lente, în comparație cu fluctuațiile rapide ale coeficienților elastici. Rezultatele prezentate de autori nu sînt însă însoțite de stabilirea condițiilor la limită ce trebuie să fie satisfăcute de deplasarea sau de tensiunea medie pe frontiera corpului. În acest mod modelul nu este operativ. Cu toate acestea meritul incontestabil al celor doi autori constă în accentuarea asemănărilor (formale) și a deosebirilor (esențiale) ce există între modelul parțial elaborat de ei, pe de o parte, și modelul matematic determinist al solidelor elastice de ordi-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 4, 1985, P. 335—355

nul unu, elaborat și cercetat de Toupin [8], Toupin și Gazis [9], Mindlin [10], Mindlin și Eschel [11], pe de altă parte.

Ideea centrală a prezentei lucrări constă în formularea, pe o cale rațională, a condițiilor la limită, corespunzătoare aproximației lui Beran și McCoy [6], [7], folosind în acest scop o teoremă a lucrului mecanic și rezultate, privind condițiile la limită, specifice modelelor construite de Toupin [8] și Mindlin [10].

În final se va constata un rezultat oarecum surprinzător, semnalat vag și de Beran și McCoy : energia specifică de deformație, corespunzătoare modelului, nu este pozitiv definită ; în consecință nu se poate demonstra o teoremă de unicitate de tip Kirchhoff. Situația semnalată arată că modelul (aproximativ) al lui Beran și McCoy, complectată cu condiții la limită adecvate, este în stare să *semnalizeze* existența unor limite ale domeniului său de aplicabilitate ceea ce nu poate realiza teoria obținută în aproximația de ordin inferior, ce neglijează complet fie influența corelațiilor coeficienților elastici, fie neomogeneitatea spațială a tensiunilor și deformațiilor medii. O situație perfect analoagă a fost pusă în evidență de Mindlin [12], într-un studiu consacrat cercetării legăturii ce există între un model discret, respectiv continuu clasic sau generalizat al unui solid elastic liniar.

În ultima parte a acestei lucrări vor fi analizate cîteva exemple relativ simple.

2. LEGĂTURA DINTRE ECUAȚIA CONSTITUTIVĂ DE TIP BERAN-McCOY PENTRU VALORI MEDII ȘI ECUAȚIA CONSTITUTIVĂ DETERMINISTĂ DE TIP TOUPIN-MINDLIN DIN TEORIA SOLIDELOR ELASTICE LINIARE DE ORDINUL UNU

Presupunem, împreună cu McCoy și Beran [6], că ecuația constitutivă a unui material compozit are forma

$$T_{ij}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\delta_{ij}E_{mm}(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})E_{ij}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

unde $T_{ij}(\mathbf{x})$ și $E_{ij}(\mathbf{x})$ reprezintă componentele tensorului tensiune, respectiv tensorului micilor de formații în locul $\mathbf{x}$, într-un sistem cartezian, ortogonal de coordonate (x_1, x_2, x_3), iar coeficienții lui Lamé $\lambda(\mathbf{x})$ și $\mu(\mathbf{x})$ *sînt funcții aleatoare* de variabila spațială $\mathbf{x}$.

Presupunem, de asemenea, că *mediul este statistic omogen și izotrop*. În acest caz valorile medii $\langle\lambda(\mathbf{x})\rangle$ și $\langle\mu(\mathbf{x})\rangle$ vor fi independente de locul $\mathbf{x}$ și vor fi notate simplu prin $\langle\lambda\rangle$ și $\langle\mu\rangle$. Totodată, pe baza ipotezei admise, rezultă că funcțiile de corelație $\langle\mu'(\mathbf{x})\mu'(\mathbf{y})\rangle$, $\langle\lambda'(\mathbf{x})\mu'(\mathbf{y})\rangle$, $\langle\mu'(\mathbf{x})\lambda'(\mathbf{y})\rangle$, $\langle\mu'(\mathbf{x})\mu'(\mathbf{y})\rangle$, unde prin $\lambda'(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) - \langle\lambda\rangle$ și $\mu'(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \langle\mu\rangle$ am desemnat fluctuațiile funcțiilor aleatoare $\lambda(\mathbf{x})$, respectiv $\mu(\mathbf{x})$, vor depinde de $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ numai prin intermediul distanței $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ dintre locurile $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$. Pentru desemnarea acestor funcții de corelație vom utiliza notațiile

$$C_{\lambda\lambda}(r) = \langle\lambda'(\mathbf{x})\lambda'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle,\ C_{\mu\mu}(r) = \langle\mu(\mathbf{x})\mu'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle,$$
$$C_{\lambda\mu}(r) = \langle\lambda'(\mathbf{x})\mu'(\mathbf{x}+\mathbf{r}\rangle = \langle\mu'(\mathbf{x})\lambda'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = C_{\mu\lambda}(r),\ \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}. \tag{2.2}$$

Vom desemna în continuare prin $t_{ij}(\mathbf{x}) = \langle T_{ij}(\mathbf{x})\rangle$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \langle E_{ij}(\mathbf{x})\rangle$ valorile medii, *în general neomogene* ale funcţiilor aleatoare $T_{ij}(\mathbf{x})$ respectiv $E_{ij}(\mathbf{x})$.

Presupunînd că variaţia spaţială a funcţiilor deterministe $t_{ij}(\mathbf{x})$ şi $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ este suficient de lentă, în sensul că lungimea de undă ce caracterizează aceste variaţii este mult mai mare decît raza de corelaţie a funcţiilor aleatoare $\lambda(\mathbf{x})$ şi $\mu(\mathbf{x})$, şi admiţînd că mărimile $\langle\lambda'^2\rangle/\langle\lambda\rangle^2$, $\langle\mu'^2\rangle/\langle\mu\rangle^2$, $\langle\lambda'\mu'\rangle/\langle\lambda\rangle\langle\mu\rangle$ sînt mici în comparaţie cu 1, Beran şi McCoy [6] au arătat că relaţia dintre tensiunea medie $t_{ij}(\mathbf{x})$ şi deformaţia medie $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ este descrisă de următoarea ecuaţie constitutivă, ce descrie satisfăcător comportarea elastică, liniară a materialului compozit analizat:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij}, \tag{2.3}$$

unde

$$\sigma_{ij} = \lambda^* \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^* \varepsilon_{ij}, \tag{2.4}$$

cu

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \langle\lambda\rangle - \frac{\langle\lambda'^2\rangle + \frac{4}{3}\langle\lambda'\mu'\rangle}{\langle\lambda + 2\mu\rangle} + \frac{4\langle\lambda + \mu\rangle\langle\mu'^2\rangle}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}, \\ \mu^* &= \langle\mu\rangle - \frac{2\langle 3\lambda + 8\mu\rangle\langle\mu'^2\rangle}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

iar

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = {} & a_1 \varepsilon_{kk,mm}\delta_{ij} + 2a_2 \varepsilon_{kl,kl}\delta_{ij} + 2a_3 \varepsilon_{ij,mm} + \\ & + 2a_4 \varepsilon_{kk,ij} + 4a_5(\varepsilon_{ki,kj} + \varepsilon_{kj,ki}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

cu

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4k_{\lambda\mu}}{15\langle\lambda + 2\mu\rangle} + \frac{8\langle\lambda + \mu\rangle}{105\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}k_{\mu\mu}, \\ a_2 = a_4 &= \frac{k_{\lambda\mu}}{5\langle\lambda + 2\mu\rangle} - \frac{2\langle\lambda + \mu\rangle}{35\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}k_{\mu\mu}, \\ a_3 &= -\frac{2\langle 3\lambda + 10\mu\rangle}{105\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}k_{\mu\mu}, \quad a_5 = \frac{\langle 3\lambda + 10\mu\rangle}{70\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}k_{\mu\mu}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

unde *constantele* $k_{\lambda\mu}$ şi $k_{\mu\mu}$ se obţin prin intermediul funcţiilor de corelaţie (2.2) pe baza următoarelor relaţii:

$$k_{\lambda\mu} = \int_0^\infty rC_{\lambda\mu}(r)\mathrm{d}r, \quad k_{\mu\mu} = \int_0^\infty rC_{\mu\mu}(r)\mathrm{d}r. \tag{2.8}$$

Din relaţiile (2.3)—(2.7) se constată la prima vedere că în ecuaţia constitutivă a lui Beran şi McCoy apar şase constante independente λ^*, μ^*, a_1, $a_2 = a_4$, a_3 şi a_5, ce pot fi *complet* determinate pe baza caracteristicilor statistice de ordinul unu şi doi ale compozitului considerat.

Din încadrarea (formală) a ecuației constitutive de tip Beran și McCoy în teoria de tip Toupin-Mindlin a materialelor de ordinul unu va rezulta că în realitate comportarea corpului, în domeniul de valabilitate al aproximațiilor admise este regizată de cinci constante de material, ce se determină complet pe baza mărimilor prezente în relațiile (2.3)—(2.8), deci pe baza statisticii compozitului în aproximația corelațională, după terminologia folosită de Șermergor (vezi [5], cap. 5, §7).

În cele ce urmează vom nota cu $u_i(\mathbf{x}) = \langle U_i(\mathbf{x}) \rangle$ valorile medii ale componentelor aleatoare $U_i(\mathbf{x})$ ale vectorului deplasare. Între funcțiile aleatoare $U_i(\mathbf{x})$ și $E_{ij}(\mathbf{x})$ există relația de legătură clasică $2E_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i}$, de unde urmează (vezi de exp. [1], cap. VII, §26) că și funcțiile deterministe $u_i(\mathbf{x})$ și $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ satisfac relații de același tip

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \tag{2.9}$$

În continuare vom nota cu $\varkappa_{ijk}(\mathbf{x})$ componentele gradientului de ordinul unu al lui $\varepsilon_{jk}(\mathbf{x})$; adică

$$\varkappa_{ijk} = \varkappa_{ikj} = \varepsilon_{jk,i}. \tag{2.10}$$

Se poate verifica prin calcul elementar, bazat pe relațiile (2.9) și (2.10) că au loc următoarele relații (presupunînd că funcțiile $u_i(\mathbf{x})$ sînt de clasă C^3 în domeniul lor de definiție):

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kk,mm} = \varkappa_{mkk,m}, \quad \varepsilon_{ij,mm} = \varkappa_{mij,m}, \quad \varepsilon_{kl,kl} = \varkappa_{mkk,m}, \\ \varepsilon_{kk,ij} = (\varkappa_{ijm} + \varkappa_{jim} - \varkappa_{mij})_{,m}, \quad \varepsilon_{ki,kj} + \varepsilon_{kj,ki} = (\varkappa_{ijm} + \varkappa_{jim})_{,m}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Folosind identitățile precedente se constată imediat că expresia (2.6) a lui τ_{ij} poate fi scrisă în următoarea formă echivalentă:

$$\tau_{ij} = -\mu_{mij,m}, \tag{2.12}$$

unde tensorul de ordinul trei μ_{mij} are expresia

$$\mu_{mij} = \mu_{mji} = -\alpha\varkappa_{mkk}\delta_{ij} - \beta\varkappa_{mij} - \gamma(\varkappa_{ijm} + \varkappa_{jim}), \tag{2.13}$$

iar constantele α, β, γ se exprimă prin a_1, $a_2 = a_4$, a_3 și a_5 prin următoarele relații simple:

$$\alpha = a_1 + 2a_2, \quad \beta = 2(a_3 - a_4), \quad \gamma = 2(a_4 + 2a_5). \tag{2.14}$$

Folosind formulele (2.7) deducem expresiile lui α, β, γ în funcție de caracteristicile statistice ale compozitului:

$$\alpha = \frac{2}{15\langle\lambda + 2\mu\rangle} k_{\lambda\mu} - \frac{4\langle\lambda + \mu\rangle}{105\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle} k_{\mu\mu},$$

$$\beta = -\frac{2}{5\langle\lambda + 2\mu\rangle} k_{\lambda\mu} - \frac{28\langle\mu\rangle}{105\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle} k_{\mu\mu}, \tag{2.15}$$

$$\gamma = \frac{2}{5\langle\lambda + 2\mu\rangle} k_{\lambda\mu} + \frac{2\langle\lambda + 8\mu\rangle}{35\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle} k_{\mu\mu}.$$

Prin combinarea relațiilor (2.3) și (2.12) conchidem că *ecuația constitutivă* a modelului de tip Beran-McCoy poate fi scrisă în forma următoare :

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \mu_{mij,m}, \tag{2.16}$$

unde legătura dintre σ_{ij}, ε_{ij} pe de o parte, și dintre μ_{mij}, $\varkappa_{mij}$, pe de altă parte, este stabilită de relațiile (2.4), respectiv (2.13). În consecință, modelul Beran-McCoy, privit ca o realizare a modelului Toupin-Mindlin, este caracterizat complet de cinci constante de material λ^*, μ^*, α, β, și γ.

3. MODELUL BERAN-MCCOY, REALIZARE A MODELULUI TOUPIN-MINDLIN. STABILIREA CONDIȚIILOR LA LIMITĂ

Presupunînd că $f_i(\mathbf{x})$, componentele forței de volum sînt funcții deterministe, Beran și McCoy au arătat [6] că valorile medii $t_{ij}(\mathbf{x})$ ale tensiunilor aleatoare $T_{ij}(\mathbf{x})$ satisfac următoarea ecuație de echilibru în domeniul ocupat de corp :

$$t_{jk,k} + f_j = 0. \tag{3.1}$$

În cele ce urmează vom presupune că funcțiile $u_i(\mathbf{x})$ sînt de clasă C^4 și vom deduce o *teoremă a lucrului mecanic*, care va sugera condițiile la limită ce trebuie să fie atașate modelului Beran-McCoy pentru ca el să fie operativ.

În acest scop observăm la început că ecuația de echilibru (3.1), pe baza relației (3.6) capătă forma

$$\sigma_{jk,k} - \mu_{ijk,ik} + f_j = 0. \tag{3.2}$$

Prin înmulțirea acestei ecuații cu u_j și prin operații elementare de *integrare prin părți*, pe baza formulelor (2.9) și (2.10), deducem că trebuie să fie satisfăcută relația

$$(u_j t_{jk})_{,k} + (\mu_{ijk} u_{j,k})_{,i} - \sigma_{jk}\varepsilon_{jk} - \mu_{ijk}\varkappa_{ijk} + u_j f_j = 0. \tag{3.3}$$

Introducînd mărimea

$$2W = \sigma_{jk}\varepsilon_{jk} + \mu_{ijk}\varkappa_{ijk}, \tag{3.4}$$

integrînd relația (3.3) pe domeniul V ocupat de corp și notînd cu S frontiera lui V, iar cu n_k componentele versorului normalei exterioare la S,

în urma folosirii teoremei lui Gauss-Ostrogradski, conchidem că trebuie să fie satisfăcută următoarea relație globală, *consecință* a ecuației de echilibru și a ecuației constitutive de tip Beran-McCoy :

$$2\int_V W\,dv = \int_V u_j f_j\,dv + \int_S u_j t_{jk} n_k\,ds + \int_S \mu_{ijk} u_{j,k}\,ds. \tag{3.5}$$

Relația obținută este specifică modelului de tip Toupin-Mindlin (vezi de exp. [8] și [10]), a cărui construcție se realizează prin postularea unui principiu variațional.

Este esențial de remarcat că relația (3.5), în forma sa actuală, *nu* poate fi utilizată pentru stabilirea condițiilor la limită adecvate modelului Beran-McCoy, deoarece în ultimul termen apar derivatele $u_{j,k}$ ale lui u_j, ori este evident că în cazul în care componentele u_j ale valorii medii a vectorului deplasare sînt specificate pe frontiera S a corpului, derivatele $u_{j,k}$ în general, *nu* mai pot fi date arbitrar ; numai derivatele normale $u_{j,n}$ ale acestor componente pot fi specificate arbitrar pe S. În consecință, ultima integrală trebuie să fie transformată în mod corespunzător. În acest scop, urmîndu-i pe Toupin [8] și pe Mindlin [10] vom introduce *gradientul tangențial* D_j, definit pe S, pe baza următoarei relații :

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - n_j n_l \frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial}{\partial n}. \tag{3.6}$$

Evident are loc relația

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = n_j \frac{\partial}{\partial n} + D_j, \tag{3.7}$$

utilă în calcule. Prin folosirea ultimei relații, obținem succesiv :

$$n_i \mu_{ijk} u_{j,k} = n_i \mu_{ijk} u_{k,j} = n_i \mu_{ijk} n_j u_{k,n} + n_i \mu_{ijk} D_j u_k =$$

$$= n_i \mu_{ijk} n_j u_{k,n} + D_j(n_i \mu_{ijk} u_k) - u_k D_j(n_i \mu_{ijk}), \tag{3.8}$$

unde $u_{k,n} = \partial u_k / \partial n$.

Prin utilizarea unei teoreme de tip Stokes-Gauss-Ostrogradski-Green (vezi de exp. [8] §7, [10] §9 sau [13] cap. XV §8) și presupunînd că frontiera S este *netedă*, obținem imediat relația

$$\int_S D_j(n_i \mu_{ijk} u_k)\,ds = \int_S (D_l n_l)\, n_i \mu_{ijk} n_j u_k\,ds. \tag{3.9}$$

Astfel, făcînd uz de formulele (3.8) și (3.9) găsim :

$$\int_S n_i \mu_{ijk} u_{j,k}\,ds = \int_S n_i \mu_{ijk} n_j u_{k,n}\,ds + \int_S (D_l n_l)\, n_i \mu_{ijk} n_j u_k\,ds -$$

$$- \int_S u_k D_j(n_i \mu_{ijk})\,ds. \tag{3.10}$$

În fine, folosind (3.10), relația (3.5) capătă următoarea formă echivalentă :

$$2\int_V W\mathrm{d}v = \int_V u_j f_j \mathrm{d}v + \int_S u_j T_j \mathrm{d}s + \int_S u_{j,n} H_j \mathrm{d}s, \tag{3.11}$$

unde

$$\begin{aligned} T_j &= t_{jk} n_k - D_k(n_i \mu_{ijk}) + (D_l n_l)\, n_i \mu_{ijk} n_k, \\ H_j &= n_i \mu_{ijk} n_k, \text{ pe } S. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ținînd seama de faptul că componentele spațiale b_{ij} ale tensorului celei de a doua forme fundamentale a suprafeței S sînt definite prin relațiile (vezi de exp. [8] § 7, [13] cap. XV, § 6)

$$D_i n_k = -b_{ik} = -b_{ki} = D_k n_i, \tag{3.13}$$

expresia (3.12) a lui T_j poate fi scrisă în forma echivalentă

$$T_j = t_{jk} n_k + (b_{ik} - b_{ll} n_i n_k)\mu_{ijk} - n_i \mu_{ijk,k} + n_i n_k n_l \mu_{ijk,l}, \text{ pe } S. \tag{3.14}$$

Relația (3.11), consecință a ecuației de echilibru și a ecuației constitutive, împreună cu relațiile (3.12), exprimă *conținutul teoremei lucrului mecanic*. Analiza formulei (3.11), în lumina teoriei materialelor de ordinul unu arată că W introdus prin (3.4), reprezintă *densitatea energiei de deformație*, mărimile T_j, introduse prin (3.12), constituie *componentele vectorului tensiune* (sau tracțiune superficială) pe frontiera S, iar entitățile H_j, introduse prin (3.12), sînt *componentele vectorului hipertensiune*. Atît apariția hipertensiunii, cît și prezența tensorului celei de a doua forme fundamentale în relația (3.14) reflectă faptul că modelul de tip Beran-McCoy este un *model spațial slab nelocal*, ce ține seama, prin luarea în considerație a funcțiilor de corelație cu rază finită, nenulă, de acțiunile la distanță, ce influențează *direct* răspunsul material. Totodată, apariția componentelor b_{ij} în relația (3.14), arată că modelul ține seama de un *efect de strat limită;* frontiera S se comportă ca o suprafață materială cu proprietăți specifice, iar răspunsul corpului este influențat *direct* de *forma* frontierei, efect ce este complet neglijat în modelele clasice de tip Cauchy.

De asemenea, relația (3.11) precizează care sînt problemele la limită posibile ce pot fi formulate în mod rațional în cadrul modelului de tip Beran-McCoy. Astfel, pe frontiera S a corpului poate fi dat vectorul deplasare $\mathbf{u}$ și derivata sa normală $\mathbf{u}_{,n}$ (problemă de tip Dirichlet) sau vectorul tensiune $\mathbf{T}$ și vectorul hipertensiune $\mathbf{H}$ (problemă de tip Neumann). Accentuăm faptul, fără a intra în amănunte, că sînt posibile și alte combinații, ca și în teoria clasică a elastostaticii liniare.

În încheierea acestui paragraf mai menționăm o consecință importantă a relației (3.11) : Deoarece energia specifică de deformație W este invariantă la o rototranslație rigidă a corpului, din (3.11) rezultă imediat că

forța de volum **f**, vectorul tensiune **T** și vectorul hipertensiune **H** trebuie să satisfacă următoarele relații (vezi de exp. [9]) :

$$\int_V \mathbf{f}\,dv + \int_S \mathbf{T}\,ds = \mathbf{0}, \quad \int_V \mathbf{x}\times\mathbf{f}\,dv + \int_S \mathbf{x}\times\mathbf{T}\,ds + \int_S \mathbf{n}\times\mathbf{H}\,ds = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

Relațiile obținute au o dublă semnificație : (1) În cazul problemei la limită de tip Neumann ele constituie condiții necesare ce trebuie să fie îndeplinite de datele problemei, pentru ca ea să aibă soluție. (2) Din (3.15) rezultă din nou că **T** are atributele unui vector tensiune (sau tracțiune superficială), componenta tangențială a lui **H** are caracterul unui cuplu pe unitate de suprafață, iar componenta sa normală constituie un sistem autoechilibrat, având deci caracterul unor forțe duble. Desigur, observațiile precedente contribuie, în parte cel puțin, la clarificarea semnificației mecanice a hipertensiunii, concept introdus de Toupin [8] și de Mindlin [10].

4. ENERGIA SPECIFICĂ DE DEFORMAȚIE. UNICITATEA SOLUȚIEI ECUAȚIA LUI LAMÉ CORESPUNZĂTOARE MODELULUI BERAN-McCOY

Din relațiile (2.4), (3.13) și (3.4) rezultă următoarea expresie a energiei specifice de deformație în funcție de ε_{ij} și de $\varkappa_{ijk}$:

$$2W = \lambda^*\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll} + 2\mu^*\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl} - \alpha\varkappa_{mkk}\varkappa_{mll} - \beta\varkappa_{mij}\varkappa_{mij} - 2\gamma\varkappa_{mij}\varkappa_{ijm}. \quad (4.1)$$

De asemenea se constată prin calcul direct că componentele t_{ij} ale tensorului tensiune și componentele μ_{mij} ale tensorului hipertensiune se exprimă prin W pe baza relațiilor simple

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \mu_{mij} = \frac{\partial W}{\partial \varkappa_{mij}}. \quad (4.2)$$

Totodată compararea expresiei (4.1) a energiei specifice de deformație ce corespunde modelului Beran-McCoy cu expresia energiei specifice de deformație ce corespunde materialelor de ordinul unu de tip Toupin-Mindlin, arată că realizarea de tip Beran-McCoy a modelului Toupin-Mindlin corespunde următoarelor valori *particulare* ale constantelor de material prezente în teoria lui Toupin și Mindlin (vezi relația (11.3) din lucrarea [10]) :

$$\tilde{\lambda} = \lambda^*, \ \tilde{\mu} = \mu^*, \ \hat{a}_1 = 0, \ \hat{a}_2 = -\alpha/2, \ \hat{a}_3 = 0, \ \hat{a}_4 = -\beta/2, \ \hat{a}_5 = -\gamma, \quad (4.3)$$

unde $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_5$ reprezintă constantele de material prezente în modelul precizat al lui Mindlin și Toupin. Din acest punct de vedere, la o primă examinare, pare că teoria lui Beran-McCoy, reprezintă un caz particular al teoriei lui Toupin și Mindlin. În realitate relația dintre cele două teorii este mai complicată. În acest sens menționăm deocamdată doar faptul că în timp ce în teoria lui Toupin și Mindlin determinarea constantelor

de material este lăsată pe seama unor experienţe ulterioare, în teoria lui Beran-McCoy această determinare poate fi făcută în cadrul teoriei însăşi, pe baza caracteristicilor statistice ale compozitului. Desigur, cunoaşterea acestor caracteristici, în parte, se poate obţine tot numai pe cale experimentală. Totuşi, diferenţa semnalată va avea consecinţe importante, după cum se va vedea în continuare.

Pe baza relaţiei (4.1) şi conform criteriului lui Silvester rezultă că necesar şi suficient pentru ca W să fie formă pătratică pozitiv definită, deci pentru ca unicitatea soluţiei unei probleme la limită raţional formulată să fie demonstrabilă pe cale clasică, de tip Kirchhoff, este ca λ^*, μ^*, α, β şi γ să satisfacă următoarele inegalităţi:

$$\mu^* > 0, \quad 3\lambda^* + 2\mu^* > 0, \tag{4.4}$$

$$\alpha > 0, \quad \beta - \gamma < 0, \quad \beta + 2\gamma < 0, \quad \alpha + \beta + 2\gamma < 0, \quad 4\alpha + 3\beta - 2\gamma < 0. \tag{4.5}$$

Observăm că din $(4.5)_{2,3}$ *rezultă* şi inegalitatea

$$\beta + \gamma < 0. \tag{4.6}$$

Astfel de restricţii asupra constantelor de material în teoria de tip Toupin-Mindlin a materialelor elastice liniare, omogene şi izotrope, de ordinul unu sînt *impuse* pentru a asigura *din afară* pozitiv definirea lui W, fapt ce face posibilă automat demonstrarea unei teoreme de unicitate de tip Kirchhoff. Menţionăm că în lucrarea [14] Mindlin şi Tiersten prezintă o situaţie în care o problemă la limită concretă admite cel puţin două soluţii diferite, de îndată ce se renunţă la cerinţa de pozitiv definire a energiei specifice a deformaţiei.

În cadrul teoriei de tip Beran-McCoy, condiţiile necesare şi suficiente de pozitiv definire a lui W *nu pot fi impuse* din afară deoarece constantele de material λ^*, μ^*, α, β şi γ *sînt calculabile* pe baza caracteristicilor mecanice şi statistice ale materialului compozit. În paragraful următor vom efectua un astfel de calcul în cazul unui corp format din două faze şi vom confrunta rezultatele obţinute cu cerinţele de pozitiv definire ale lui W, stipulate de inegalităţile (4.4) şi (4.5).

Deocamdată vom exprima ecuaţia de echilibru (3.1) în deplasări. În acest scop în realţia (2.16), pe baza formulelor (2.4), (2.13), (2.9) şi (2.10) vom introduce componentele deplasării medii $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ şi vom înlocui rezultatul astfel obţinut în ecuaţia (3.1). Efectuînd calculele şi utilizînd identitatea

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \tag{4.7}$$

conchidem că deplasarea medie $\mathbf{u}$ trebuie să satisfacă în domeniul ocupat de corp următoarea ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale *de ordinul patru* de tip Lamé:

$$(\lambda^* + 2\mu^*)(1 + a\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu^*(1 + b\Delta) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{4.8}$$

unde constantele a și b, avînd *dimensiunea de lungime la pătrat* au următoarele expresii :

$$a = \frac{\lambda + \beta + 2\gamma}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad b = \frac{\beta + \gamma}{2\mu^*}. \tag{4.9}$$

În fine, folosind relațiile (2.15) deducem că a și b se exprimă prin caracteristicile mecanice și statistice ale compozitului prin următoarele formule :

$$(\lambda^* + 2\mu^*)\, a = \frac{8}{15\langle \lambda + 2\mu \rangle} k_{\lambda\mu} + \frac{8\langle \lambda + 8\mu \rangle}{105\langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle} k_{\mu\mu}, \tag{4.10}$$

$$\mu^* b = \frac{\langle 3\lambda + 10\mu \rangle}{105\langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle} k_{\mu\mu}. \tag{4.11}$$

5. DETERMINAREA CONSTANTELOR DE MATERIAL IN CAZUL UNUI COMPOZIT CU DOUĂ FAZE

Presupunem că materialul compozit este format din două faze avînd constantele elastice λ_1, μ_1, respectiv λ_2, μ_2 și concentrațiile c_1 și, respectiv, c_2. În acest caz se poate arăta (vezi Șermergor [5] „cap. 4, § 3) că valorile medii $\langle \lambda \rangle$, $\langle \mu \rangle$ și funcțiile de corelație $C_{\lambda\lambda}(r)$, $C_{\lambda\mu}(r)$, $C_{\mu\mu}(r)$ au următoarele expresii :

$$\langle \lambda \rangle = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2, \quad \langle \mu \rangle = c_1\mu_1 + c_2\mu_2, \tag{5.1}$$

$$C_{\lambda\lambda}(r) = \langle \lambda'^2(0) \rangle \varphi(r) = c_1c_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \varphi(r),$$

$$C_{\lambda\mu}(r) = C_{\mu\lambda}(r) = \langle \lambda'(0)\, \mu'(0) \rangle \varphi(r) = c_1c_2(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2) \varphi(r), \tag{5.2}$$

$$C_{\mu\mu}(r) = \langle \mu'^2(0) \rangle \varphi(r) = c_1c_2(\mu_1 - \mu_2)^2 \varphi(r),$$

unde funcția $\varphi(r)$ caracterizează gradul de corelare a fazelor ce alcătuiesc materialul compozit, este o funcție *nenegativă* și satisface condiția de normare $\varphi(0) = 1$. Deoarece corelarea fazelor scade repede cu distanța, funcția $\varphi(r)$ este în toate cazurile reale o funcție ce descrește rapid cu creșterea lui r. Vom admite (vezi [5], cap. IV, § 2)că această funcție are una din următoarele expresii :

$$\varphi(r) = e^{-(r/d)}, \quad \varphi(r) = e^{-(r^2/d^2)}, \tag{5.3}$$

unde constanta d este o caracteristică statistică a materialului compozit, reprezentînd *raza de corelație* și avînd valori mici, atît în comparație cu dimensiunile liniare ale corpului, cît și cu lungimea de undă ce caracterizează variațiile spațiale ale cîmpurilor medii luate în considerație, condiții ce stau la baza aproximării de tip Beran-McCoy.

Folosind (5.2) și $(5.3)_1$ pe baza formulelor (2.8) obținem pentru coeficienții $k_{\lambda\mu}$ și $k_{\mu\mu}$ următoarele valori:

$$k_{\lambda\mu} = c_1c_2\langle\lambda_1 - \lambda_2\rangle\langle\mu_1 - \mu_2\rangle d^2, \quad k_{\mu\mu} = c_1c_2\langle\mu_1 - \mu_2\rangle d^2. \tag{5.4}$$

În cazul în care utilizăm relația $(5.3)_2$, în formulele (5.4) d^2 trebuie să fie înlocuit cu $d^2/2$.

Din relația $(5.4)_2$ se constată imediat că parametrul $k_{\mu\mu}$ *nu* poate fi negativ:

$$k_{\mu\mu} > 0. \tag{5.5}$$

În schimb parametrul $k_{\lambda\mu}$ *poate fi atît pozitiv, cît și negativ.* În consecință, după cum rezultă din analiza expresiilor (2.15) ale constantelor de material α, β, γ, aceste mărimi în general *nu* vor satisface inegalitățile (4.5), necesare pentru ca energia specifică W să fie o formă pătratică pozitivă definită.

În particular, din (4.10), (4.11) și (5.4) obținem pentru constantele a și b prezente în ecuația de tip Lamé (4.8) următoarele expresii:

$$(\lambda^* + 2\mu^*)a = \frac{8c_1c_2d^2(7\langle\mu\rangle(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2) + \langle\lambda + 8\mu\rangle(\mu_1 - \mu_2)^2)}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}, \tag{5.6}$$

$$2\mu^*b = \frac{c_1c_2d^2\langle 3\lambda + 10\mu\rangle(\mu_1 - \mu_2)^2}{105\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle}. \tag{5.7}$$

În fine, ținînd seama de faptul că în acord cu ipotezele inițial admise

$$\langle\lambda'^2\rangle/\langle\lambda\rangle^2, \ \langle\mu'^2\rangle/\langle\mu\rangle^2, \ \langle\lambda'\mu'\rangle/\langle\lambda\rangle\langle\mu\rangle << 1, \tag{5.8}$$

pe baza expresiilor (2.5) ale coeficienților echivalenți λ^*, μ^* și avînd în vedere proprietățile constantelor de material λ_1, μ_1 și λ_2, μ_2, putem conchide că λ^* și μ^* satisfac inegalitățile (4.4), necesare pentru ca W să fie o formă pătratică pozitiv definită. În particular, din $(4.4)_2$ urmează că

$$\lambda^* + 2\mu^* > 0 \tag{5.8}$$

În consecință semnul lui a depinde de semnul expresiei ce se află în paranteză, la numărător, în membrul drept al relației (5.6) și acest semn poate fi atît pozitiv, cît și negativ. În schimb din (5.7) urmează nemijlocit că parametrul b nu *poate fi negativ*: deci

$$b > 0. \tag{5.9}$$

Astfel, din (4.9), în combinație cu $(4.4)_1$ și (5.9), rezultă că

$$\beta + \gamma > 0. \tag{5.10}$$

Ultimul rezultat, confruntat cu *consecința* (4.6) a condițiilor necesare și suficiente (4.4), (4.5) a pozitiv definirii lui W, arată că în modelul lui Beran și McCoy, *energia specifică de deformație nu poate fi pozitiv definită.*

Din concluzia precedentă se desprind mai multe consecințe importante :

(1) Modelul lui Beran-McCoy, complectat cu condiții la limită adecvate, nu este un caz particular al modelului Toupin-Mindlin ; avem de a face cu o *realizare parțială* a modelului materialelor de ordinul unu. (2) Nu este posibilă demonstrarea pe calea clasică a unei teoreme de unicitate de tip Kirchhoff. (3) Din ipotezele simplificatoare admise, ce stau la baza modelului Beran-McCoy, urmează că există domenii de valori ale lui ε_{ij} și $\varkappa_{ijk}$ pentru care valorile lui W sînt negative. Avînd în vedere semnificația mecanică a lui W, tocmai aceste domenii determină limitele de valabilitate ale modelului construit. Caracterizarea matematică precisă a acestor limite este o sarcină a cercetărilor viitoare.

În acest sens, modelul lui Beran-și McCoy este capabil să-și semnalizeze propriile sale limite, fapt ce nu poate să îl facă modelul bazat pe ipoteza cîmpurilor medii omogene, ipoteză ce stă la baza celor mai multe cercetări ce au drept scop determinarea pe cale deterministă sau statistică a *constantelor efective* ale materialelor compozite. (Pentru detalii vezi articolele de sinteză ale lui Hashin [15] și [16]).

6. EXEMPLU. PLACĂ COMPOZITĂ. PIERDEREA UNICITĂȚII

Presupunem că materialul ocupă domeniul

$$-L \leqslant x_1 \leqslant L, \quad -\infty < x_2, \; x_3 < +\infty, \tag{6.1}$$

și forțele de volum sînt nule.

Admitem că condițiile la limită au următoarea formă

$$\begin{aligned} &T_1 = T, \quad T_2 = T_3 = 0; \; H_1 = H, \; H_2 = H_3 = 0 \text{ pentru } x_1 = L, \\ &T_2 = -T, \; T_2 = T_3 = 0; \; H_1 = \overline{H}, \; H_2 = H_3 = 0 \text{ pentru } x_1 = -L, \end{aligned} \tag{6.2}$$

unde L, T, H și $\overline{H}$ sînt constante date.

Observăm că datele la limită (6.1) și (6.2) satisfac condițiile de compatibilitate (3.15).

Din considerațiile de simetrie urmează că soluția căutată trebuie să aibă următoarea formă :

$$\begin{aligned} &u_1 = u(x), \; x = x_1, \; u_2 = u_3 = 0 \text{ pentru } -L \leqslant x \leqslant L, \\ &-\infty < x_2, \; x_3 < +\infty. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Din ecuația de tip Lamé (4.8) rezultă că funcția necunoscută $u = u(x)$ trebuie să satisfacă următoarea ecuație diferențială de ordinul patru

$$\left(1 + a\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2u}{dx^2} = 0. \tag{6.4}$$

La rezolvarea acestei ecuații trebuie să distingem două cazuri:

a) *Materialul elastic de ordinul unu, de tip Toupin-Mindlin*; în acest caz, din condiția *impusă*, privind pozitiv definirea energiei specifice de deformație, rezultă

$$a < 0; \tag{6.5}$$

vom nota

$$a = -l^2, \tag{6.6}$$

unde l este o constantă, reală, pozitivă ,avînd *dimensiunea de lungime* și caracterizînd *o lungime internă*, specifică materialului. Din (6.6) urmează că soluția generală a ecuației (6.4) are forma

$$u = M \operatorname{ch}(x/l) + N \operatorname{sh}(x/l) + Px + Q, \tag{6.7}$$

M, N, P, Q fiind constante arbitrare, ce se determină din condițiile la limită (6.2).

Din relațiile (2.4), (2.13), (2.16) și $(4.9)_1$ urmează că acele componente t_{ij} și μ_{ijk} ale tensorului tensiune și respectiv hipertensiune, ce nu sînt identic nule și intervin în condițiile la limită, se exprimă astfel prin funcția $u = u(x)$

$$t_{11} = (\lambda^* + 2\mu^*)(u' - l^2u'''), \quad \mu_{111} = (\lambda^* + 2\mu^*)l^2u''. \tag{6.8}$$

La stabilirea relației (6.8) am ținut seama de faptul că frontierele $x = \pm L$ ale corpului sînt suprafețele plane, deci componentele spațiale b_{ij} ale tensorului celei de a doua forme fundamentale sînt identic nule.

Cu (6.7), (6.8) și (6.2), soluția problemei la limită capătă următoarea formă:

$$(\lambda^* + 2\mu^*)u = \frac{H + \overline{H}}{2}\frac{\operatorname{ch}(x/l)}{\operatorname{ch}(L/l)} + \frac{H - \overline{H}}{2}\frac{\operatorname{sh}(x/l)}{\operatorname{sh}(L/l)} + Tx. \tag{6.9}$$

unde am luat $Q = 0$, anulînd astfel deplasarea rigidă arbitrară a corpului.

Soluția (6.9) este unică și are sens oricare ar fi $L > 0$.

În acest sens modelul lui Toupin-Mindlin, cu condiția pozitiv definirii a lui W, impusă din afară, *nu* este capabil să își semnalizeze limitele sale de aplicabilitate; cel puțin în cadrul exemplului analizat.

b) *Materialul compozit de tip Beran-McCoy*; în acest caz din relațiile (5.6) și (5.8) urmează că parametrul a poate fi atît pozitiv, cît și negativ. În situația în care $a < 0$ rămîn valabile rezultatele și concluziile obținute în cazul precedent. Totuși, dacă admitem, cum este destul de rațional, că

$$\lambda_1 < \lambda_2, \ \mu_1 < \mu_2 \text{ sau } \lambda_1 > \lambda_2, \ \mu_1 > \mu_2, \tag{6.10}$$

atunci sîntem conduși la concluzia conform căreia

$$a > 0;$$

vom nota

$$a = l^2,$$

l fiind o constantă reală, pozitivă, avînd evident *dimensiunea de lungime* și caracterizînd *o lungime internă* specifică materialului compozit; după cum atestă relația (5.6), *această lungime este tocmai raza de corelație d a compozitului* considerat, în cazul în care materialul este format din două componente.

Din (6.11) urmează că soluția generală a ecuației (6.4) are forma

$$u = M \cos(x/l) + N \sin(x/l) + Px + Q, \tag{6.12}$$

M, N, P, Q fiind constante arbitrare, ce se determină (dacă este posibil!) din condițiile la limită (6.2).

Din relațiile (2.4), (2.13), (2.16) și (4.9) urmează că t_{11} și μ_{111}, componentele relevante ale tensorului tensiune, respectiv hipertensiune, au următoarele expresii:

$$t_{11} = (\lambda^* + 2\mu^*)(u' + l^2 u'''), \quad \mu_{111} = -(\lambda^* + 2\mu^*) l^2 u''. \tag{6.13}$$

Cu $(6.13)_2$ și (6.12), condițiile la limită $(6.2)_4$ și $(6.2)_{10}$ capătă următoarea formă:

$$M \cos(L/l) + N \sin(L/l) = (\lambda^* + 2\mu^*)^{-1} H,$$

$$M \cos(L/l) - N \sin(L/l) = (\lambda^* + 2\mu^*)^{-1} \overline{H}. \tag{6.14}$$

Din (6.14) decurge nemijlocit că natura soluției depinde de relația ce există între mărimile l și L:

*Cazul b.*1: Dacă

$$L/l \neq k\pi/2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.13}$$

soluția este unică și are forma

$$(\lambda^* + 2\mu^*) u = \frac{H + \overline{H}}{2} \frac{\cos(x/l)}{\cos(L/l)} + \frac{H - \overline{H}}{2} \frac{\sin(x/l)}{\sin(L/l)} + Tx. \tag{6.14}$$

*Cazul b.*2: Dacă

$$L/l = \pi/2 + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{6.14}$$

problema are soluție numai dacă

$$\overline{H} = -H; \tag{6.15}$$

în această situaţie există o infinitate de soluţii, avînd forma

$$(\lambda^* + 2\mu^*)\, u = M \cos(x/l) + (-1)^k H \sin(x/l) + Tx, \tag{6.16}$$

M fiind o constantă reală arbitrară.

Cazul b.3: Dacă

$$L/l = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.17}$$

problema are soluţie numai dacă

$$\overline{H} = H; \tag{6.18}$$

în această situaţie există o infinitate de soluţii, avînd forma

$$(\lambda^* + 2\mu^*)\, u = (-1)^k H \cos(x/l) + N \sin(x/l) + Tx, \tag{6.19}$$

N fiind o constantă reală arbitrară.

Observăm că semnificaţia mecanică a restricţiilor (6.13), (6.14) şi (6.15) sau (6.17) şi (6.18) *nu* este clară, deoarece nici una din ipotezele ce stau la baza modelului de tip Beran-McCoy, analizat în această lucrare, *nu* exclude posibilitatea realizării fie a relaţiei (6.14), fie a relaţiei (6.17), pentru valori suficient de mari ale lui k, deoarece tot ce se cere în cadrul modelului, în legătură cu relaţia ce trebuie să existe între lungimile L şi l este îndeplinirea inegalităţii

$$l << L. \tag{6.20}$$

În sensul rezultatelor mai sus discutate, modelul Beran-McCoy „pune întrebări" în legătură cu domeniul său posibil de aplicabilitate. Răspunsul la aceste întrebări, docamdată însă, nu este cunoscut.

Exemplul ce va fi analizat în paragraful următor arată că există şi situaţii în care o problemă corect formulată are soluţie unică în cazul modelului Beran-McCoy şi în situaţia în care parametrii a şi b au valori pozitive.

7. REPREZENTAREA DE TIP GRODSKY-PAPKOVICI-NEUBER. SOLUŢIA FUNDAMENTALĂ A ECUAŢIEI DE TIP LAMÉ

Ne întoarcem din nou la ecuaţia de tip Lamé (4.8). La analiza reprezentărilor posibile ale cîmpului u prin potenţiale de deplasări trebuie să deosebim cazuri posibile, corespunzătoare semnelor constantelor a şi b. Cazul $a < 0$, $b < 0$ corespunde situaţiei specifice modelului de tip Toupin-Mindlin şi a fost cercetat de Mindlin în lucrarea [8]. Cazurile în care $b < 0$, nu pot apărea în cadrul modelului Beran-McCoy, destinat descrierii comportării unui material compozit.

În situația în care $b > 0$, situația specifică modelului Beran-McCoy, pot apărea două cazuri, după cum $a > 0$ sau $a < 0$. Deși, în principiu cel puțin, poate să apară și a doua alternativă, în cele ce urmează, vom analiza cazul în care

$$a > 0, \quad b > 0, \tag{7.1}$$

deoarece apariția acestei alternative este mai probabilă în cazul unui compozit real.

Înainte de a trece la studiul cazului precizat, menționăm că situația în care $a < 0$ și $b > 0$ poate fi tratată prin combinarea rezultatelor lui Mindlin (vezi [8], §14), cu cele ce vor fi prezentate mai jos, la studiul alternativei (7.1).

Introducînd notațiile

$$a = l_1^2, \quad b = l_2^2 \tag{7.2}$$

unde l_1 și l_2 sînt două constante reale, pozitive, avînd dimensiunea de lungime, putem scrie ecuațiile de tip Lamé (4.8) în forma următoare :

$$(\lambda^* + 2\mu^*)(1 + l_1^2\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu^*(1 + l_2^2\Delta) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{7.3}$$

Fie $P(x_1, x_2, x_3)$ un punct oarecare din V și Q (ξ_1, ξ_2, ξ_3) un alt punct din același domeniu și să introducem potențialul de volum

$$\mathbf{W}_P = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{r_1}\mathbf{u}_Q \, dv_Q, \tag{7.4}$$

unde

$$r_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \tag{7.5}$$

reprezintă pătratul distanței dintre punctul de observație P și punctul de sursă Q. Potențialul de volum (7.4) satisface ecuația lui Poisson (vezi de exp. [17], cap. IV, §5).

$$\Delta \mathbf{W} = \mathbf{u}. \tag{7.6}$$

Făcînd uz de o identitate de tip (4.7), putem scrie relația (7.6) în forma

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{W} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W}. \tag{7.7}$$

Introducînd funcția scalară ψ și funcția vectorială $\mathbf{H}$, definite prin relațiile

$$\psi = \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad \mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{W}, \tag{7.8}$$

din (7.7) obținem următoarea reprezentare de tip Helmholtz

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \mathbf{H}, \tag{7.9}$$

în care, conform lui $(7.8)_2$, cîmpul **H** este solenoidal; adică

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{7.10}$$

Din (7.9), cu (7.10) și prin utilizarea unei identități de tip (4.7) obținem

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta\psi, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\Delta\mathbf{H}. \tag{7.11}$$

În consecință, cîmpul vectorial **u** va satisface ecuația de tip Lamé (7.3) dacă și numai dacă funcțiile ψ și **H** satisfac ecuația

$$\mu^*\Delta[\bar{k}(1 + l_1^2\Delta)\operatorname{grad}\psi + (1 + l_2^2\Delta)\operatorname{rot}\mathbf{H}] + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{7.12}$$

unde

$$\bar{k} = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\mu^*}. \tag{7.13}$$

Pentru deducerea reprezentării de tip Grodski-Papkovici-Neuber, avem nevoie de soluția fundamentală a ecuației lui Helmholtz caracterizată de o constantă reală și strict pozitivă; deci de soluția ecuației

$$(\Delta + l^2) f = \delta, \tag{7.14}$$

unde δ este distribuția lui Dirac concentrată în punctul $x = 0$; această ecuație are în complex două soluții fundamentale liniar independente (vezi [18], cap. II, §6.5):

$$f_1 = -\frac{e^{ilr}}{4\pi r}, \quad f_2 = \bar{f}_1 = -\frac{e^{-ilr}}{4\pi r}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{7.15}$$

O analiză atentă arată (vezi pentru analiza asemănătoare a problemei ce corespunde ecuației lui Laplace monografia lui Tihonov și Samarski [17], cap. IV, §5) că *numai* partea reală a lui f_1 sau f_2, adică funcția

$$f = -\frac{\cos lr}{4\pi r}, \tag{7.15}$$

satisface ecuația (7.14), deci constituie soluția fundamentală *reală* a ecuației lui Helmholtz caracterizată de o constantă reală și strict pozitivă. Avem deci (desigur în sensul distribuțiilor)

$$(\Delta + l^2)\left(-\frac{\cos lr}{4\pi r}\right) = \delta. \tag{7.16}$$

Schimbînd în (7.16) pe l în $1/l$, conchidem că are loc relația

$$(1 + l^2\Delta)\left(-\frac{\cos(r/l)}{4\pi l^2 r}\right) = \delta. \tag{7.17}$$

Din ultima ecuație urmează că potențialul helmoholtzian de volum

$$g_P = -\frac{1}{4\pi l^2}\int_V \frac{\cos(r_1/l)}{r_1}\varphi_Q\,dv_Q \tag{7.18}$$

satisface ecuația de tip Helmholtz

$$(1 + l^2\Delta)\,g = \varphi, \tag{7.19}$$

oricare ar fi funcția continuă φ definită în V.

În raționamentele ce urmează vom mai avea nevoie de o relație ce se bazează pe ecuația (7.17) și pe cea analoagă, corespunzătoare ecuației lui Laplace

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta. \tag{7.20}$$

Prin combinarea relațiilor (7.16) și (7.20) conchidem că are loc și relația:

$$(1 + l^2\Delta)\,\Delta\left(\frac{(1 - \cos(r/l)}{4\pi r}\right) = -\delta. \tag{7.21}$$

În consecință, potențialul de volum

$$h_P = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{(1 - \cos(r_1/l)}{r_1}\varphi_Q\,dv_Q \tag{7.22}$$

satisface ecuația

$$(1 + l^2\Delta)\,\Delta h = -\varphi, \tag{7.23}$$

oricare ar fi funcția continuă φ dată în V.

Acum ne întoarcem la relația (7.12) și introducem cîmpul vectorial $\mathbf{B}'$, definit prin relația

$$-4\pi l_2^2\mathbf{B}'_P = \int_V \frac{\cos(r_1/l_2)}{r_1}\,[\bar{k}(1 + l_1^2\Delta)\,\mathrm{grad}\,\psi + (1 + l_2^2\Delta)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]_Q\,dv_Q. \tag{7.24}$$

Din (7.18) și (7.19) rezultă că $\mathbf{B}'$ satisface ecuația

$$(1 + l_2^2\Delta)\,\mathbf{B}' = \bar{k}(1 + l_1^2\Delta)\,\mathrm{grad}\,\psi + (1 + l_2^2\Delta)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}. \tag{7.25}$$

Astfel, din (7.12) rezultă că trebuie să aibă loc relația

$$\mu^*(1 + l_2^2\Delta)\,\Delta\mathbf{B}' = -\mathbf{f}. \tag{7.26}$$

Totodată, pe baza lui (7.25) conchidem că are loc și relația

$$(1 + l_2^2\Delta)\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}' = \bar{k}(1 + l_1^2\Delta)\,\Delta\psi. \tag{7.27}$$

Definim funcția ψ^* prin relația

$$2k\psi^* = \mathbf{x} \cdot (1 + l_2^2\Delta)\,\mathbf{B}' \tag{7.28}$$

și deducem, folosind relația (4), că

$$2\bar{k}\mu^*(1 + l_1^2\Delta)\,\Delta\psi^* = -4l_1^2 \operatorname{div}\mathbf{f} - \mathbf{x} \cdot (1 + l_1^2\Delta)\,\mathbf{f} + 2\mu^*(1 + l_2^2\Delta) \operatorname{div}\mathbf{B}'. \tag{7.29}$$

Fie

$$B_0 = 2k(\psi - \psi^*); \tag{7.30}$$

cu (7.29) și (7.27) obținem

$$\mu^*(1 + l_1^2\Delta)\,\Delta B_0 = \mathbf{x} \cdot (1 + l_1^2\Delta)\,\mathbf{f} + 4l_1^2 \operatorname{div}\mathbf{f}. \tag{7.31}$$

Folosind (7.30) și (7.28) găsim

$$2k\psi = \mathbf{x} \cdot (1 + l_2^2\Delta)\,\mathbf{B}' + B_0. \tag{7.32}$$

Fie

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}' + l_2^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}' - \bar{k}(1 + l_1^2\Delta) \operatorname{grad}\psi. \tag{7.33}$$

Conform relației (7.27), acest cîmp este solenoidal; adică

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \tag{7.24}$$

În consecință, există un cîmp vectorial $\mathbf{H}^*$, așa încît

$$\mathbf{D} = \operatorname{rot}\mathbf{H}^*. \tag{7.35}$$

Pe baza relației (7.33) conchidem că

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^* = \mathbf{B}' + l_2^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}' - \bar{k}(1 + l_1^2\Delta) \operatorname{grad}\psi. \tag{7.36}$$

Folosind relațiile (7.25) și (7.27) după un calcul elementar urmează că $\mathbf{H}$ și $\mathbf{H}^*$ satisfac relația

$$(1 + l_2^2\Delta) \operatorname{rot}\mathbf{H}^* = (1 + l_2^2\Delta) \operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{7.37}$$

Fie

$$\mathbf{B}'' = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \operatorname{rot}\mathbf{H}^*; \tag{7.38}$$

din relația de definiție și din (7.35) urmează că $\mathbf{B}''$ satisface ecuațiile

$$(1 + l_2^2\Delta)\,\mathbf{B}'' = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}'' = 0. \tag{7.39}$$

Din (7.36), (7.38) și $(7.39)_2$ urmează că

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{B}'' + \mathbf{B}' + l_2^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{B}'' + \mathbf{B}') - \bar{k}(1 + l_1^2\Delta) \operatorname{grad}\psi. \tag{7.40}$$

În consecință, prin utilizarea relației (7.32) obținem

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{B}'' + \mathbf{B}' + l_2^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{B}'' + \mathbf{B}') - \frac{1}{2}(1 + l_1^2\Delta) \operatorname{grad}[\mathbf{x} \cdot (1 + l_2^2\Delta)\,\mathbf{B}' + B_0]. \tag{7.41}$$

Înlocuind (7.41) și (7.32) în (7.9) și folosind (7.13) obținem

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}'' + \mathbf{B}' + l_2^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} (\mathbf{B}'' + \mathbf{B}') -$$

$$- \frac{1}{2} (k_1 + l_1^2 \Delta) \operatorname{grad} [\mathbf{x} \cdot (1 + l_2^2 \Delta) \mathbf{B}' + B_0], \tag{7.42}$$

unde

$$k_1 = \frac{\lambda^* + \mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*}. \tag{7.43}$$

Definim acum cîmpul $\mathbf{B}$ prin relația

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}'' + \mathbf{B}' \tag{7.44}$$

și folosim relația $(7.39)_1$; astfel din (7.42) obținem următoarea *reprezentare de tip Grodski-Papkovici-Neuber*:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + l_2^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (k_1 + l_1^2 \Delta) \operatorname{grad} [\mathbf{x} \cdot (1 + l_2^2 \Delta) \mathbf{B} + B_0]. \tag{7.45}$$

Pe baza relațiilor (7.26), $(7.39)_1$ și (7.44) conchidem că potențialul vectorial $\mathbf{B}$ trebuie să satisfacă ecuația:

$$\mu^* (1 + l_2^2 \Delta) \Delta \mathbf{B} = - \mathbf{f}. \tag{7.46}$$

Evident, potențialul scalar B_0 trebuie să satisfacă ecuația (7.31).

Pe baza relației (7.22) deducem că soluțiile particulare ale ecuațiilor (7.46) și (7.31), satisfăcute de $\mathbf{B}$, respectiv B_0, sînt date de următoarele relații:

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{4\pi\mu^*} \int_V \frac{1 - \cos (r_1/l_2)}{r_1} \mathbf{f}_Q \, dv_Q, \tag{7.47}$$

$$B_{0P} = - \frac{1}{4\pi\mu^*} \int_V \frac{1 - \cos (r_1/l_1)}{r_1} [\xi \cdot (1 + l_1^2 \Delta_Q) \mathbf{f}_Q + 4 l_1^2 \operatorname{div}_Q \mathbf{f}_Q] \, dv_Q, \tag{7.48}$$

unde vectorul ξ are drept componente coordonatele ξ_i ale punctului de sursă Q.

Vom presupune acum că materialul compozit ocupă întregul spațiu și este supus acțiunii unei forțe concentrate de intensitate dată $\mathbf{P}$, ce acționează în originea sistemului de coordonate; avem deci

$$\mathbf{f} = \mathbf{P} \delta. \tag{7.49}$$

În acest caz, din (7.47) și (7.48) obținem următoarele expresii pentru potențialii de deplasare $\mathbf{B}$ și B_0:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\mu^*} \frac{1 - \cos (r/l_2)}{r} \mathbf{P}, \quad B_0 = - \frac{l_1^2}{\pi\mu^*} \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \frac{1 - \cos (r/l_1)}{r}. \tag{7.50}$$

Relaţiile (7.50), în combinaţie cu expresia (7.45) a cîmpului u furnizează *soluţia de tip Kelvin-Somigliana*, deci soluţia fundamentală a ecuaţiei de tip Lamé (7.3) în cazul modelului Beran-McCoy al unui material compozit, ce satisface inegalităţile (7.1).

Compararea rezultatelor obţinute cu cele similare date de Mindlin în cazul materialelor de ordinul unu (vezi [10], §14) arată că în timp ce potenţialii de deplasare în cele două cazuri au comportări asemănătoare cînd $r \to 0$, comportarea lor la mari distanţe, deci cînd $r \to \infty$, este diferită; în timp ce la materialele de ordinul unu cîmpurile nu prezintă oscilaţii, la materialele compozite este prezent un astfel de efect oscilant. Faptul semnalat arată încă odată că modelul Beran-McCoy *nu* este o realizare totală a modelului Toupin-Mindlin.

Primită la redacţie la 10 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. F. DINCĂ, C. TEODOSIU, *Nonlinear and random vibrations*, Editura Academiei R.S.R., Academic Press Inc., Bucureşti—New York—London, 1973.
2. M. J. BERAN, *Statistical Continuum Theories*, Interscience Publishers, New York—London—Sydney, 1968.
3. В. А. ЛОМАКИН, *Статистические задачи механики твёрдых деформируемых тел*, Изд. Наука, Москва, 1970.
4. E. KRÖNER, *Statistical continuum mechanics*, Springer—Verlag, Wien—New York, 1971.
5. Т. Д. ШЕРМЕРГОР, *Теория упругости микронеоднородных сред*, Изд. Наука, Москва, 1977.
6. M. J. BERAN, J. J. McCOY, *Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids*, Int. Solids Structures, **6**, 1035—1054 (1970).
7. M. J. BERAN, J. J. McCOY, *The use of strain gradient theory for analysis of random media*, Int. J. Solids Structures, **6**, 1267—1275 (1970).
8. R. A. TOUPIN, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rational Mech. Anal., **11**, 385—414.
9. R. A. TOUPIN, D. G. GAZIS, *Surface effects and initial stress in continuum and lattice models of elastic crystals*, in *Lattice Dynamics* Int. Conf. Coppenhagen 1963, Ed. R.F. Wallis, Pergamon Press, Oxford-London, 1965, p. 597—605.
10. R. D. MINDLIN, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **16**, 51—78 (1964).
11. R. D. MINDLIN, N. N. ESHEL *On the first-gradient theories in linear elasticity*, Int. J. Solids Structures, **4**, 109—124 (1968).
12. R. D. MINDLIN, *Theories of elastic continua and cuystal lattice teories*, in *Mechanics of Generalized Continua*, Proc. IUTAM-Symp. 1967, Ed. E. Kröner, Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
13. A. J. McCONNEL *Applications of tensor analysis* Dover, Publ. Inc., New York, 1967.
14. R. D. MINDLIN, M. F. TIERSTEN, *Couple stresses in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **11**, 415—448.
15. Z. HASHIN *Theory of mechanical behavior of heterogeneous media*, Appl. Mech. Rev. **17**, 1—9 (1964).
16. Z. HASHIN, *Analysis of composite materials, A survey*, J. Appl. Mech., **50**, 481—505 (1983).
17. А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ, *Уравнения математической физики*, ГИТТЛ, Москва, 1953.
18. В. С. ВЛАДИМИРОВ, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1976.

METODE ANALITICO-NUMERICE ÎN STUDIUL MIȘCĂRII FLUIDELOR GRELE CU SUPRAFAȚA LIBERĂ

de I. SETEANU și M. ERHAN
Institutul Politehnic, București

Se prezintă două metode analitico-numerice utilizate în studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă în regim potențial. Dificultățile legate de caracterul neliniar al problemei și cunoașterea parțială a domeniului de curgere sînt depășite prin folosirea unor procedee de aproximații succesive prin generarea unui șir de probleme interdependente rezolvate pe cale numerică. Se prezintă rezultatele studiului, aplicate la curgerea fluidului greu dintr-un rezervor simetric și mișcarea cu suprafață liberă peste obstacolele de formă arbitrară.

1. INTRODUCERE

În lucrare sînt examinate unele metode analitico-numerice folosite în studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă. Un număr mare de cercetări au fost întreprinse în acest domeniu, folosind metodele funcțiilor de o variabilă complexă [1], [2], [3], fie metode directe ale teoriei potențialului [4], fie metoda parametrului mic [5]. Restricțiile impuse funcțiilor soluție căutate și condițiilor la limite (analicitatea în domeniu, condiții Holder pentru panta vitezei pe suprafețele solide etc.) au impus, de exemplu, limitarea studiului jetului la vecinătatea deversorului în lucrările [2] și [3].

În prima parte a lucrării se propune o metodă de aproximații succesive impusă de caracterul neliniar al problemei curgerii plane a fluidului greu cu suprafață liberă, admițîndu-se singularități de prima speță pentru componentele vitezei pe suprafețele solide și o singularitate de speță a doua în vecinătatea punctului de la infinit [6]. Se poate analiza, în consecință, comportarea jetului de fluid greu care curge dintr-un rezervor, alimentat continuu la suprafața liberă.

În partea a doua se prezintă o metodă de integrare numerică în diferențe finite, într-o rețea neortogonală cu pas variabil, aplicată la studiul mișcării potențiale plane a fluidelor grele cu suprafață liberă peste obstacole de formă arbitrară, atît în regim lent cît și rapid. Deși expresiile astfel obținute sînt mai complicate decît în cazul utilizării rețelelor ortogonale fixe, avantajul metodei propuse constă în absența punctelor speciale, ceea ce diminuează mult volumul de calcul și mărește precizia rezultatelor.

Se prezintă rezultatele numerice pentru exemplele concrete analizate.

2. CURGEREA FLUIDULUI GREU CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ DINTR-UN REZERVOR

Se admite că viteza de curgere în punctul A, notată V_0, ca și debitul Q de curgere sînt cunoscute (fig. 1). Pe suprafețele jetului în cădere liberă acționează presiunea atmosferică p_0. În coordonatele adimensio-

nale, cu parametri $L = Q/V_0$, $Fr = V_0^2/(gL)$ este suficientă cunoașterea numărului caracteristic Froude. Cu notațiile:

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{z}{L}, \quad \frac{\Pi}{Q} = P \tag{1}$$

unde Π este potențialul complex al mișcării, viteza complexă conjugată adimensională se scrie:

$$w = \frac{1}{V_0}\frac{d\pi}{dz} = \frac{1}{\pi}\frac{dP}{d\xi} \tag{2}$$

Pe suprafața liberă, relația lui Bernoulli devine:

$$|w| = \sqrt{1 + \frac{2}{Fr}\eta}, \tag{3}$$

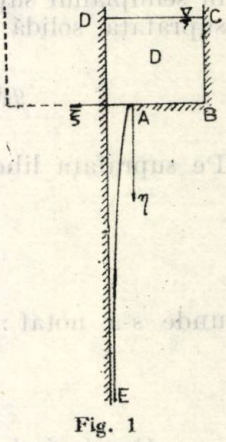


Fig. 1

iar la mare distanță de rezervor are loc reprezentarea asimptotică:

$$w \sim \sqrt{\frac{2\zeta}{Fr}}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

care se mai scrie sub forma:

$$w^3 \sim \frac{3e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\pi Fr} P. \tag{4}$$

Se urmărește determinarea potențialului complex $P(\zeta) = \Phi + i\Psi$ pentru care

$$\Psi|_{DE} = 0, \quad \Psi|_{CBAE} = \pi, \quad \Phi|_{DC} = 0, \tag{5}$$

satisfăcînd și relațiile (3) și (4).

Pentru comoditatea calculului se transformă semibanda din planul P în semiplanul superior prin transformarea:

$$Z = \operatorname{ch} P. \tag{6}$$

Întrucît forma suprafeței libere este inițial necunoscută, se va folosi un procedeu de aproximații succesive, alegînd prima aproximație astfel încît să fie satisfăcute condițiile la limite pe suprafețele solide și condițiile asimptotice la mare distanță (4).

Viteza complexă conjugată $w_1(z)$ în prima aproximație se scrie:

$$w_1(Z) = g_1(Z)\, g_2(Z) \tag{7}$$

cu

$$|g_1(Z)| = 1 \text{ pe } EA,$$

$$\arg g_1(Z) = \begin{cases} \pi/2 \text{ pe } AB, \\ 0 \text{ pe } AE. \end{cases} \tag{8}$$

Pentru funcția lui Levi-Civitta, $\omega_1(Z) = \mathrm{i} \ln g_1(Z)$, se obține astfel o problemă la limită Volterra-Signorini cu soluția [7]:

$$\omega_1(Z) = \frac{\sqrt{Z+\alpha}}{2\mathrm{i}} \int_{\alpha}^{-\beta} \frac{1}{\sqrt{X+\alpha}} \frac{\mathrm{d}X}{Z-X}, \tag{9}$$

unde $(-\alpha)$ și $(-\beta)$ sînt coordonatele punctelor A și B în planul Z.

Funcția $g_2(Z)$ trebuie să tindă asimptotic la mare distanță conform relației (4). O funcție simplă avînd această proprietate, fără singularități în semiplanul superior al planului Z și satisfăcînd condițiile la limită pe suprafața solidă se scrie:

$$g_2(Z) = \left(1 + \frac{3}{\pi Fr} \operatorname{arcch} \frac{Z+2\alpha}{\alpha}\right)^{1/3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}. \tag{10}$$

Pe suprafața liberă se obține:

$$Z_1(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Phi} \frac{\mathrm{i} \cdot \zeta^{-\mathrm{i}U_1}}{M_1} \mathrm{d}\Phi_1, \tag{11}$$

unde s-a notat:

$$w_1 = \frac{1}{\mathrm{i}} M_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}U_1}. \tag{12}$$

Construind în prima aproximație forma suprafeței libere, se poate determina mărimea vitezei în conformitate cu relația lui Bernoulli:

$$M_2 = |w_2| = \sqrt{1 + \frac{2}{Fr}\eta}.$$

Aceste valori diferă, în general, de valorile corespunzătoare M_1 ale vitezei în prima aproximație. Se caută în continuare a doua aproximație a vitezei de forma:

$$w_2(Z) = w_1(Z) h_1(Z) \tag{13}$$

pentru care funcția lui Levi-Civitta este:

$$\Omega_1 = \mathrm{i} \ln h_1(Z) = \Lambda_1 + \mathrm{i} T_1 \tag{14}$$

și satisface condiția:

$$\Lambda_1 = 0 \text{ pe } AE, \quad T_1 = \ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \text{pe } EA. \tag{15}$$

Cu formula lui Signorini se scrie soluția:

$$\Omega_1(Z) = \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z+\alpha}}{\pi} \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{\ln\left(M_2(X)/M_1(X)\right)}{\sqrt{-X-\alpha}} \frac{\mathrm{d}X}{Z-X}. \tag{16}$$

Notînd

$$w_2 = \frac{1}{i} M_2 e^{-iU_2}, \tag{17}$$

rezultă forma suprafeței libere în cea de a doua aproximație din relațiile analoge cu (11).

Procedeul de aproximare prezentat dă șirul de funcții $h_1(Z)$, $h_2(Z)$, din care rezultă aproximările $w_1(Z)$, $w_2(Z)$,... ale vitezei complexe date de relațiile :

$$w_n(Z) = g_1(Z)\, g_2(Z)\, h_{n-1}(Z). \tag{18}$$

Șirul de viteze complexe conjugate admite cel puțin o limită dacă această proprietate o are șirul $h_n(Z) = (n = 1, 2, \ldots)$. Dar funcțiile $h_n(Z)$ au valori mărginite pe conturul domeniului ; conform teoremei modulului vor fi mărginite și în interiorul domeniului. În virtutea unei teoreme a lui Montel [8] se poate afirma că șirul admite o limită $h(Z)$ analitică în domeniu, pentru care

$$w(Z) = g_1(Z)\, g_2(Z)\, h(Z) \tag{19}$$

reprezintă soluția căutată.

În acest fel s-au separat singularitățile la distanță finită prin funcția $g_1(Z)$ și singularitatea în punctul de la infinit prin $g_2(Z)$; procedeul de aproximații succesive dă șirul de funcții $h_n(Z)$ analitice în domeniul închis și convergent către soluția $h(Z)$.

S-au efectuat calculele pentru un exemplu numeric corespunzător datelor :

$$Fr = 0{,}477, \quad Fr = 27{,}308,$$

$$Fr = 1{,}5431.$$

obținîndu-se primele patru aproximații (fig. 2), pentru care dimensiunile reale ale rezervorului sînt :

$$L_{AB} = 5{,}882, \quad L_{BC} = 6{,}844,$$

$$L_{CD} = 7{,}057.$$

Rezultatele numerice sînt concentrate în tabela următoare în care s-au marcat pe coloane etapele de aproximare.

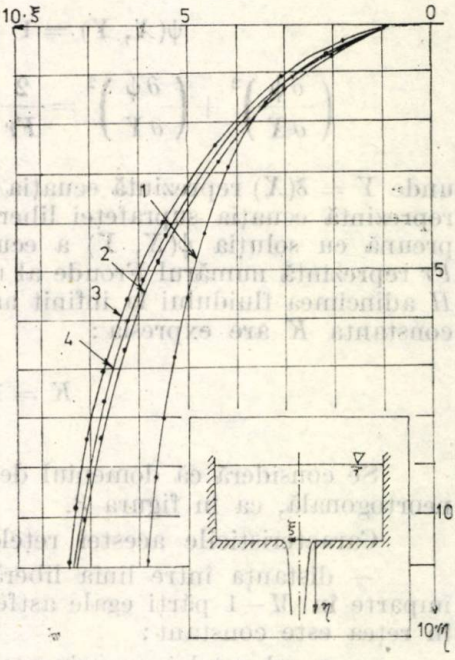


Fig. 2

Aproximația I		II		III		IV	
10	10	10	10	10	10	10	10
0,83	0,15	0,84	0,15	0,81	0,15	0,81	0,15
1,55	0,32	1,55	0,32	1,83	0,35	1,55	0,32
2,45	0,72	1,85	0,52	3,05	1,16	3,02	1,22
3,35	1,62	3,13	1,31	4,43	2,45	4,36	2,62
4,15	2,93	4,42	2,83	5,58	4,07	5,45	4,31
4,65	4,25	5,61	4,82	6,25	5,55	5,94	5,22
5,02	5,55	6,32	6,64	6,76	7,05	6,23	6,04
5,52	8,05	7,13	10,05	7,31	9,84	7,05	9,16
5,65	9,25	7,43	11,62	7,45	11,05	7,33	10,58

3. MIȘCAREA POTENȚIALĂ PLANĂ CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ A FLUIDELOR GRELE PESTE OBSTACOLE DE FORMĂ ARBITRARĂ

Se consideră mișcarea plană potențială a unui fluid greu cu suprafață liberă peste un obstacol de o formă arbitrară. Dacă se introduce funcția de curent ψ, problema la limită care trebuie rezolvată se poate formula astfel [9] (în coordonate adimensionale):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2}=0 \tag{20}$$

$$\psi(X, Y)=0 \text{ pentru } Y=\delta(X) \tag{21}$$

$$\psi(X, Y)=1 \text{ pentru } Y=\Pi(X) \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial Y}\right)^2=\frac{2}{Fr}(K-Y) \text{ pentru } Y=\eta(X), \tag{23}$$

unde $Y=\delta(X)$ reprezintă ecuația obstacolului (cunoscută), iar $Y=\Pi(x)$ reprezintă ecuația suprafeței libere, funcție ce trebuie determinată împreună cu soluția $\psi(X, Y)$ a ecuației (20). În condiția la limită (23), Fr reprezintă numărul Froude al mișcării ($Fr=q^2/(gH^3)$, q fiind debitul, H adîncimea fluidului la infinit amonte, g — accelerația gravitației, iar constanta K are expresia:

$$K=1+\frac{Fr}{2}. \tag{24}$$

Se consideră că domeniul de mișcare este discretizat printr-o rețea neortogonală, ca în figura 3.

Caracteristicile acestei rețele sînt:

— distanța între linia liberă (L) și suprafața obstacolului (S) se împarte în $M-1$ părți egale astfel că numărul nodurilor pe o verticală în rețea este constant;

— pasul rețelei pe orizontală este constant (h_1).

Dacă se admite funcția de curent analitică în domeniul de mișcare, atunci dezvoltarea sa în serie Taylor în jurul punctului O este :

$$\psi(X, Y) = \psi(X_0, Y_0) + (X - X_0)\,\psi'_x(X_0, Y_0) + (Y - Y_0)\,\psi'_y(X_0, Y_0) + \\ + \frac{1}{2}(X - X_0)^2\,\psi''_{xx}(X_0, Y_0) + \frac{1}{2}(Y - Y_0)^2\,\psi''_{yy}(X_0, Y_0) + \\ + (X - X_0)(Y - Y_0)\,\psi''_{xy}. \tag{25}$$

Introducînd în această dezvoltare valorile în nodurile vecine, ecuația (20) transcrisă în diferențe finite are forma :

$$\psi_0 = \frac{\psi_3 + \psi_4}{Bh_0^2} + \frac{Y_2 - Y_5}{Bh_1^2 h_2}\,\psi_1 - \frac{Y_5 - Y_0}{Bh_0 h_1^2}(\psi_4 - \psi_3) + \\ + \frac{Y_5 - Y_1}{Bh_1^2 h_2}\,\psi_2 + \frac{\psi_5}{Bh_1^2} - \frac{A}{2Bh_0^2 h_1^2}(\psi_3 + \psi_4), \tag{26}$$

unde s-a notat :

$$A = Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_5 - 4Y_0) - Y_1 Y_2 + 2Y_0^2;$$

$$B = 2\left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{1}{h_1^2}\right) - \frac{A}{h_0^2 h_1^2}.$$

Condițiile la limită (21) și (22) se scriu :

$$\psi(1, J) = 0 \quad (J = 1, N), \tag{27}$$

$$\psi(N, J) = 1 \quad (J = I, N). \tag{28}$$

În cadrul ipotezelor admise, mișcarea la infinit este uniformă, astfel că la mare distanță funcția de curent în nodurile rețelei este dată de expresiile :

$$\psi(I, 1) = (I - 1)\frac{Y(M, 1)}{M}, \\ (I = 1, M). \tag{29}$$
$$\psi(I, N) = (I - 1)\frac{Y(M, N)}{M},$$

Pentru calculul vitezei pe suprafața liberă se consideră punctele A, B, C, D și E ca în figura 3. Componentele vitezei în nodul A se scriu :

$$\psi'_x = \frac{1}{2h_1}\left(\frac{Y_B - Y_A}{h_2}(\psi_B - \psi_C) + \frac{Y_A - Y_E}{h_3}(\psi_E - \psi_D)\right) = -V(M, J), \\ (J = 1, N) \tag{30}$$

$$\psi'_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\psi_B - \psi_C}{h_2} + \frac{\psi_E - \psi_D}{h_3}\right) = U(M, J).$$

Din relaţia lui Bernoulli (23) se obţin coordonatele suprafeţei libere :

$$Y_{SL}(J) = K - \frac{Fr}{2}(U^2(M, J) + V^2(M, J)). \tag{31}$$

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei (26) cu condiţiile la limită (27), (28) şi (31) se foloseşte metoda rezidualului (Allen). În figura 4 se prezintă rezultatele obţinute la mişcarea cu suprafaţă liberă peste un deversor de secţiune triunghiulară ($Fr = 0{,}037$).

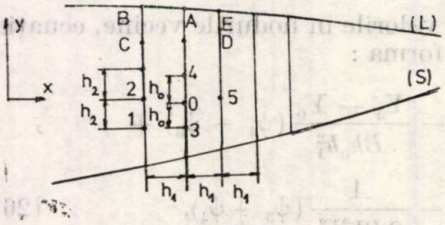


Fig. 3

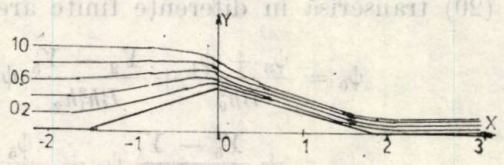


Fig. 4

Metodele prezentate reprezintă două modalităţi de abordare a problemei la limită de curgere a fluidelor grele cu suprafaţă liberă în regim potenţial. Datorită neliniarităţii introduse de relaţia lui Bernoulli se impune rezolvarea unui şir de probleme liniare succesive interdependente. Domeniul de curgere este aproape necunoscut, determinarea sa constituind unul dintre aspectele problemei. Folosirea unei reţele numerice cu pas variabil constituie punctul de legătură între aplicarea metodei reţelelor de forma clasică şi metoda elementului finit.

Primită la redacţie la 26 iulie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. H. PONCIN, *Recherches sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical*, Paris, 1932.
2. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Studiul mişcării lamelor deversante infinite* într-un plan vertical, St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960).
3. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, Mişcarea fluidelor grele deversante într-un plan vertical, St. cerc. mec. apl., **XI**, *3* (1960).
4. A. M. TER. KRIKOROV, Nelineinaia zadacia teorii podvodnogo krîla, DAN SSSR, 1958, 119, 6.
5. K. WORONETZ, L'influence des forces exterieures sur l'écoulement par les orifices, Publ. Dep. Inst. Math., Belgrade, 1953, V.
6. D. DUMITRESCU, I. SETEANU, L'étude de l'écoulement d'un fluide pesant à surface libre d'un reservoir symétrique. Rev. Roum. Sci. Tech.-Mec. Appl. tome **17**, No *2*. 1972.
7. C. IACOB, Introduction mathématique dans la mécanique des fluides. Bucarest, 1959.
8. S. STOILOW, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Bucureşti, 1964.
9. M. ERHAN, *Contribuţii la hidrodinamica curenţilor cu suprafaţă liberă*, Teză de doctorat, Bucureşti, 1979.

INFLUENȚA FRECĂRII INTERMOLECULARE A PARTICULELOR FLUIDE ÎN MIȘCAREA UNUI FLUID VÎSCOS ÎNTR-UN MEDIU POROS. CAZUL LINIAR. II

de VASILE IONESCU și ION TUTUNEA
Universitatea din Craiova
ALEXANDRU TURTĂ
I.C.P.P.G. Cîmpina

În lucrarea [1] s-au formulat cîteva rezultate teoretice privind efectul frecării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea într-un mediu poros. În lucrarea de față se fac unele aplicații ale acestor rezultate teoretice pentru cazuri concrete întîlnite frecvent în exploatarea zăcămintelor de țiței. Rezultatele aplicațiilor sînt comentate și interpretate și este subliniată importanța lor practică.

I. CONSIDERAȚII GENERALE

Prezenta lucrare este o continuare a lucrării [1], unde s-au prezentat rezultatele teoretice obținute în studiul fenomenului de frecare intermoleculară a particulelor fluide în mișcarea în mediul poros. În lucrarea de față se ilustrează aceste rezultate pe cazuri concrete cu date curent întîlnite în practică și se urmărește influența diferiților parametri ce apar în ecuația temperaturii, asupra evoluției sale. Cele două lucrări formează de fapt una singură, împărțită în două din restricțiile editoriale.

Se vor face, în prezenta lucrare, referiri frecvente la rezultatele obținute în [1]; ele nu vor fi prezentate din nou, nici chiar succint, decît dacă acest lucru este absolut necesar.

1. *Observații privind ecuația temperaturii.* În [1] s-a stabilit că temperatura creată de căldura generată de frecarea intermoleculară a particulelor fluide în mișcare satisfac ecuația

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} = -\gamma, \tag{1}$$

în care coeficienții α, β, γ au expresiile

$$\alpha = \rho_a c_a m \frac{p_0 - p_L}{LK}; \quad \beta = \frac{1}{K} [\Phi \rho_a c_a + (1 - \Phi) \rho_m c_m],$$
$$\gamma = \sqrt[3]{\Phi^2} \frac{m}{K} \left(\frac{(p_0 - p_L}{L} \right)^2. \tag{2}$$

Condițiile la limită în care a fost rezolvată ecuația precedentă sînt

$$T(x, 0) = 0; \quad T(0, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \tag{3}$$

în cazul că nu se ține seama de pierderile de căldură la $x = L$ și

$$T(x, 0) = 0; \; T(0, t) = 0; \; -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \rho_a c_a \Phi m \frac{p_0 - p_L}{L} T|_{x=L} \tag{4}$$

. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 4, 1985, P. 363–375

în cazul în care se ține seama de ele. Pierderile sînt determinate de căldura transportată de curentul fluid ce părăsește mediul poros.

În ecuația (1) primul termen din membrul stîng este termenul de conducție, al doilea de convecție, al treilea de entalpie, iar membrul drept este termenul de generare a căldurii în unitatea de timp și de volum. Această observație indică influența parametrilor mișcării asupra temperaturii. Dacă termenul de generare a căldurii variază, va varia în același sens și temperatura în domeniul de mișcare, iar dacă variază termenul de convecție, va varia și viteza de transmitere a căldurii în domeniu. Termenii de conducție și de entalpie nu au influență remarcabilă asupra propagării căldurii.

Din expresiile (2) ale coeficienților α, β, γ ai ecuației (1) rezultă efectul variației tuturor parametrilor mișcării asupra cîmpului de temperatură. Gradientul de presiune $(p_0 - p_L)/L$ va influența liniar termenul de convecție și pătratic termenul de generare. Mărirea gradientului de presiune înseamnă o mărire a temperaturii în sistem și, în același timp, o mărire a vitezei de propagare a căldurii. Variația permeabilității înseamnă o variație liniară a termenului de generare și a celui de convecție. Variația porozității înseamnă variația termenului de generare și a entalpiei. Un loc particular între parametrii ce pot influența temperatura îl ocupă lungimea zăcămîntului L, care intră în expresia gradientului de presiune. Importanța sa va ieși în evidență în II, 2.

2. *Parametrii considerați în aplicații.* În majoritatea aplicațiilor considerate s-a presupus că fluidul de filtrare este apa, care se injectează la 0°C în tot timpul procesului. De aici rezultă: $\rho_a = 1000$ kg/m³, $c_a = 1$ kcal/kg °C, $\nu = 0{,}5055 \cdot 10^{-7}$ kg h/m². Atunci cînd au fost considerate alte fluide, uleiuri de diferite tipuri, vîscozitatea a fost considerată în grade Engler și transformată după formula [2]

$$10^6 \nu = {}^\circ E \cdot 7{,}6^{1-\frac{1}{{}^\circ E^3}} \tag{5}$$

în unități tehnice (m, kg, h). Ele vor fi indicate pentru fiecare caz în parte.

Pentru căldura specifică a fluidului, altul decît apa, s-a considerat o valoare constantă, $c_a = 0{,}5$ kcal/kg°C. Capacitatea calorică a mediului s-a presupus de asemenea invariabil egală cu $\rho_m c_m = 480{,}519$ kcal/m³ °C, în afară de alte două valori considerate pentru a vedea influența acestui factor asupra temperaturii. Valoarea considerată în mod constant corespunde unui nisip întîlnit curent în practica extracției petroliere.

Permeabilitatea mediului poros a fost considerată între 0,2 și 3 D, iar porozitatea între 0,2 și 0,4. Lungimii L, fiind o mărime aparte în rîndul parametrilor mișcării, i s-a atribuit o scară largă de variație: 10—150 m. Gradientului de presiune i s-au atribuit valorile 1, 2, 3, 4, at/m. Coeficientul de conductibilitate $K = 1{,}3394$ kcal/m h °C. Temperatura inițială a zăcămîntului, 0 °C.

Pentru aplicarea metodei diferențelor finite s-a considerat pasul după x, $h = 0{,}1$ m, iar pasul după timp $\tau = 0{,}5\ h$. Aceasta înseamnă că raportul $r = \tau/h^2 = 50$, valoare ce asigură stabilitatea schemei de calcul stabilită în [1].

II. REZULTATELE OBȚINUTE ÎN CAZUL CÎND NU SE PIERDE CĂLDURA LA CAPĂTUL DE IEȘIRE

Trebuie spus de la început că rezultatele numerice obținute din soluția exactă (cu aproximările analizate în [1]) și prin metoda diferențelor finite dau diferențe așa de mici încît nu pot fi prinse în diagramele de mai jos, la scara la care s-a lucrat. Dăm un exemplu. Pentru $\mu = 0{,}5055 \cdot 10^{-7}$ kg h/m², $k = 1$ D, $\nabla p = 4$ at/m, la $x = 100$ m, la cinci zile de la începerea procesului s-a obținut temperatura 5,07869°C cu metoda diferențelor finite și 5,08392 cu soluția exactă. Aceasta este una dintre cele mai mari diferențe întîlnite. Nu are deci sens să se compare rezultatele obținute pe cele două căi, ci numai să se remarce buna lor concordanță.

1. *Mecanismul propagării căldurii.* Se înțelege prin aceasta evoluția distribuției de temperatură în timp, începînd cu momentul $t = 0$, pentru un anume sistem de mișcare. Pentru explicarea acestui mecanism ne referim la figura 1, unde au fost indicate toate datele folosite în calcul.

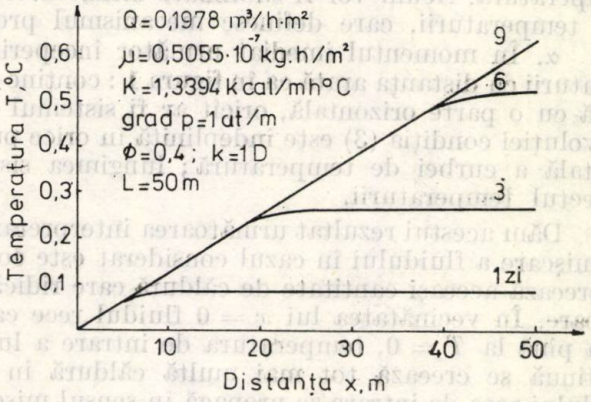


Fig. 1. — Mecanismul de propagare a căldurii în sistem.

S-a considerat evoluția temperaturii numai pînă la 50 m căci este suficient pentru ceea ce interesează. Dacă nu se precizează nimic în mod explicit, acești 50 m se consideră ca prima parte a unui sistem de mișcare oricît de lung. Înseamnă că, în aceast caz, condiția la limită (3) nu se pune pentru nici un x.

După o zi de la începerea injecției temperatura variază în funcție de distanță după curba indicată în figura 1 : crește liniar pînă la o anumită valoare pentru ca apoi să tindă către o valoare constantă. Oricît ar fi de lung sistemul de mișcare, curba de variație rămîne aceeași. După trei zile de la începerea injecției, variația temperaturii are același aspect : își continuă creșterea liniară pînă la o altă valoare, mai ridicată, după care rămîne constantă pentru orice x. În același fel are loc variația temperaturii cu distanța la 4,5,6 etc. zile de la începerea injecției.

Să presupunem că la $x = 10$ m se impune condiția (3). Aceasta înseamnă că se limitează sistemul la lungimea $L = 10$ m și că la capătul de ieșire nu se pierde căldură. Cît timp curba de creștere a temperaturii nu a întîlnit punctul corespunzător capătului sistemului, în cazul de mai sus $x = 10$ m, variația temperaturii are aspectul curbei corespunzătoare pentru o zi de injecție : porțiune ascendentă și porțiune orizontală. În momentul în care porțiunea ascendentă a întîlnit punctul corespunzător

lungimii sistemului, $x = 10$ m, începe să acționeze condiția la limită (3). Efectul ei este că temperatura nu mai crește ca în cazul în care această condiție nu se punea. De la un anumit moment t_{10}, în punctul $x = 10$ m temperatura nu mai crește peste o anumită valoare T_{10}, oricare ar fi $t > t_{10}$. Temperatura se „stabilizează" în aceste condiții și fenomenul devine staționar. În cazul prezentat în figura 1, la datele indicate, $t_{10} =$ $= 2$ zile 15 ore, iar $T_{10} = 0,12574$ °C.

În cazul unui sistem de mișcare mult mai lung, de exemplu $L = 50$m, temperatura la $x = 10$ m după trei zile de injecție este de 0,12710 °C, iar după patru zile tot 0,12710 °C. Diferența între aceste valori și T_{10} nu poate fi prinsă la scara la care au fost trasate curbele din figura 1. Ceea ce s-a spus pentru un sistem de 10 m lungime rămîne adevărat și pentru un sistem de orice altă lungime. Așa cum s-a arătat în I, 2, în lucrare au fost analizate sisteme de 10, 50, 100 și 150 m lungime. În punctul următor va fi comentată influența variației lui L asupra distribuției de temperatură. Acum vor fi subliniate următoarele caracteristici ale evoluției temperaturii, care definesc mecanismul propagării ei.

α. În momentul imediat următor începerii injecției, variația temperaturii cu distanța arată ca în figura 1 : conține o parte ascendentă racordată cu o parte orizontală, oricît ar fi sistemul de lung. În această fază a evoluției condiția (3) este îndeplinită în orice punct de pe porțiunea orizontală a curbei de temperatură ; lungimea sistemului nu influențează aspectul temperaturii.

Dăm acestui rezultat următoarea interpretare fizică : deoarece viteza de mișcare a fluidului în cazul considerat este constantă, în tot domeniul se creează aceeași cantitate de căldură care ridică temperatura cu aceeași valoare. În vecinătatea lui $x = 0$ fluidul rece care intră scade temperatura pînă la $T = 0$, temperatura de intrare a lui. Pe măsură ce injecția continuă se creează tot mai multă căldură în zăcămînt, iar influența fluidului rece de intrare se propagă în sensul mișcării atîta timp cît nimic nu o împiedică : capătul de ieșire din sistem unde trebuie impusă condiția (3). Dacă, într-un caz limită, sistemul ar fi infinit de lung, temperatura ar crește indefinit odată cu timpul.

β. În momentul în care partea de creștere a temperaturii a atins extremitatea de ieșire a zăcămîntului $x = L$, intervine condiția (3) care stabilizează temperatura în acest punct la o valoare T_L care nu mai este depășită oricît ar continua procesul. Interpretarea fizică a acestui rezultat : influența temperaturii scăzute a fluidului de la capătul de intrare s-a propagat pînă la $x = L$ și din acest moment ridicarea temperaturii datorită frecării intermoleculare și coborîrea ei datorită fluidului rece își fac echilibru.

γ. Caracterul dominant de creșetere a temperaturii este cel liniar, așa cum se vede în figura 1, atîta timp cît nu intervine extremitatea de ieșire din sistem. Temperatura crește în mod constant atîta timp cît „are loc" să crească. Extremitatea de ieșire impune o „stabilizare" a temperaturii la un nivel T_L care nu este depășit pentru nici o valoare a timpului.

2. *Influența lungimii sistemului* asupra temperaturii este prezentată în figura 2. Ea rezultă din cele prezentate la punctul precedent și nu mai are nevoie de multe explicații. Sînt prezentate rezultatele obți-

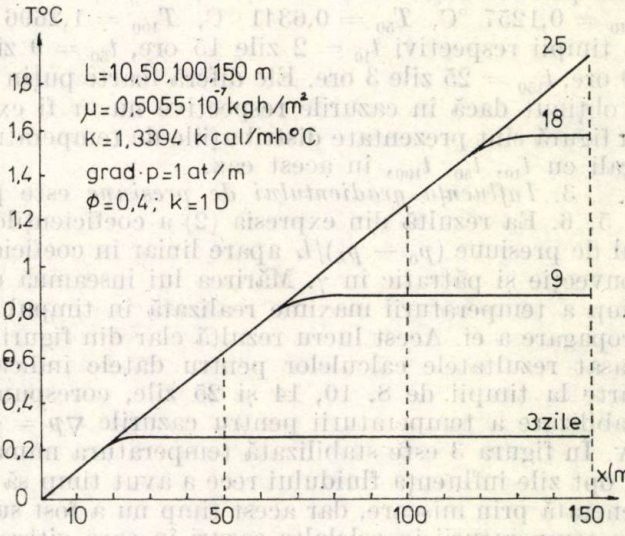


Fig. 2. — Influența lungimii sistemului asupra distribuției temperaturii.

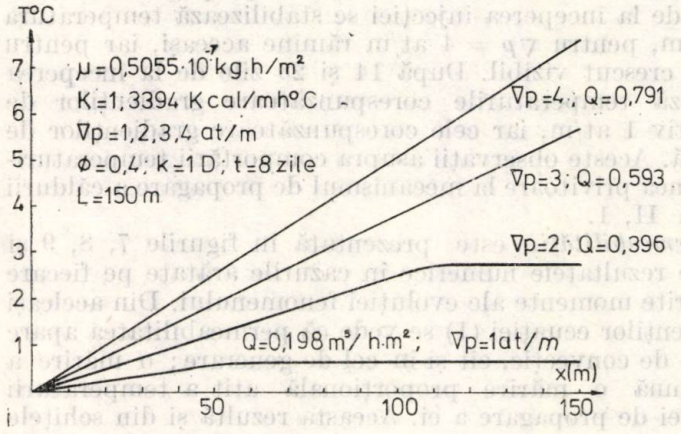


Fig. 3. — Influența gradientului de presiune asupra temperaturii; 8 zile de la începerea injecției.

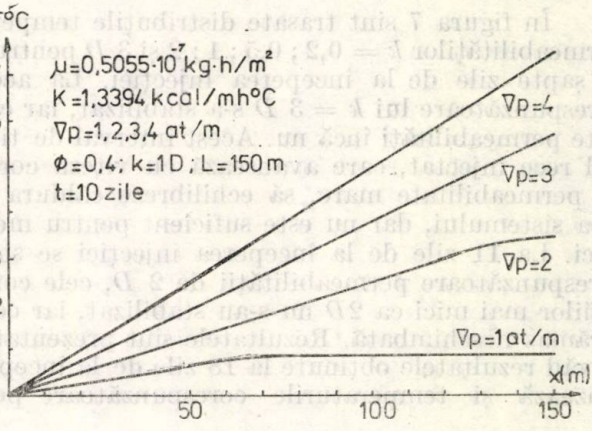


Fig. 4. — Influența gradientului de presiune asupra temperaturii; 10 zile de la începerea injecției.

nute pentru lungimile $L = 10$, 50, 100, 150 m unde au rezultat valorile $T_{10} = 0{,}1257$ °C, $T_{50} = 0{,}6341$ °C, $T_{100} = 1{,}2696$ °C, $T_{150} = 1$, 9084 °C la timpii respectivi $t_{10} = 2$ zile 15 ore, $t_{50} = 9$ zile 14 ore, $t_{100} = 17$ zile 10 ore, $t_{150} = 25$ zile 3 ore. Ele diferă foarte puțin de temperaturile ce s-ar fi obținut dacă în cazurile respective nu ar fi existat capetele de ieșire. În figură sînt prezentate distribuțiile de temperaturi la timpi aproximativ egali cu t_{10}, t_{50}, t_{100}, în acest caz.

3. *Influența gradientului de presiune* este prezentată în figurile 3, 4, 5, 6. Ea rezultă din expresia (2) a coeficienților ecuației (1). Gradientul de presiune $(p_0 - p_L)/L$ apare liniar în coeficientul α al termenului de convecție și pătratic în γ. Mărirea lui înseamnă deci o mărire în același timp a temperaturii maxime realizată în timpul mișcării și a vitezei de propagare a ei. Acest lucru rezultă clar din figurile prezentate, unde s-au trasat rezultatele calculelor pentru datele indicate pe fiecare figură în parte la timpii de 8, 10, 14 și 25 zile, corespunzătoare momentelor de stabilizare a temperaturii pentru cazurile $\nabla p = 4$, 3, 2, 1 at/m, respectiv. În figura 3 este stabilizată temperatura numai pentru $\nabla p = 4$ at/m; în opt zile influența fluidului rece a avut timp să echilibreze temperatura generată prin mișcare, dar acest timp nu a fost suficient pentru stabilizarea temperaturii în celelalte cazuri în care viteza de propagare este mai mică. După zece zile de la începerea injecției se stabilizează temperatura și pentru $\nabla p = 3$ at/m, pentru $\nabla p = 4$ at/m rămîne aceeași, iar pentru $\Delta p = 2$ și 1 at/m au crescut vizibil. După 14 și 25 zile de la începerea injecției se stabilizează temperaturile corespunzătoare gradienților de presiune de 2, respectiv 1 at/m, iar cele corespunzătoare gradienților de 3 și 4 at/m staționează. Aceste observații asupra comportării temperaturilor completează imaginea privitoare la mecanismul de propagare a căldurii în sistem schițată în II, 1.

4. *Influența permeabilității* este prezentată în figurile 7, 8, 9 și 10, unde sînt schițate rezultatele numerice în cazurile arătate pe fiecare figură în parte la diferite momente ale evoluției fenomenului. Din aceleași expresii (2) ale coeficienților ecuației (1) se vede că permeabilitatea apare liniar atît în termenul de convecție, cît și în cel de generare; o mărire a permeabilității înseamnă o mărire proporțională atît a temperaturii maxime, cît și a vitezei de propagare a ei. Aceasta rezultă și din schițele prezentate.

În figura 7 sînt trasate distribuțile temperaturilor corespunzătoare permeabilităților $k = 0{,}2$; 0,5 ; 1 ; 2 și 3 D pentru datele indicate pe figură la șapte zile de la începerea injecției. La acest moment temperatura corespunzătoare lui $k = 3$ D s-a stabilizat, iar cele corespunzătoare celorlalte permeabilități încă nu. Acest interval de timp este suficient ca lichidul rece injectat, care avansează cu viteza corespunzătoare unui mediu cu permeabilitate mare, să echilibreze căldura generată pe toată lungimea sistemului, dar nu este suficient pentru medii cu permeabilități mai mici. La 11 zile de la începerea injecției se stabilizează și temperatura corespunzătoare permeabilității de 2 D, cele corespunzătoare permeabilităților mai mici ca $2D$ nu s-au stabilizat, iar cea corespunzătoare lui $3D$ a rămas neschimbată. Rezultatele sînt prezentate în figura 8. În figura 9 se văd rezultatele obținute la 18 zile de la începerea injecției, cînd se stabilizează și temperaturile corespunzătoare permeabilității de $1D$, iar

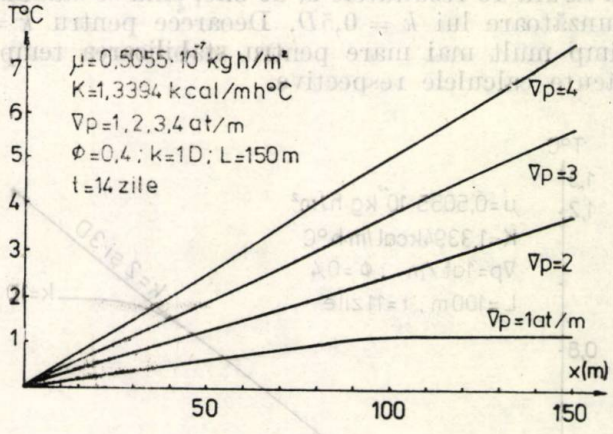


Fig. 5. — Influența gradientului de presiune asupra temperaturii; 14 zile de la începerea injecției.

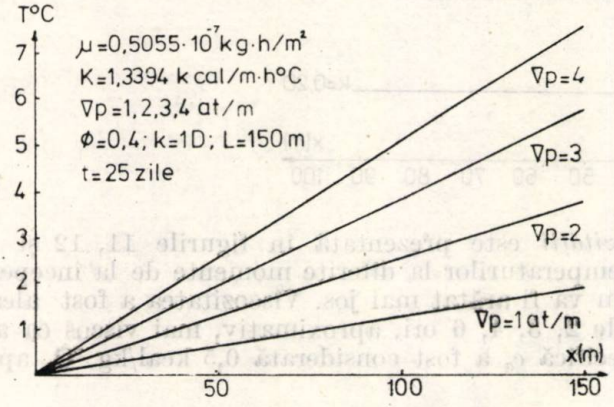


Fig. 6. — Influența gradientului de presiune asupra temperaturii; 25 zile de la începerea injecției.

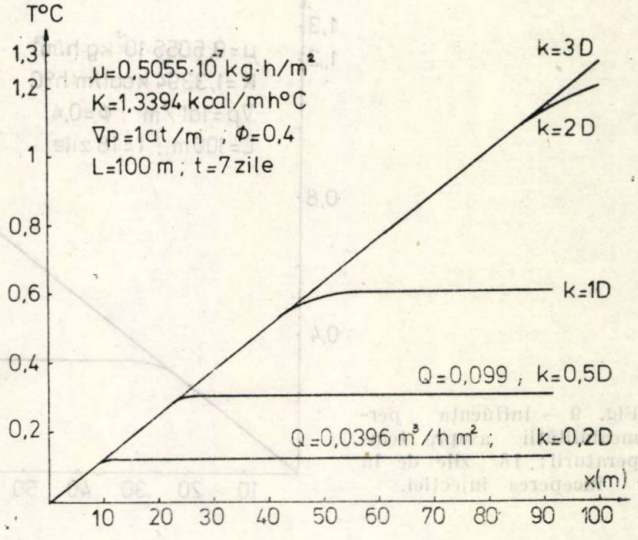


Fig. 7. — Influența permeabilității asupra temperaturii :7 zile de la începerea injecției.

în figura 10 rezultatele la 30 zile, cînd se stabilizează temperaturile corespunzătoare lui $k = 0{,}5D$. Deoarece pentru $k = 0{,}2\ D$ este necesar un timp mult mai mare pentru stabilizarea temperaturii, nu au mai fost făcute calculele respective.

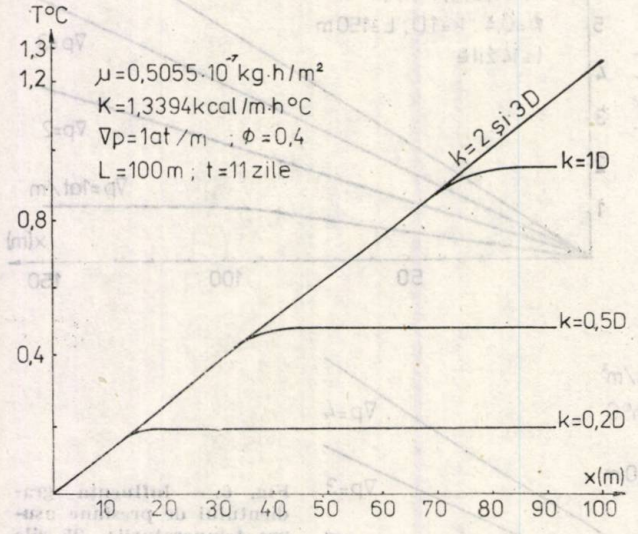


Fig. 8. — Influența permeabilității asupra temperaturii; 11 zile de la începerea injecției.

5. *Influența vîscozității* este prezentată în figurile 11, 12 și 13, care arată distribuția temperaturilor la diferite momente de la începerea injecției, alese după cum va fi arătat mai jos. Vîscozitatea a fost aleasă pentru un fluid fictiv de 2, 3, 4, 6 ori, aproximativ, mai vîscos ca apa pentru care căldura specifică c_a a fost considerată 0,5 kcal/kg °C, apro-

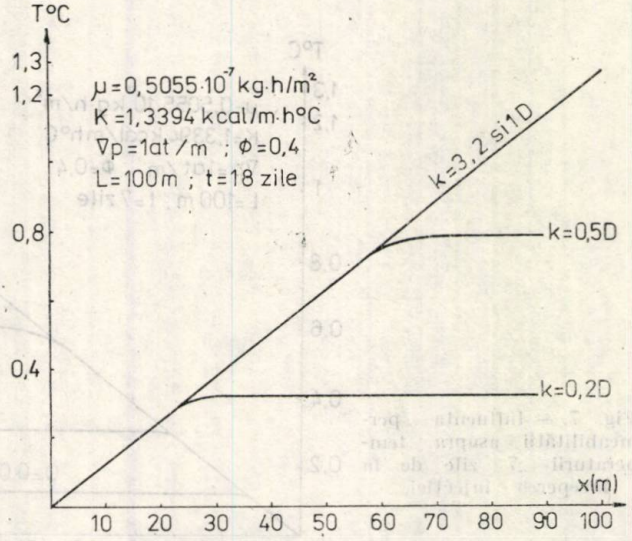


Fig. 9 — Influența permeabilității asupra temperaturii; 18 zile de la începerea injecției.

piată de majoritatea produselor petrolifere, iar masa specifică $\rho_a = 900 kg/m^3$. Rezultă de aici că $\rho_a c_a = 450$ kcal/m³ °C, față de $\rho_a c_a = 1000$ kcal/m³ °C în cazul apei. Pentru a reliefa efectul variației vîscozității s-a lucrat cu un gradient de presiune ridicat, $\nabla p = 3$ at/m. Dacă se consideră un fluid

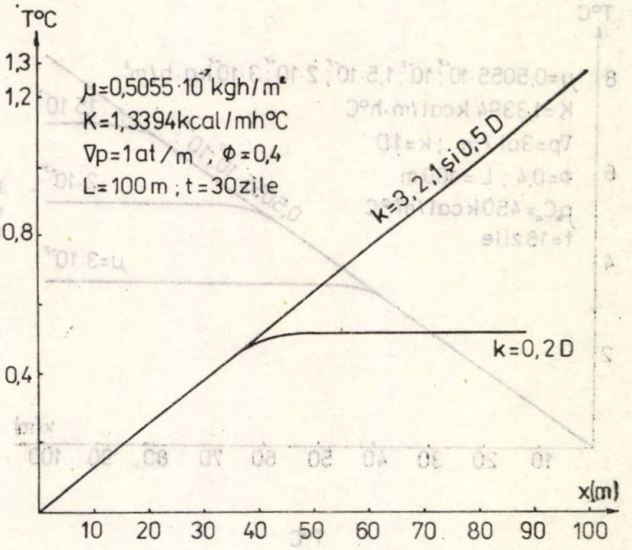


Fig. 10 — Influența permeabilității asupra temperaturii; 30 zile de la începerea injecției.

a cărui vîscozitate este exprimată în °E, trecerea la unitățile tehnice se face după formula (5).

În figura 11 sînt trasate curbele de temperatură în funcție de distanță la zece zile de la începerea injecției, timp în care s-a stabilizat numai temperatura corespunzătoare vîscozității apei. Figura 12 arată curbele

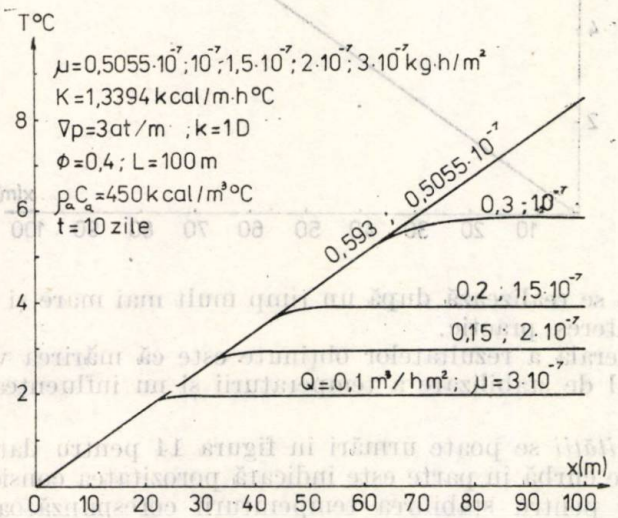


Fig. 11. — Influența vîscozității asupra temperaturii; 10 zile de la începerea injecției.

de temperatură la 18 zile, cînd se stabilizează temperatura corespunzătoare unui fluid de două ori mai vîscos ca apa, iar figura 13 la 26 zile, corespunzînd stabilizării temperaturii pentru un fluid de trei ori mai vîscos ca apa. Temperatura stabilizată corespunzătoare unui fluid de 4 și

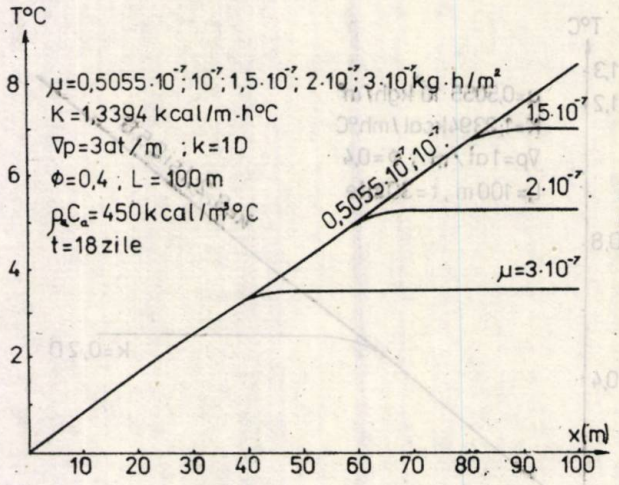


Fig. 12. — Influența vîscozității asupra temperaturii; 18 zile de la începerea injecției.

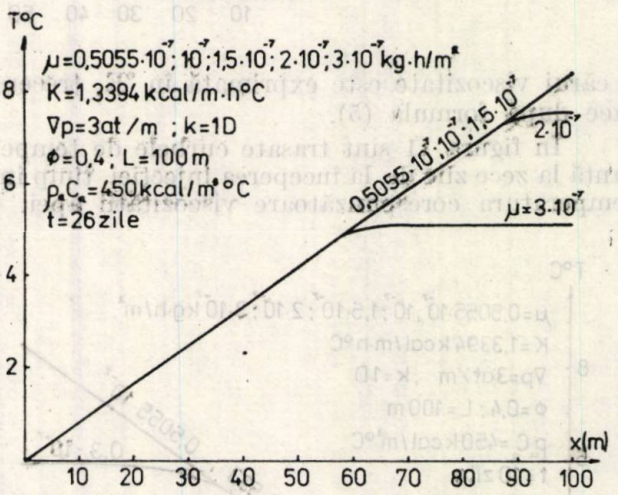


Fig. 13 .— Influența vîscozității asupra temperaturii; 26 zile de la începerea injecției.

6 ori mai vîscos ca apa se realizează după un timp mult mai mare și nu credem că prezintă interes practic.

Caracteristica generală a rezultatelor obținute este că mărirea vîscozității mărește timpul de stabilizare a temperaturii și nu influențează valoarea ei maximă.

6. *Influența porozității* se poate urmări în figura 14 pentru datele arătate acolo. Pe fiecare curbă în parte este indicată porozitatea considerată și timpul necesar pentru stabilirea temperaturii corespunzătoare. Din analiza datelor obținute se vede că această temperatură este sensi-

bilă la variația porozității : crește odată cu porozitatea și crește și timpul de stabilizare.

7. *Influența capacității calorice a mediului*, $\rho_m c_m$, este redată în figura 15. Au fost alese, în afară de valoarea cu care s-a lucrat în mod obișnuit,

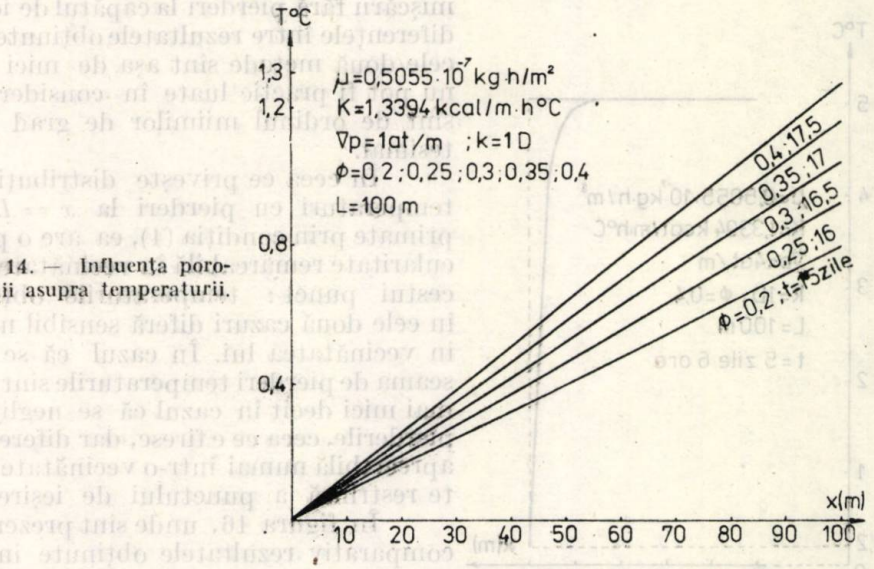


Fig. 14. — Influența porozității asupra temperaturii.

$\rho_m c_m$ = 480,519 kcal/m³ °C, încă două valori, 400 și 600. La momentul t = 16 zile, cînd se stabilizează temperatura corespunzătoare lui $\rho_m c_m$ =

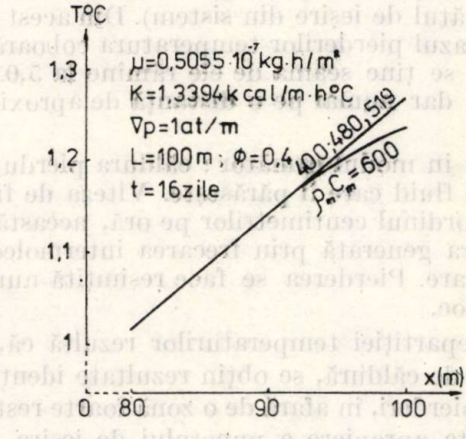


Fig. 15. — Influența capacității calorice a mediului asupra temperaturii.

= 400 kcal/m³ °C, temperaturile corespunzătoare celorlalte valori diferă de ea prin cantități neglijabile. Temperatura nu este sensibilă la variația capacității calorice a mediului poros.

III. REZULTATELE OBȚINUTE IN CAZUL CÎND SE PIERDE CĂLDURA LA CAPĂTUL DE IEȘIRE

Pentru aplicații s-a pornit de la soluția exactă a problemei dată în [1] în care s-au făcut aproximațiile expuse acolo, sau s-a aplicat ecuației (1) și condițiile la limită (4) metoda diferențelor finite. Ca și în cazul mișcării fără pierderi la capătul de ieșire, diferențele între rezultatele obținute prin cele două metode sînt așa de mici încît nu pot fi practic luate în considerație; sînt de ordinul miimilor de grad centesimal.

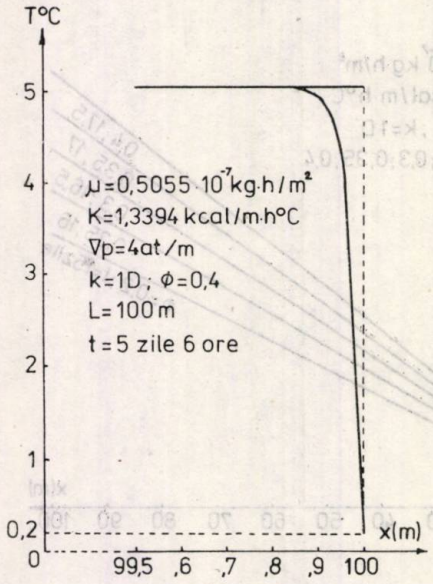


Fig. 16. — Influența pierderilor de căldură la $x = L$, asupra temperaturilor.

În ceea ce privește distribuția de temperaturi cu pierderi la $x = L$, exprimate prin condiția (4), ea are o particularitate remarcabilă în vecinătatea acestui punct: temperaturile obținute în cele două cazuri diferă sensibil numai în vecinătatea lui. În cazul că se ține seama de pierderi temperaturile sînt mult mai mici decît în cazul că se neglijează pierderile, ceea ce e firesc, dar diferența e apreciabilă numai într-o vecinătate foarte restrînsă a punctului de ieșire.

În figura 16, unde sînt prezentate comparativ rezultatele obținute în cele două cazuri, s-a folosit o altă scară a desenului decît în toate celelalte figuri, pentru a se urmări mai bine diferențele de care e vorba. Se observă că în ambele cazuri temperaturile coincid pînă la distanța de 99,8 m de la galeria de intrare (0,2 m de la capătul de ieșire din sistem). Din acest punct cele două curbe se separă: în cazul pierderilor temperatura coboară pînă la 0,2029°C, iar în cazul că nu se ține seama de ele rămîne la 5,0788°C. Diferența este deci foarte mare, dar numai pe o distanță de aproximativ 0,2 m de la capătul de ieșire.

Interpretăm acest rezultat în modul următor: căldura pierdută din sistem se datorește debitului de fluid care îl părăsește. Viteza de filtrare fiind în general foarte mică, de ordinul centimetrilor pe oră, această pierdere este compensată de căldura generată prin frecarea intermoleculară ce are loc în toată masa în mișcare. Pierderea se face resimțită numai în jurul punctului unde ea are loc.

Din aspectul general al repartiției temperaturilor rezultă că, dacă se iau în considerație pierderile de căldură, se obțin rezultate identice cu cele în care se neglijează aceste pierderi, în afară de o zonă foarte restrînsă, aproape neglijabilă, din imediata apropiere a punctului de ieșire. Acest lucru prezintă interesul practic ce rezultă din calculul temperaturilor: ne putem limita numai la cazul fără pierderi deoarece expresia matematică a temperaturii este mult mai simplă decît în celălalt caz.

CONCLUZII

Cu toate că rezultatele prezentate în lucrare sînt obținute într-un caz cu totul particular, mișcarea liniară unidimensională a unui fluid incompresibil într-un mediu poros omogen, se pot trage cîteva concluzii cu caracter general și indica unele direcții de continuare a studiilor care vor completa și aprofunda aceste rezultate.

1. Efectul căldurii generate de lucrul mecanic al forțelor de împingere a fluidului în mediul poros este relativ mare, așa încît se impune a fi luat în considerare într-o analiză mai fină a mișcării.

2. Formula care dă lucrul mecanic al forțelor de împingere în unitatea de timp și de volum are un caracter general : ea este valabilă atît pentru medii omogene izotrope, cît și pentru medii neomogene și neizotrope. Utilizarea ei în cazuri mai apropiate de fenomenele reale decît cele analizate în lucrarea de față va da indicații mai nuanțate asupra efectului însuși.

3. Datorită variației rapide a vîscozității cu temperatura, fenomenele de mișcare vor fi sensibil influențate de ea : viteza de filtrare este invers proporțională cu vîscozitatea, viteza de reacție chimică este foarte sensibilă la variația temperaturii, presiunea fluidelor compresibile variază de asemenea cu temperatura după legi stabilite în termodinamică.

4. Efectul frecărilor intermoleculare își găsește o largă aplicație în inițierea combustiei prin aprindere spontană, unde o mărire de temperatură chiar cu o valoare foarte redusă este importantă. În cinetica chimică este cunoscut faptul că o mărire a temperaturii cu 10°C dublează viteza de oxidare și deci ritmul de generare de căldură, conducînd la realizarea aprinderii spontane într-o perioadă mai scurtă.

5. Cazurile în care se ține seama de pierderile de căldură la ieșirea din sistem și în care nu se ține seama de ele dau rezultate diferite pentru distribuția de temperatură numai în vecinătatea punctului de ieșire. Aceasta prezintă interesul practic de a neglija aceste diferențe din considerațiile cu caracter tehnic.

Primită la redacție la 8 octombrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. V. IONESCU, I. TUTUNEA, AL. TURTĂ *Influența frecării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul liniar. Partea întîia*, St. cerc. mec. apl., **43**, 3 (1985).
2. *Hütte. Manualul Inginerului*, vol. I, Edit. tehnică, București, 1949, p. 458.

MODEL DE CALCUL PENTRU DRENAJUL SUBTERAN REVERSIBIL ÎN SUBIRIGAȚIE

de IOAN DAVID

Institutul Politehnic „Tr. Vuia", Timișoara

Modelul de calcul prezentat în lucrare oferă o metodologie pentru determinarea mărimilor hidraulice caracteristice a unui sistem de drenaj în condiții de funcționare reversibile de subirigație. Metoda este finalizată pînă la nivelul unor formule de calcul aplicabile în proiectare.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Utilizarea reversibilă în irigație a rețelei de drenaj subteran reprezintă o soluție de irigație mai puțin răspîndită, dar cercetată și experimentată în tot mai multe țări, inclusiv în țara noastră, datorită avantajelor de mare actualitate și de perspectivă pe care le prezintă : economie de apă (pînă la 50%), consum de energie în exploatare redus, posibilitatea utilizării în irigații a apelor reziduale cu un risc diminuat, o bună conservare a solului prin eliminarea eroziunii etc. [1], [2], [3], avantaje de o deosebită actualitate.

Deși metoda de irigație subterană în general este mai de multă vreme cunoscută, utilizarea sistemelor de drenaj în dublu scop, desecare — irigație, adică sub formă de sisteme reversibile este relativ nouă. În figura 1 *a*, *b* se prezintă schema generală de principiu a funcționării sistemului de drenuri subterane ca drenaj de desecare (fig. 1 *a*), respectiv ca și tuburi de irigație subterană (fig. 1 *b*).

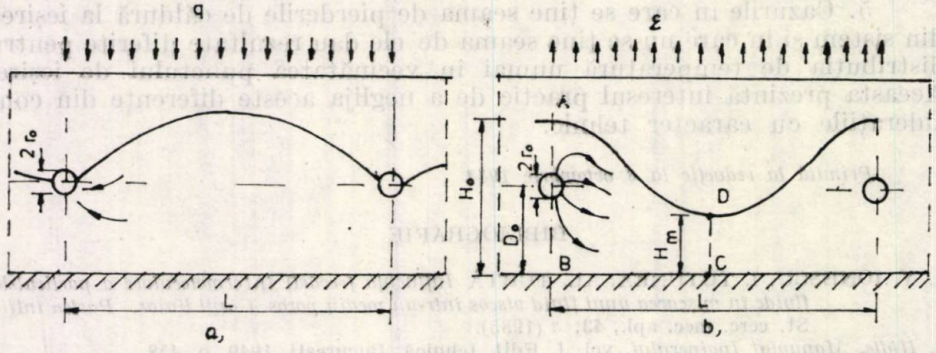


Fig. 1. — Schema generală a drenajului reversibil: *a* — funcționarea sistemului ca drenaj; *b* — funcționarea reversibilă ca irigație subterană.

Este de menționat că, deși metodele de calcul ale sistemelor de drenuri în scop de desecare au cunoscut în ultimele decenii o largă dezvoltare [4], funcționarea reversibilă în regim de irigație este o problemă mai puțin studiată, mai ales sub aspect analitic [1], [6], [7].

În cadrul lucrării se va prezenta un model de calcul pentru funcționarea reversibilă în irigație (fig. 1 *b*) a unui sistem de drenuri tubulare.

2. PREZENTAREA MODELULUI DE CALCUL

Prin modelul de calcul al drenajului subteran reversibil în irigație (fig. 1 *b*) se urmărește stabilirea unor relații între mărimile hidraulice și geometrice caracteristice sistemului : H_0 — adîncimea zonei saturate în dreptul drenului ,prin care se asigură umiditatea la capacitatea de cîmp la suprafață ; H_m — adîncimea minimă a zonei saturate (la mijlocul distanței dintre drenuri) ; care asigură la suprafața terenului umiditatea la plafonul minim ; ε — consumul de apă prin evapotranspirația de pe o suprafață unitară și în unitatea de timp ; D_0 — adîncimea de pozare a drenurilor față de stratul impermeabil de bază ; r_0 — raza tubului de dren ; L — distanța dintre tuburi.

Analizînd aspectul fizic al mișcării se observă că diferența de nivel $h = H_0 - H_m$, care urmează a fi determinată, reprezintă pierderea de sarcină totală care are loc în domeniul mișcării ($ABCD$). Printr-o schematizare asemănătoare a mișcării cu cea utilizată în calculul drenajului [4], [8], [9], [10], pierderea de sarcină totală se poate descompune în două componente :

$$h = h_0 + h_g, \tag{1}$$

unde h_0 reprezintă pierderea de sarcină în mișcarea preponderent orizontală, care se poate fi evaluat, ca și în cazul drenajului, pe baza modelului de mișcare unidimensională și ipotezele teoriei hidraulice a filtrației [4] :

$$h_0 = \frac{\varepsilon L^2}{8kT_e}; \qquad T_e = \frac{H_0 + H_m}{2}, \tag{2}$$

h_g reprezintă pierderea de sarcină generată de curbura liniilor de curent determinată de geometria domeniului mișcării (curbarea în vecinătatea tubului și în zona convergentă $AB \to DC$ (fig. 1*b*).

Pentru evaluarea lui h_g se procedează la transformarea domeniului mișcării ($ABCD$) pe un domeniu canonic, unde se va putea scrie potențialul complex al mișcării generate de sursa P. Se consideră în acest scop planul complex (Z), numit planul fizic al mișcării, în care se reprezintă în mod convenabil domeniul mișcării (fig. 2).

Efectuînd o translație cu $a = D_0 - H_{0/2}$ și apoi o transformare conformă a benzii de lățime H_0 pe planul complex (Z^*), transformare dată de funcția olomorfă :

$$Z^* = \cos \frac{\pi(Z - D_0)}{H_0}, \tag{3}$$

domeniul mișcării devine $D'A'B'C'$ (fig. 3), poziția tubului avînd afixa

$$Z^*_{P'} = -\cos \frac{\pi D_0}{H_0}.$$

Ținîndu-se seama de faptul că $\frac{L}{2} > (3 \div 4) H_0$, au loc aproximările :

$$\operatorname{ch} \frac{\pi L}{2H_0} \simeq \operatorname{sh} \frac{\pi L}{2H_0} \simeq \frac{1}{2} e^{\frac{\pi L}{2H_0}}. \tag{4}$$

În aceste condiții, afixa punctului D' se poate exprima sub forma:

$$Z^*_{D'} = \cos \frac{\pi\left(i\frac{L}{2} - H_m\right)}{H_0} \simeq \frac{1}{2} e^{\frac{\pi L}{2H_0}} e^{-i\frac{Hm}{H_0}\pi}. \quad (5)$$

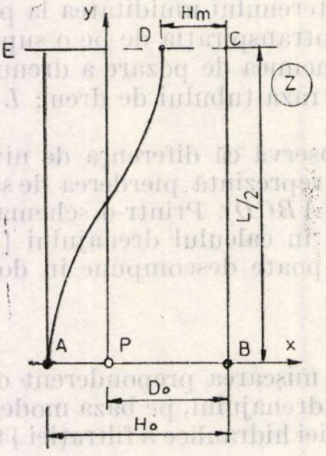


Fig. 2. — Schema sistemului în planul fizic Z.

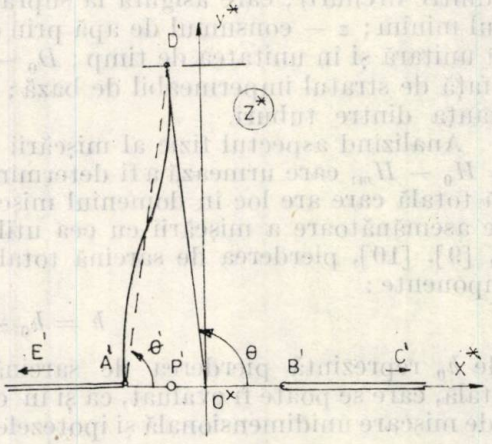


Fig. 3. — Reprezentarea domeniului mișcării în planul complex Z.

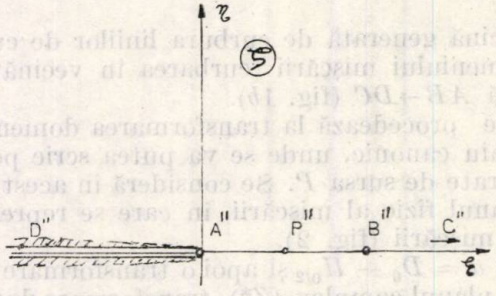


Fig. 4. — Reprezentarea domeniului mișcării în planul complex.

Observînd în continuare că $e^{\frac{\pi L}{2H_0}} >> 1$, se poate considera cu o foarte bună aproximație că $\theta' \simeq \theta = \frac{H_m}{H_0}\pi$. Aproximînd apoi curba $A'D'$ cu o dreaptă și efectuînd o translație paralelă cu axa $O'X^*$ astfel încît A' să devină origine, domeniul mișcării se identifică, cu o bună aproximație, cu un domeniu unghiular avînd deschiderea $\theta = \frac{H_m}{H_0}\pi$.

Efectuînd o nouă transformare conformă de forma

$$\zeta = (1 + Z^*)^\lambda, \quad (6)$$

unde cu λ s-a notat raportul H_0/H_m, domeniul mișcării se identifică, cu o foarte bună aproximație, cu semiplanul superior din planul (ζ) (fig. 4).

Corespondența dintre planul fizic al mișcării (Z) și planul (ζ) în care mișcarea se desfășoară într-un domeniu canonic, este dată de compunerea transformărilor (3) și (6) :

$$\zeta = \left[1 + \cos\frac{\pi(Z - D_0)}{H_0}\right]^{\lambda}. \tag{7}$$

Poziția drenului (sursei) în planul (ζ) este dată de

$$\zeta_{P''} = \left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^{\lambda}. \tag{8}$$

În planul (ζ) potențialul complex al mișcării se poate scrie direct sub forma :

$$F(\zeta) = \frac{Q}{2\pi}\ln(\zeta - \zeta_{P''}), \tag{9}$$

Q fiind debitul total de irigare pe unitatea de lungime a tubului de dren, deci $Q = \varepsilon L$.

Prin intermediul transformării (7) și a relației (8), potențialul complex al mișcării în planul fizic (Z) devine :

$$F(Z) = \frac{\varepsilon L}{2\pi}\ln\left\{\left[1 + \cos\frac{\pi(Z - D_0)}{H_0}\right]^{\lambda} - \left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^{\lambda}\right\}. \tag{10}$$

Pentru evaluarea lui h_g este necesar să se determine pierderea de sarcină totală (h_{dr}) corespunzătoare mișcării generate de sursa P în domeniul $ABCD$, urmînd ca din aceasta să se scadă pierderea de sarcină (h_{di}) corespunzătoare unei mișcări generate de un dren ideal perfect (o zonă de alimentare AB) în același domeniu $ABCD$:

$$h_g = h_{dr} - h_{di}. \tag{11}$$

Observînd că din aspectul fizic al mișcării trebuie să fie satisfăcute condițiile la limită :

— în punctul C

$$Z = D_0 + i\frac{L}{2},\ H = H_m,\ \mathrm{Re}\{F(Z)\} = -kH_m + c; \tag{12}$$

— pe marginea drenului

$$Z = r_0,\ H = H_0,\ \mathrm{Re}\{F(Z)\} = -kH_0 + c, \tag{13}$$

din (10), în urma efectuării unor dezvoltări, simple și ținînd seama și de (4), se obține :

$$-kH_m + c = \frac{\varepsilon L}{4H_m} - \frac{\varepsilon L}{2\pi}\ln 2^{\lambda}, \tag{14}$$

respectiv

$$-kH_0 + c = \frac{\varepsilon L}{2\pi}\ln\left[\left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0} + \frac{\pi r_0}{H_0}\sin\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^{\lambda} - \left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^{\lambda}\right]. \tag{15}$$

În deducerea relației (15) s-au avut în vedere aproximările:

$$\cos\frac{\pi r_0}{H_0} \simeq 1\,;\quad \sin\frac{\pi r_0}{H_0} \simeq \frac{\pi r_0}{H_0}, \tag{16}$$

care sînt acceptabile, cu o eroare nesemnificativă în aplicații, avînd în vedere că raza tubului de dren este mult mai mică decît adîncimea H_0 ($r_0 << H_0$).

Din (14) și (15) se obține h_{dr}:

$$h_{dr} = \frac{\varepsilon L}{4kH_m} + \frac{\varepsilon L}{2\pi k} \ln \frac{1}{2^\lambda \left[\left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0} + \frac{\pi r_0}{H_0}\sin\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^\lambda - \left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^\lambda\right]}. \tag{17}$$

Pentru evaluarea pierderii de sarcină corespunzătoare unui dren perfect (AB, zonă de alimentare) se consideră un strat de grosime echivalentă T_e (relația 2—2) pentru care se poate scrie:

$$h_{di} = \frac{\varepsilon L}{2kT_e}. \tag{18}$$

Se precizează că această aproximare, pentru datele uzuale caracteristice sistemelor de drenaj, conduce la rezultate destul de apropiate de soluția exactă dată pentru h_{di} în [11], care adaptată la condițiile problemei analizate este de forma

$$h_{di} = \frac{\varepsilon}{k\operatorname{tg}\,\theta} \ln\left(1 + \frac{L}{2H_m}\operatorname{tg}\theta\right), \tag{19}$$

unde

$$\operatorname{tg}\,\theta = 2\frac{H_0 - H_m}{L}. \tag{20}$$

Aproximarea (18) se obține observînd că

$$T_e = H_m + \frac{L}{4}\operatorname{tg}\,\theta \Rightarrow \frac{H_m}{T_e} = 1 - \frac{L}{4T_e}\operatorname{tg}\,\theta \simeq 1 - \frac{L}{4H_m}\operatorname{tg}\theta, \tag{21}$$

care, înlocuit în dezvoltarea în serie a expresiei logaritmice din (19), conduce la

$$\ln\left(1 + \frac{L}{2H_m}\operatorname{tg}\,\theta\right) \simeq \frac{L}{2H_m}\operatorname{tg}\theta\left(1 - \frac{L}{2H_m}\operatorname{tg}\,\theta\right) \simeq \frac{H_m}{T_e} \tag{22}$$

În baza acestor aproximări (19) se reduce la (18).

Înlocuind (17) și (18) în (11) se obține expresia generală a pierderii de sarcină căutate (h_g):

$$h_g = \frac{\varepsilon L}{4kH_m}\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{\varepsilon L}{2\pi k} \times$$

$$\times \ln \frac{1}{2^\lambda \left[\left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0} + \frac{\pi r_0}{H_0}\sin\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^\lambda - \left(1 + \cos\frac{\pi D_0}{H_0}\right)^\lambda\right]}. \tag{23}$$

În cazul cînd denivelarea este relativ redusă ($H_0 \simeq H_m \simeq T_e$; $\lambda \simeq 1$ expresia (23) se poate simplifica, devenind

$$h_{ar} = \frac{\varepsilon L}{2\pi k} \ln \frac{T_e}{2\pi r_0 \sin \frac{\pi D_0}{T_e}}. \qquad (23')$$

Însumînd cele două tipuri de pierderi de sarcină (23) și (22) se obține expresia generală căutată a pierderii de sarcină totale (h), care constituie relația fundamentală în calculul hidraulic al drenajului reversibil în subirigație.

Este de menționat că, spre deosebire de cazul funcționării ca drenaj, în funcționarea reversibilă, denivelarea h nu conține pierderile de sarcină la intrarea apei în dren.

Aceste pierderi notate cu h_{if}, analizate pe larg în [8], [9], intervin totuși în determinarea nivelului de apă necesar în canalul de alimentare a tuburilor de drenaj în funcționarea reversibilă a acestora. Pentru determinarea acestui nivel mai este necesar să se cunoască și pierderile de sarcină de-a lungul tubului de dren (h_{ld}).

Într-adevăr nu este greu de observat că pentru asigurarea nivelurilor H_0 și H_m la capătul sistemului de drenaj, în regim de subirigație, cota H_c necesară a nivelului apei în canalul de alimentare la care sînt racordate tuburile de dren, se determină din relația :

$$H_c = H_0 + h_{if} + h_{ed}. \qquad (24)$$

Pentru calculul pierderilor de sarcină locale la intrarea apei din tubul prevăzut cu diferite tipuri de perforații, inclusiv influența materialului filtrant (h_{if}), se pot utiliza formulele stabilite în [8].

Expresia generală a acestor pierderi, adoptată la condițiile schemei de funcționare reversibilă este de forma :

$$h_{if} = \frac{\varepsilon L}{2k} \zeta_{if}, \qquad (25)$$

unde

$$\zeta_{if} = \alpha \left[\ln \frac{1}{\sin \frac{nb}{2d_0}} + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} \ln (A_1 + \sqrt{A_1^2+1})(A_2 + \sqrt{A_2^2+1}) + \right.$$

$$\left. + \beta \left[\ln \frac{1}{\sin \frac{\pi l}{2d_0}} + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} \ln (B_1 + \sqrt{B_1^2+1})(B_2 + \sqrt{B_2^2+1}) \right] \right. \cdot \qquad (26)$$

Pentru fante longitudinale (în lungul generatoarei) de lungime l și lățime b, cu $l > b$, coeficienții α și β au expresiile

$$\alpha = \frac{2B}{n\pi l}; \quad \beta = \frac{2B}{\pi^2 d_0}, \qquad (27)$$

unde B este distanța dintre fante, măsurată în lungul generatoarei, n este numărul fantelor pe circonferința tubului, iar d_0 este diametrul tubului

de dren. Pentru fante transversale (dezvoltate în sens transversal $l < b$) :

$$\alpha = \frac{2}{n\pi}; \quad \beta = \frac{2B}{\pi nb}. \tag{28}$$

În (26) A_1, A_2, B_1, B_2 și $\varkappa$ au expresiile :

$$A_1 = \frac{\left(\frac{d_f}{d_0}\right)^n - 1}{2\left(\frac{d_f}{d_0}\right)^{n/2} \sin \frac{nb}{2d_0}}; \quad A_2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_f}{d_0}\right)^{2n} - 1}}{2\left(\frac{d_f}{d_0}\right)^{n/2} \sin \frac{nb}{2d_0}}, \tag{29}$$

$$B_1 = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi (d_f - d_0)}{2B}}{\sin \frac{\pi l}{2B}}; \quad \varkappa = \frac{k_f}{k}, \tag{29}$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 4\left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(d_f - d_0}{2B}}{\sin \frac{\pi l}{2B}}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(d_f - d_0}{2B}}{\sin \frac{\pi l}{2B}}\right)^2} - 1\right]}.$$

Cu d_f s-a notat diametrul exterior al tubului împreună cu materialul filtrant din jurul lui, avînd coeficientul de filtrație k_f.

Expresia generală (26) se poate particulariza pentru diferite situații practice cum ar fi : drenurile de ceramică ($\alpha = 0$, iar în expresia lui β se ia $nb = \pi d_0$; absența materialului filtrant ($k_f = k$) etc.

Pentru calculul pierderilor de sarcină de-a lungul tubului de dren (h_{ld}), ținîndu-se seama de funcționarea reală a tubului de dren, în sensul că debitul descrește de la valoarea maximă la intrare ($Q_0 = \varepsilon L \cdot l_d$), unde l_d este lungimea tubului) la $Q = 0$ la capătul drenului, se pot particulariza și adapta formulele generale de calcul stabilite în [12].

Astfel,

$$h_{ld} = \frac{8(\varepsilon L)^2}{\pi^2 g d_0^4}\left[\lambda \frac{l_d}{3d_0} - 1\right]. \tag{30}$$

Înlocuind (26) și (30) în (24) se obține nivelul apei în canalul de alimentare a sistemului de tuburi de drenaj, în funcționare reversibilă de subirigație, în condițiile asigurării unei adîncimi minime H_m, la un consum specific ε. Relația astfel obținută stă la baza verificării (proiectării) unui sistem de drenaj în regim reversibil.

3. CONCLUZII

Formulele stabilite în lucrare permit verificarea și proiectarea sistemelor de drenaj reversibil în subirigație.

Printr-o schematizare adecvată a mișcării se stabilesc expresii simple ale pierderilor de sarcină în condițiile funcționării în regim de subirigație.

Pe baza acestor expresii și a unor rezultate din lucrări anterioare ale autorului privind pierderile de sarcină la intrarea în dren și de-a lungul drenului se dau indicații asupra determinării cotei apei în canalele de alimentare a drenurilor la funcționarea reversibilă.

Primită la redacție la 29 septembrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. V. BLIDARU, GH. BICOP, A. WEHRY, *Irigații și drenaje*, Ed. did. și ped. București, 1981.
2. V. BLIDARU *Irigații și desecări*, Edit. did. și ped. București, 1969.
3. GH. PRICOP, N. GRUMEZA, M. DOROBANȚU, *Metode de irigare*, Edit. Ceres, București 1971.
4. I. DAVID *Metode și modele de calcul ale drenajelor subterane orizontale*. Probleme actuale în tehnica drenajelor ,Ed. Facla, 1982, de A. Wehry, I. David, E. Man.
5. I. NICOLAESCU, O. MIHĂESCU, *Cercetări privind corelația dintre nivelul freatic, umiditatea profilului de sol și producția agricolă în condițiile unei incinte indiguite la Dunăre*, Analele ICITID, seria IF, I (V), p. 173 (1967).
6. A. WEHRY, *Irigații*, I.P. „Traian Vuia" Timișoara, 1976.
7. I. SÁLEK, *Zahlahove a odvodnovaci stavby*, Návody ke oviceni, vysekė uceni Technické v Brné, Fakulta Stavelni p. 129, 1981.
8. I. DAVID, *Über ein Berechnungsverfahren der Verlusthöhe beim Eintrittswiderstand des Wassers in die Drainrohre*, Revue Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., 1 (1983).
9. I. DAVID, A. WEHRY, E. MAN, *Efectul colmatării filtrului la drenajele agricole*, Hidrotehnica, 6 1980).
10. I. VAN SCHILFGAARDE, *Drainage for agriculture*, Wiscousin, U.S.A. 1974.
11. ST. I. GHEORGHIȚĂ *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei R.S. România, 1966.
12. I. DAVID, *Considerații asupra calculului hidraulic al conductelor cu debit variabil pe parcurs*, St. și cerc. mec. apl. **43**, *5—6*, 564—572 (1984).

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND STAREA DE TENSIUNI ÎN ZONA CILINDRICĂ A CONSTRUCȚIILOR CU FLANȘE CU NERVURI

de RADU I. IATAN, MIHAIL RENERT
Institutul Politehnic, București

În lucrare se expun experimentările efectuate pentru stabilirea intensității tensiunilor dezvoltate în porțiunea cilindrică, nervurată, a flanșelor cu nervuri, sub efectul presiunii interioare. Rezultatele experimentale se găsesc într-o bună concordanță cu cele teoretice, stabilite pe baza unei metode originale de calcul.

În cele ce urmează se vor prezenta experimentările efectuate în vederea determinării valorilor tensiunilor dezvoltate, sub efectul presiunii interioare, în zona nervurată a flanșelor cu nervuri (cu ajutorul traductoarelor tensometrice rezistive — TTR).

Pentru o primă testare a stărilor de deformații și de tensiuni în construcțiile cu flanșe cu nervuri s-a utilizat un model prevăzut cu nervuri cu lungimi diferite, de o parte și de alta a asamblării (fig. 1). Întinderea a fost simulată prin intermediul unor elemente de fixare, 3, la capetele cilindrilor cu diametrul nominal de 200 mm, pe care au fost prevăzute flanșele cu nervuri, 1, și bacurile unei mașini pentru încercarea cablurilor, 2. Deformațiile liniare specifice, dezvoltate în porțiunile cilindrice din vecinătatea nervurilor, au fost măsurate prin intermediul unor traductoare tensometrice rezistive, 4 și o punte de tip ORION. Rezultatele obținute au fost prezentate în cadrul unor sesiuni de comunicări științifice, relevîndu-se că, în zona de trecere de la porțiunea cu nervuri la virola cilindrică netedă, concentrarea tensiunilor, pe suprafața exterioară, unde au fost

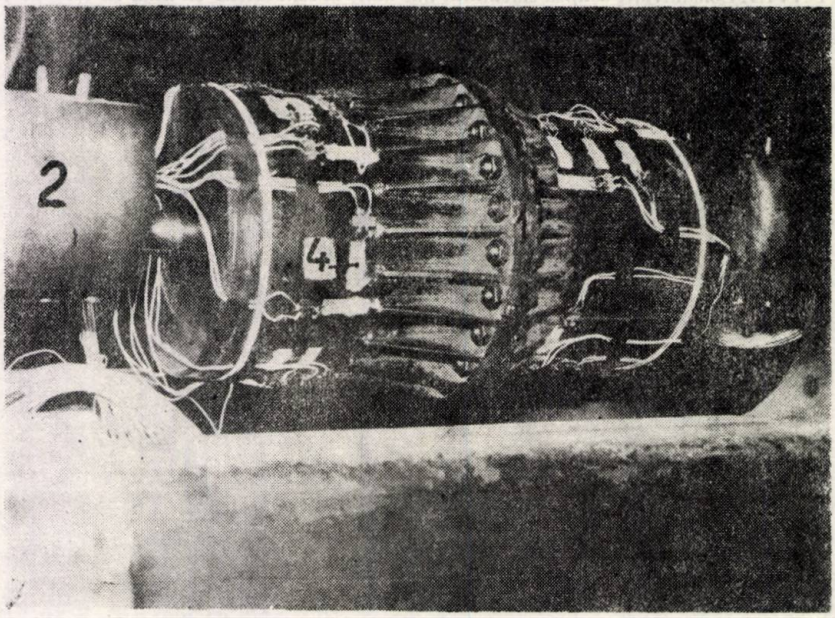


Fig. 1a

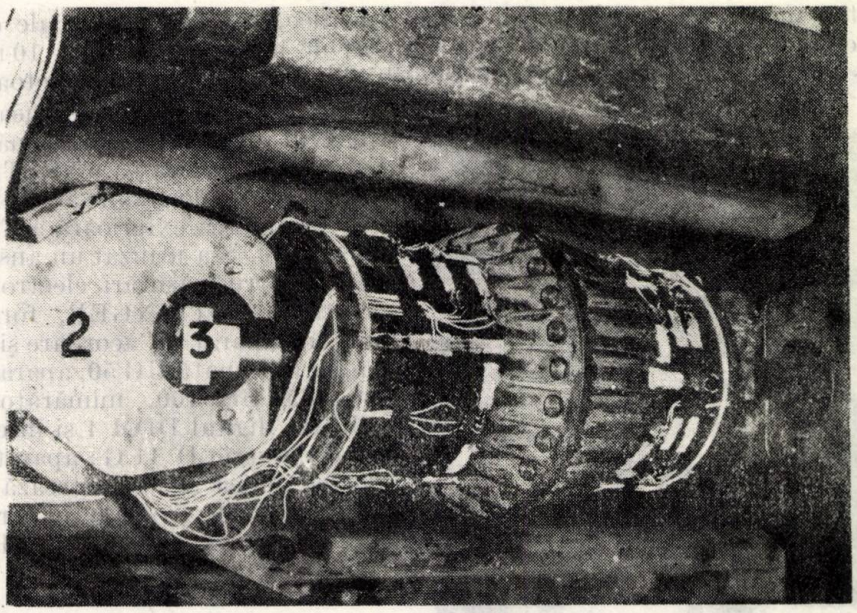


Fig. 1b

prevăzute TTR, se află sub 10% în raport cu tensiunile de membrană. Această confirmare practică a unor considerente teoretice a condus la dezvoltarea teoretică și experimentală a acestui tip de asamblare a recipientelor sub presiune.

1. MĂSURĂRI TENSOMETRICE

1.1. DESCRIEREA INSTALAȚIEI EXPERIMENTALE

Pentru verificarea experimentală a metodelor de calcul expuse în [1–3], s-a utilizat un recipient sub presiune cu următoarele caracteristici geometrice și funcționale : $r_{im} = 500$ mm ; $r_{eg} = 551{,}5$ mm ; $r_{ig} = 521{,}5$ mm ; $h_f = 55$ mm ; $\delta_e = 16$ mm ; garnitura pentru etanșare executată din IT 400 cu $E_g = 3000$ MPa ; $r_s = 575$ mm ; $r_{ef} = 621{,}5$ mm ; $n = 40$ buc. ; $p_c = 2{,}5$ MPa ; $E_c = E_f = E_n = 2{,}1 \times 10^5$ MPa ; $h_g = 2$ mm ; $r = 17{,}5$ mm ; *nervuri scurte* : $l_n = 120$ mm ; $h_n = 96{,}5$ mm ; $l_1 = 15$ mm ; *nervuri lungi* : $l_n = 180$ mm ; $h_n = 60$ mm ; $l_1 = 15$ mm.

Lungimea totală a părții cilindrice, inclusiv zonele cu nervuri și inelele flanșelor corespunzătoare, este de 880 mm, aleasă în așa fel încît cele două construcții cu flanșe cu nervuri să nu se influențeze reciproc sub sarcină (lungimea semiundei este egală cu 225,4 mm, iar lungimea părții cilindrice netede este de 580 mm). Presiunea necesară experimentărilor a fost realizată cu ajutorul unei pompe aspiratoare-respingătoare 1 (fig. 2). În recipientul 2 s-a introdus apă. Valorile presiunii realizate au fost citite la un manometru, 3, prevăzut la pompă ; pentru controlare, s-a instalat încă un manometru în partea superioară a recipientului. Ambele manometre, etalonate în prealabil, au avut scala gradată pînă la 6 MPa.

Pentru măsurarea deformațiilor liniare specifice, în diferite zone ale construcției, au fost prevăzute TTR, pe suport de hîrtie, cu baza de 10 mm, rezistența 120 Ω, factorul de tensosensibilitate egal cu 2,0. Traductoarele au fost de fabricație românească. Adezivul folosit a fost o rășină poliesterică românească, NESTRAPOL H 450, folosită, de asemenea, și la protejarea exterioară a TTR, după lipire. S-a utilizat un ansamblu 4, pentru măsurări electrotensometrice HOTTINGER, format dintr-un aparat de acordare și comutare automată UG 50, aparat de comandă US 100, numărător și indicator digital DDM 4 și înregistrator numeric D 11 G; aparatura folosită indică și înregistrează automat lungirile (contracțiile) relative, în μm/m, a 100 de TTR.

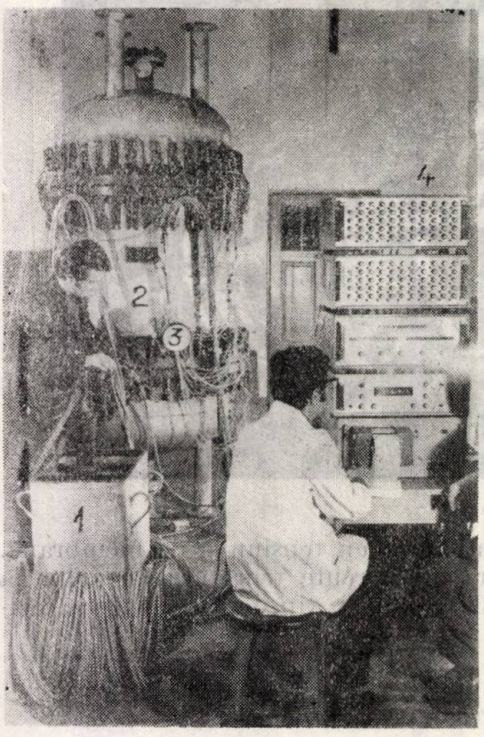


Fig. 2

1.2. PREGĂTIREA MĂSURĂRILOR

După cum este cunoscut, succesul unei măsurări tensometrice este în mare parte legat de modul cum ea a fost pregătită. Avînd în vedere acest lucru, s-au studiat, cu atenție modul de solicitare a construcției cercetate, precum și deformările corespunzătoare (deplasări, rotiri), în diferite zone. În urma acestui studiu, pe model, s-a trecut la stabilirea punctelor de măsură, indicate în figura 3 — pentru nervurile netești — respectiv în figura 4 — pentru nervurile tești. Așezarea traductoarelor s-a realizat pereche — în direcția meridională (axială) și inelară (circumferențială), obținîndu-se, în acest fel, 50 perechi de TTR.

În afara traductoarelor indicate în figura 3, pentru nervurile netești, celelalte traductoare — pînă la 100 — au fost instalate astfel:

— la 90° față de nervura 4 s-au instalat TTR axiale 64 și 66 (la 20 mm sub zona nervurilor scurte 14 și 15, pe virola cilindrică netedă) și TTR inelare 63 și 65 (la 10 mm sub zona cu nervuri scurte 14 și 15); pe aceeași direcție meridională și la aceleași distanțe, sub cozile nervurilor lungi 14 și 15 s-au instalat TTR axiale 70 și 72, respectiv TTR inelare 69 și 71;

— la 180° față de nervura 4 s-au instalat între nervurile 24 și 25, perechile de traductoare (81, 82), (83, 84), la distanțele de 10, 20, 95 și 105 mm, măsurate de la inelul flanșei către virola cilindrică netedă; instalarea traductoarelor s-a făcut la mijlocul distanței dintre cele două nervuri menționate; tot în această zonă au fost instalate și TTR (85, 86)

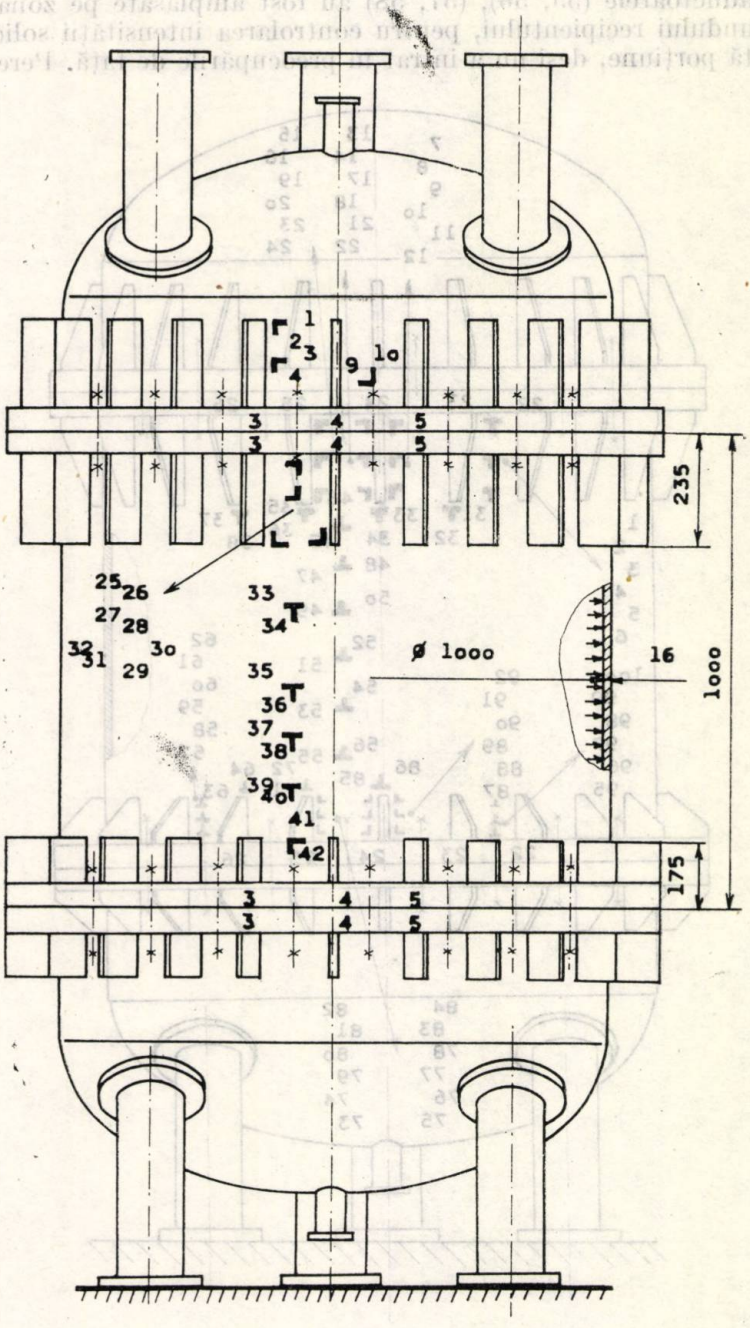


Fig. 3

sub nervura 24 respectiv TTR (87, 88), (97, 98) sub nervura 25, de o parte și de alta a acesteia.

Traductoarele (55, 56), (57, 58) au fost amplasate pe zona bordurată a fundului recipientului, pentru controlarea intensității solicitării și în această porțiune, deși nu a intrat în preocupările de față. Perechile de

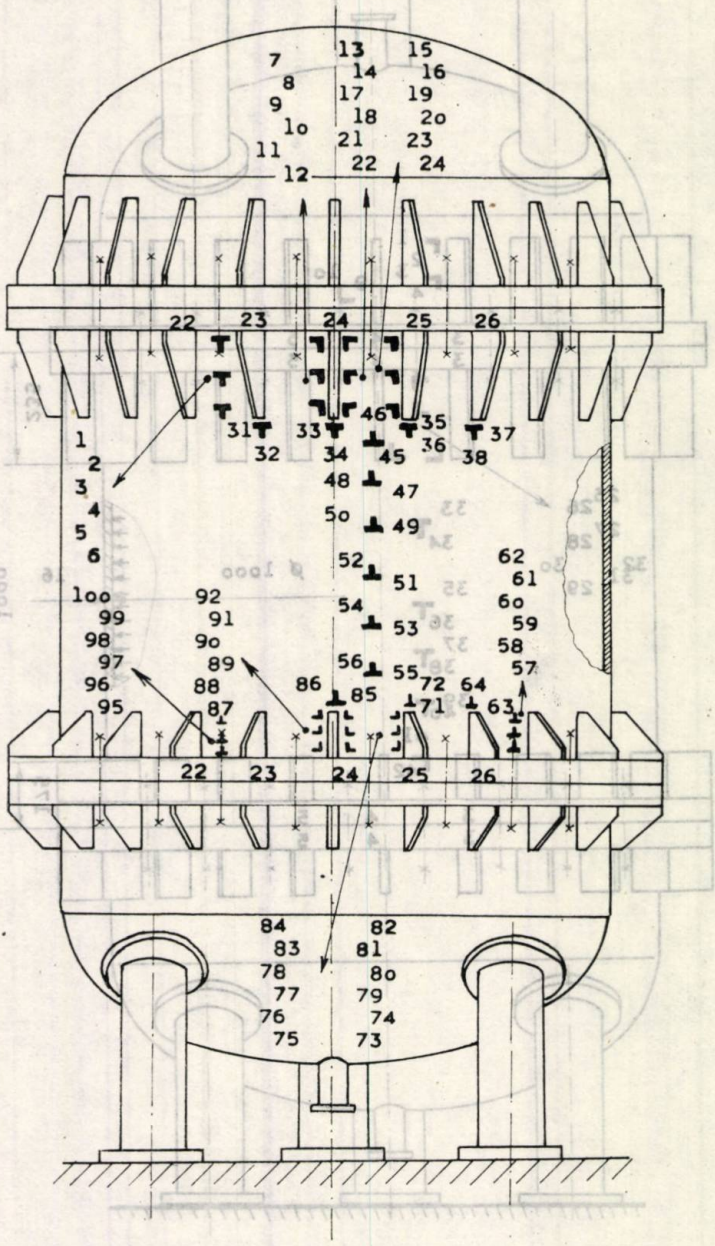


Fig. 4

traductoare (59, 60) și (61, 62) au fost amplasate în partea inferioară a inelului flanșei cu nervuri scurte (dinspre virola cilindrică), între nervurile 7 și 8.

Pe baza primelor serii de date experimentale obținute, remarcîndu-se faptul că nervurile sînt solicitate relativ puțin în comparație cu virola cilindrică, pe de o parte, și pentru a realiza o elasticitate mai mare a zonei nervurate, totodată o uniformizare a fluxului liniilor de forță, pe de altă parte, s-a recurs la teșirea nervurilor (cărora li se acordă atenția corespunzătoare în cele ce urmează). Amplasarea TTR, în acest caz, s-a făcut numai pe partea cilindrică, atît în zona cu nervuri, cît și în porțiunea netedă. Și în această situație măsurarea deformațiilor liniare specifice s-a făcut cu ajutorul unui tensometru electronic HOTTINGER, cu șase canale. Cu înregistrare automată. Modul de amplasare a TTR, pentru acest caz, este menționat în figura 4.

Se menționează că atît în cazul nervurilor neteșite cît și în cazul nervurilor teșite, numerele de ordine impare au fost folosite pentru TTR inelare, iar numerele de ordine pare au fost folosite pentru TTR meridionale.

Între TTR și cablurile ce s-au legat la tensometrul electronic au fost prevăzute contacte fixe, instalate pe virola cilindrică și pe nervuri, cu același adeziv cu care au fost fixate și TTR.

Înainte de începerea măsurărilor propriu-zise s-a verificat rezistența ohmică a tuturor TTR instalate și s-a fixat la tensometrul electronic valoarea factorului de tensosensibilitate, indicat, de altfel și de furnizorul TTR. Avînd în vedere faptul că valorile deformațiilor specifice au fost înregistrate, nu s-a realizat echilibrarea la zero a tuturor traductoarelor (s-a avut în vedere și numărul mare de traductoare folosite). În acest fel, toate valorile măsurate pentru deformațiile liniare specifice au fost raportate, prin diferență, la valoarea corespunzătoare presiunii de încercare, zero MPa, caracteristică fiecărui TTR în parte.

1.3. EFECTUAREA MĂSURĂRILOR

După verificarea tuturor conexiunilor la tensometrul electronic și a bunei funcționări a acestuia, s-a trecut la efectuarea măsurării deformațiilor liniare specifice. În acest scop, în primul rînd s-a ridicat presiunea în recipient, cu ajutorul pompei aspiratoare-respingătoare, de la zero la 3 MPa, coborîndu-se apoi la zero. În continuare s-au înregistrat pe bandă de hîrtie valorile deformațiilor specifice corespunzătoare treptelor de presiune 0 ; 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 MPa, la urcare, respectiv 2,5 ; 2,0 ; 1,5 ; 1,0 ; 0,5 ; 0,5 ; 0 MPa, la coborîre. Deși diferențele dintre valorile înregistrate ale deformațiilor au fost mici, pentru eliminarea unor eventuale erori, ciclul indicat mai sus a fost repetat încă de trei ori. S-a remarcat și în aceste cazuri o bună reproductibilitate a rezultatelor obținute anterior. Valorile deformațiilor liniare specifice înregistrate sînt prezentate în lucrarea [4].

1.4. PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE

Avînd în vedere faptul că încărcarea recipientului se menține în domeniul elastic de solicitare, deformațiile liniare specifice sînt proporționale cu valorile presiunii de încercare

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{i0} + m_i p_i, \qquad (1)$$

respectiv

$$\varepsilon_{(i+1)i} = \varepsilon_{(i+1)0} + m_{i+1}\, p_i. \tag{2}$$

Ordonata la origine, ε_{i0}, $\varepsilon_{(i+1)0}$, respectiv pantele m_i, m_{i+1}, se obțin prin prelucrarea datelor experimentale, cu metoda celor mai mici pătrate [5] sau, ceea ce este același lucru, pe baza principiului probabilității maxime. În acest caz dreapta căutată este cea caracterizată printr-un minim al sumei pătratelor distanțelor de la ea ale tuturor punctelor din grafic [6]. Astfel,

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{i0} \\ \varepsilon_{(i+1)0} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} \begin{vmatrix} \varepsilon_{iim} \\ \varepsilon_{(i+1)im} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_i \\ m_{i+1} \end{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} p \right), \tag{3}$$

unde

$$\begin{vmatrix} m_i \\ m_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{k_\varepsilon}{k_{pi}} \cdot \frac{6 \sum_{i=1}^{6} \begin{vmatrix} \varepsilon_{iim} \\ \varepsilon_{(i+1)im} \end{vmatrix} p_i - \sum_{i=1}^{6} \begin{vmatrix} \varepsilon_{iim} \\ \varepsilon_{(i+1)im} \end{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} p_i}{6 \sum_{i=1}^{6} p_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{6} p_i \right)^2}, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{iim} \\ \varepsilon_{(i+1)im} \end{vmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \begin{vmatrix} \varepsilon_{iij} \\ \varepsilon_{(i+1)ij} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Cifra șase din relațiile (3)—(5) indică numărul treptelor presiunii de încercare, iar N — numărul înregistrărilor făcute pentru deformația liniară specifică analizată (în cazul experimentărilor efectuate, $N = 8$). Valorile calculate cu relațiile (1) și (2), pentru fiecare TTR instalate pe recipient, sînt tabelate în lucrarea [4], unde sînt prezentate, de asemenea, și valorile abaterilor medii

$$\begin{vmatrix} \Delta_i \\ \Delta_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \begin{vmatrix} \varepsilon_{iim} - \varepsilon_{ii} \\ \varepsilon_{(i+1)im} - \varepsilon_{(i+1)i} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

precum și valorile dispersiei de selecție modificate

$$\begin{vmatrix} \Delta_i^2 \\ \Delta_{i+1}^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{6} \begin{vmatrix} (\varepsilon_{iim} - \varepsilon_{ii})^2 \\ (\varepsilon_{(i+1)im} - \varepsilon_{(i+1)i})^2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

2. TENSIUNI ȘI COEFICIENȚI DE INTENSIFICARE ȘI DE CONCENTRARE

Avînd în vedere starea plană de solicitare a virolei cilindrice, tensiunile meridionale și inelare se calculează cu relațiile [7; 8]

$$t_{xi} = \frac{10^{-6} E_c}{1 - \mu_c^2} [\Delta\varepsilon_{(i+1)i} + \mu_c (\Delta\varepsilon_{ii})],$$

$$t_{\omega i} = \frac{10^{-6} E_c}{1 - \mu_c^2} [\Delta\varepsilon_{ii} + \mu_c (\Delta\varepsilon_{(i+1)i})], \tag{8}$$

în care

$$\Delta\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{i0} = m_i\, p_i\,,$$
$$\Delta\varepsilon_{(i+1)i} = \varepsilon_{(i+1)i} - \varepsilon_{(i+1)0} = m_{i+1}\, p_i\,. \tag{9}$$

Considerînd relațiile (9), formulele (8) iau forma

$$t_{xi} = \frac{10^{-6} E_c\, p_i}{1 - \mu_c^2}\,(m_{i+1} + \mu_c\, m_i),$$
$$t_{\omega i} = \frac{10^{-6} E_c\, p_i}{1 - \mu_c^2}\,(m_i + \mu_c\, m_{i+1}). \tag{10}$$

Tensiunile echivalente se determină folosind formula

$$t_{echi1} = (t_{xi}^2 + t_{\omega i}^2 - t_{xi}\, t_{\omega i})^{0,5} \tag{11}$$

sau

$$t_{echi2} = \varepsilon_{echi}\, E_c\,, \tag{12}$$

unde

$$\varepsilon_{echi} = [{}^{(e)}N_q(\Delta\varepsilon_{ii}^2 + \Delta\varepsilon_{(i+1)i}^2) + {}^{(e)}N_g\, \Delta\varepsilon_{ii}\, \Delta\varepsilon_{(i+1)i}]^{0,5},$$
$${}^{(e)}N_q = \frac{1 - \mu_c(1 - \mu_c)}{(1 - \mu_c^2)^2}\,;\quad {}^{(e)}N_g = \frac{-1 + \mu_c(4 - \mu_c)}{(1 - \mu_c^2)^2}\,. \tag{13}$$

În relațiile (13), indicele (e) de la mărimile N_q și N_g indică utilizarea acestora pentru domeniul elastic de solicitare.

Abaterile între valorile tensiunilor echivalente calculate cu relațiile (11) și (12) se situează sub 10% [1].

Intensificarea tensiunilor meridionale și a tensiunilor inelare se evaluează prin intermediul coeficienților corespunzători, exprimați sub forma

$$\alpha_{xi} = 2t_{xi}\, \delta_c/(p_i\, r_{mc}),$$
$$\alpha_{\omega i} = t_{\omega i}\, \delta_c/(p_i\, r_{mc}). \tag{14}$$

Concentrarea tensiunilor echivalente poate fi apreciată prin intermediul coeficientului

$$\alpha_{echi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\delta_c\, t_{echi}/(p_i\, r_{mc}). \tag{15}$$

Pentru experimentările efectuate, valorile coeficienților de intensificare și de concentrare a tensiunilor sînt prezentate în lucrarea [4], remarcîndu-se și aici valorile reduse ale acestora.

3. CONCLUZII

Din analiza valorilor tensiunilor deduse atît pe cale teoretică [1], cît şi experimentală se constată următoarele intervale de variaţie a valorilor abaterilor :

a) $-6\%\ldots+15\%$ pentru valorile medii, respectiv $-10\%\ldots+26\%$ pentru valorile extreme ale tensiunilor meridionale, pe lungimea zonei cu nervuri scurte teşite (excepţie face valoarea determinată pe baza indicaţiilor TTR 80, instalat la distanţa de 70 mm de inelul flanşei, la care abaterea este de -41%);

b) $+4\%\ldots+20\%$ pentru valorile medii, respectiv $-15\%\ldots+42\%$ pentru valorile extreme ale tensiunilor inelare, pe lungimea zonei

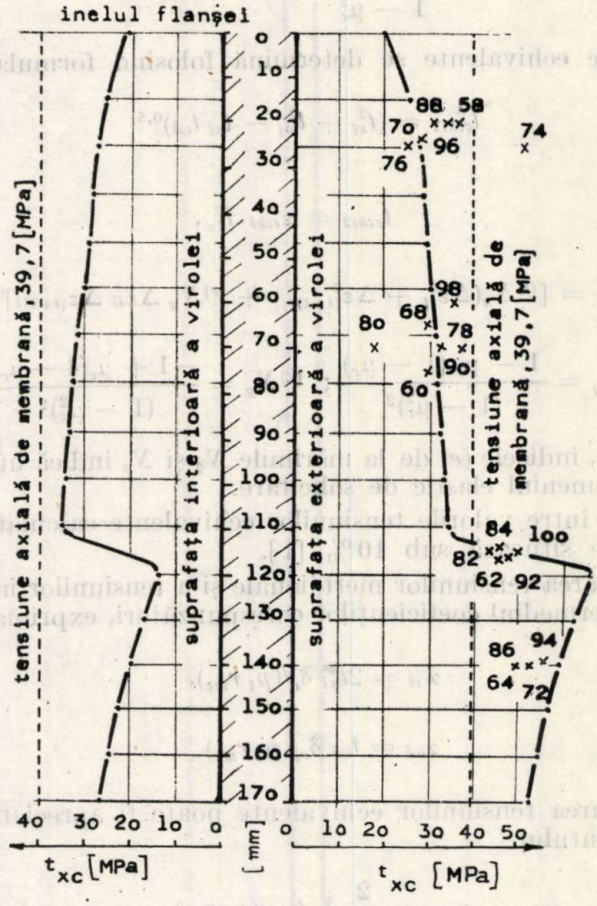


Fig. 5

cu nervuri scurte teşite (excepţie face valoarea determinată pe baza indicaţiilor TTR 79, perechea lui 80, pentru care abaterea se situează la -40%);

c) $-15\%...+2\%$ pentru valorile medii, respectiv $-27\%...+3\%$ pentru valorile extreme ale tensiunilor meridionale, pe lungimea zonei cu nervuri lungi teșite (excepție face valoarea determinată pe baza indicații-

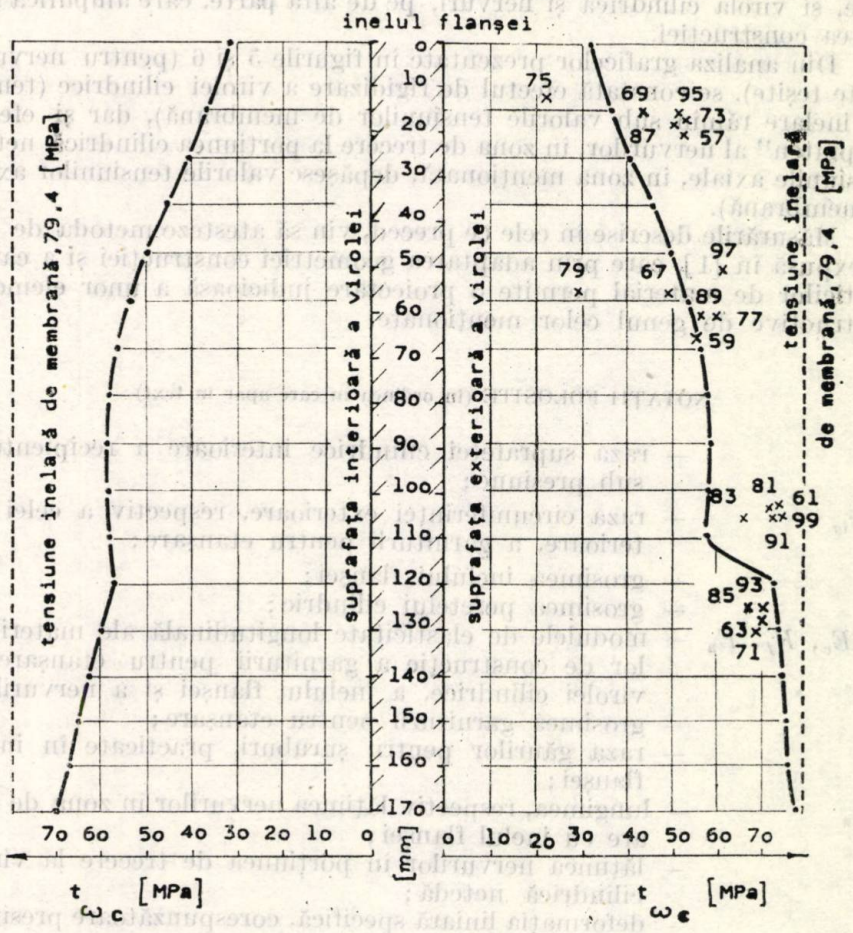


Fig. 6

lor TTR 18, instalat la distanța de 85 mm de inelul flanșei, pentru care abaterea este de -42%);

d) $-16\%...-13\%$ pentru valorile medii, respectiv $-43\%...+5\%$ pentru valorile extreme ale tensiunilor inelare, pe lungimea zonei cu nervuri lungi teșite.

Din analiza graficelor tensiunilor teoretice prezentate în figurile 5 și 6, chiar dacă abaterile (negative) sînt mai mari, calculul este, totuși, acoperitor. Atît valorile teoretice cît și cele experimentale ale tensiunilor — meridionale și inelare — nu depășesc valorile tensiunilor de membrană din virola cilindrică.

Explicația diferențelor remarcate între rezultatele teoretice și cele experimentale trebuie căutată, printre altele, în faptul că în cadrul metodei de calcul expusă în [1], nu a fost luată în considerație și influența cordoanelor de sudură, existente între inelul flanșei și nervuri, pe de o parte, și virola cilindrică și nervuri, pe de altă parte, care amplifică rigiditatea construcției.

Din analiza graficelor prezentate în figurile 5 și 6 (pentru nervurile scurte teșite). se constată efectul de rigidizare a virolei cilindrice (tensiunile inelare rămîn sub valorile tensiunilor de membrană), dar și efectul de „pinten" al nervurilor, în zona de trecere la porțiunea cilindrică netedă (tensiunile axiale, în zona menționată, depășesc valorile tensiunilor axiale de membrană).

Măsurările descrise în cele ce preced, vin să atesteze metoda de calcul expusă în [1], care prin adaptarea geometriei construcției și a caracteristicilor de material permite o proiectare judicioasă a unor elemente constructive de genul celor menționate.

NOTAȚII FOLOSITE (în ordinea în care apar în text):

r_{im} — raza suprafeței cilindrice interioare a recipientului sub presiune;

r_{eg}, r_{ig} — raza circumferinței exterioare, respectiv a celei interioare, a garniturii pentru etanșare;

h_f — grosimea inelului flanșei;

δ_c — grosimea peretelui cilindric;

E_g, E_c, E_f, E_n — modulele de elasticitate longitudinală ale materialelor de construcție a garniturii pentru etanșare, a virolei cilindrice, a inelului flanșei și a nervurilor;

h_g — grosimea garniturii pentru etanșare;

r_g — raza găurilor pentru șuruburi, practicate în inelul flanșei;

l_n, h_n — lungimea, respectiv lățimea nervurilor în zona de fixare cu inelul flanșei;

l_1 — lățimea nervurilor în porțiunea de trecere la virola cilindrică netedă;

ε_{i0} — deformația liniară specifică, corespunzătoare presiunii egale cu zero și numărul i al TTR;

ε_{ii} — deformația liniară specifică, corespunzătoare treptei $\hat{i}$ a presiunii de încercare și a numărului i al TTR;

m_i — panta dreptei de variație a ε_{ii} în raport cu p_i, la scările de reprezentare considerate;

p_i — presiunea de încercare;

k_ε — scara de reprezentare a valorilor deformațiilor liniare specifice;

k_{pi} — scara de reprezentare a valorilor presiunii de încercare;

ε_{iim} — deformația liniară specifică, medie, calculată cu formula (5), corespunzătoare TTR i și treptei $\hat{i}$ a presiunii de încercare;

ε_{iij} — deformațiile liniare specifice înregistrate, corespunzătoare TTR cu numărul de ordine i, treptei $\hat{i}$ de presiune și numărul j al înregistrării realizate ($j = 1 \ldots N$)

Δ_i — abaterea medie, calculată cu formula (6), corespunzătoare numărului i al TTR;

Δ_i^2 — dispersia de selecție modificată, calculată cu formula (7), corespunzătoare numărului i al TTR;

$t_{x\hat{i}}$ $t_{\omega\hat{i}}$ — tensiunea axială, respectiv inelară, dezvoltată în virola cilindrică a recipientului sub acțiunea valorii presiunii de încercare p_i;

μ_c — modulul contracției transversale (Poisson) pentru materialul de construcție al virolei cilindrice;

$\Delta\varepsilon_{ii}$ — deformația liniară specifică, calculată cu formula (9), prin raportare la deformația liniară specifică stabilită pentru valoarea zero a presiunii de încercare;

$t_{ech\hat{i}1}$, $t_{ech\hat{i}2}$ — tensiuni echivalente, calculate cu formulele (11), respectiv (12), corespunzătoare treptei $\hat{i}$ a presiunii de încercare;

$\varepsilon_{ech\hat{i}}$ — deformația liniară specifică, echivalentă, calculată cu formula (13_1), pentru treapta $\hat{i}$ a presiunii de încercare;

$^{(e)}N_g$, $^{(e)}N_g$ — factori de corecție, calculați cu relațiile (13_2) și (13_3);

$\alpha_{x\hat{i}}$, $\alpha_{\omega\hat{i}}$ — coeficienți de intensificare a tensiunilor axiale și inelare calculați cu formulele (14), pentru treapta $\hat{i}$ a presiunii;

$\alpha_{ech\hat{i}}$ — coeficientul de concentrare a tensiunilor, calculat cu formula (15), pentru treapta $\hat{i}$ a presiunii;

r_{mc} — raza suprafeței mediane a virolei cilindrice;

Primită la redacție la 4 ianuarie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. I. R. IATAN, *Cercetări teoretice și experimentale privind construcțiile de îmbinări cu flanșe cu nervuri*, teză de doctorat. Institutul Politehnic, București, 1979.
2. I. R. IATAN, M. RENERT, Revista de chimie, **29**, 7, p. 678–683 (1978).
3. I. R. IATAN M. RENERT, Buletinul I.P.B., 2, p. 157–166 (1978).
4. I. R. IATAN *Culegere de date teoretice și experimentale, prelucrate, privind îmbinările cu flanșe cu nervuri*. Catedra Utilaj tehnologic chimic, București, 1979.
5. M. TIRON, *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*. Edit. tehnică, București, 1972.
6. G. A. WORTHNIG, J. GEFFNER, *Prelucrarea datelor experimentale*. Edit. tehnică, București, 1959.
7. I. POPESCU, BIT-ISCIR, *4*, p. 234–239 (1972).
8. I. POPESCU, Construcția de mașini, **29**, *1*, p. 50–57 (1977).

RUGOZITATEA LA SPAȚIILE AXIALE CU DESCHIDERI REDUSE

de I. COLUMBEANU
AL. D. STAN

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În multe cazuri practice sînt realizate etanșări axiale care au scopul de a reduce debitul de fluid scurs prin aceste etanșări. Probabil că aproape toate etanșările axiale au suprafețele de etanșare rugoase ceea ce impune studiul acestora și stabilirea influenței gradului de rugozitate asupra elementelor hidraulice ale etanșărilor.
În lucrare s-a stabilit că la mărirea gradului de rugozitate al suprafețelor de etanșare crește, pe de o parte, pierderea de presiune din sistem și se reduce, pe altă parte, debitul de fluid scurs.

1. INTRODUCERE

Practic, sînt multe situații în care se găsesc etanșări axiale formate din două piese cilindrice printre care se scurge fluidul.

O problemă interesantă este aceea a considera că etanșarea axială prezintă o anumită rugozitate care se poate forma în timpul exploatării, sau a provenit din construcția acelor piese. Scurgerea fluidului printr-o etanșare axială poate fi asimilată cu mișcarea unui fluid viscos printr-un spațiu inelar format de cilindrii cu razele R_1 și R_2 (fig. 1). Pe suprafețele cilindrice cu aceste raze se presupune că există o rugozitate absolută $h(x)$, pe cilindrul cu raza R_1 și $g(x)$ pe cilindrul exterior. De asemenea, se admite că nu este precizată geometria rugozităților formate pe cele două suprafețe datorită complexității acestora.

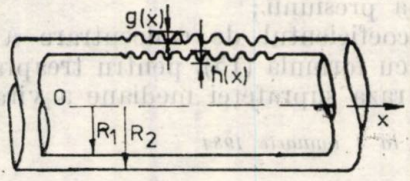


Fig. 1

2. ASPECTUL MATEMATIC AL PROBLEMEI

Scurgerea fluidului vîscos printr-un spațiu inelar cu pereții ficși a fost analizată în mai multe lucrări [5, 8]. Pentru o scurgere laminară, profilul vitezei este dat de relația

$$v_i = \frac{\Delta p}{2\mu l}\left[R_2^2 - r^2 + (R_2^2 - R_1^2)\,\frac{\ln\dfrac{r}{R_2}}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\right], \tag{1}$$

Δp este căderea de presiune care se exercită pe lungimea spațiului inelar l, μ fiind viscozitatea dinamică a fluidului. Dacă se folosește aproximarea

$$\ln\,(1 + x) \approx x \tag{2}$$

în relația anterioară, aceasta poate fi pusă sub forma

$$v_i = \frac{\Delta p}{2\mu l}\,[r(R_1 + R_2) - r^2 - R_1 R_2]. \tag{3}$$

Se constată că deși aproximativă această relație, viteza fluidului satisface condițiile la limită ca și soluția exactă. Deoarece în ambele formule (1) și (3) $v_i = 0$ pentru $r = R_1$ și $r = R_2$.

Dacă se trasează profilul exact al vitezei în funcție de rază dat de relația (1) și acela aproximativ obținut cu ajutorul (3) nu există o diferență prea mare așa cum se observă din figura 2, unde se redă $v_i \frac{2\mu l}{\Delta p \cdot R_2^2}$ în funcție de raportul r/R_2 pentru $k = \frac{R_1}{R_2} = 0{,}25$ și $0{,}60$.

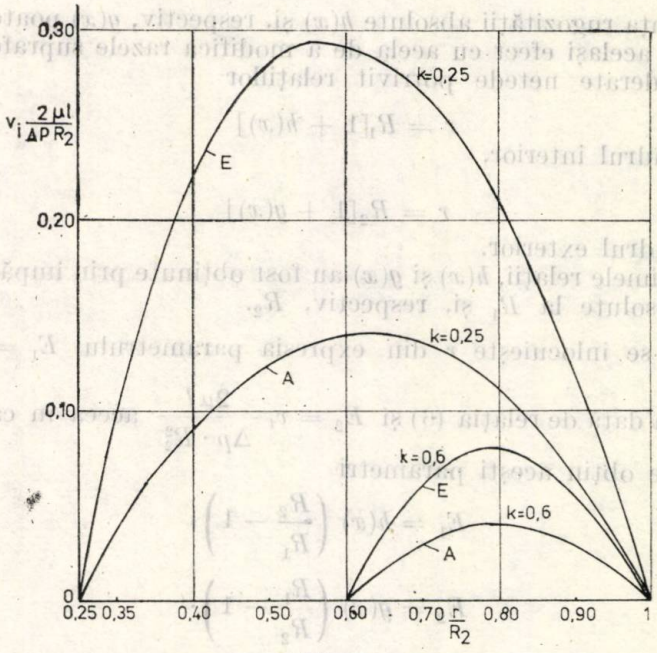


Fig. 2

În acest grafic prin valoarea exactă, curbele E, s-a redat parametrul

$$v_i \frac{2\mu l}{\Delta p\ R_2^2} = 1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - (1 - k^2)\frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln k}, \tag{4}$$

iar prin valoarea aproximativă, curbele A, s-a notat același parametru obținut din formula aproximativă (3)

$$v_i \frac{2\mu l}{\Delta p \cdot R_2^2} = \frac{r}{R_2}(1 + k) - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - k. \tag{5}$$

Diferența dintre valoarea exactă și aceea aproximativă a parametrului $v_i \dfrac{2\mu l}{\Delta p \cdot R_2^2}$ este mai mare în jurul raportului $\dfrac{r}{R_2} = 0{,}5$ pentru $k = 0{,}25$ și 0,8 pentru $k = 0{,}6$, iar la capetele intervalului de variație ale acestui raport pentru cele două mărimi considerate pentru k, profilele de viteză coincid.

În practica etanșărilor axiale raportul $\dfrac{R_1}{R_2}$ de obicei este apropiat de unitate, ceea ce înseamnă că aproximația folosită nu introduce erori însemnate prin alegerea profilului aproximativ al vitezei dat de relația (3) în locul aceluia exact calculat cu (1).

3. ETANȘĂRI AXIALE CU RUGOZITATE ÎNSEMNATĂ

Prezența rugozității absolute $h(x)$ și, respectiv, $g(x)$ poate fi considerată că are același efect cu acela de a modifica razele suprafețelor cilindrice considerate netede potrivit relațiilor

$$r = R_1[1 + h(x)] \tag{6}$$

pentru cilindrul interior,
și

$$r = R_2[1 + g(x)] \tag{7}$$

pentru cilindrul exterior.

În ultimele relații, $h(x)$ și $g(x)$ au fost obținute prin împărțirea rugozităților absolute la R_1 și, respectiv, R_2.

Dacă se înlocuiește r din expresia parametrului $E_1 = v_i \dfrac{2\mu l}{\Delta p \cdot R_1^2}$ cu valoarea dată de relația (6) și $E_2 = v_i \dfrac{2\mu l}{\Delta p \cdot R_2^2}$ aceea în care se utilizează (7) se obțin acești parametri

$$E_1 = h(x)\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right), \tag{8}$$

$$E_2 = g(x)\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right). \tag{9}$$

La obținerea lui E_1 și E_2 s-a admis că $h^2(x)$ și $g^2(x)$ sînt neglijabile,

$$h^2(x) = g^2(x) = 0. \tag{10}$$

Ecuațiile de mișcare proiectate pe axele Or și Oz, pentru o scurgere laminară și permanentă a fluidului, au formele

$$\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial r}v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial r}v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{12}$$

ρ este densitatea fluidului, iar ν viscozitatea cinematică.

Se pot introduce variabilele adimensionale

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R} \tag{13}$$

și

$$\bar{u} = \frac{u}{U_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U_0^2}, \tag{14}$$

unde U_0 este o viteză de referință pentru viteza u, iar R are pe rînd valoarea R_1 și, respectiv, R_2 după cum se utilizează ca lungime caracteristică una din cele două raze.

Introducînd variabilele adimensionale, ecuațiile de mișcare se scriu sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial r} v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial r} v = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right). \tag{16}$$

Pentru simplificarea scrierii, s-au omis barele și s-a notat prin Re numărul lui Reynolds definit cu viteza U_0 și lungimea R.

Dacă se elimină presiunea între ecuațiile de mișcare se găsește relația

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{17}$$

Se poate introduce funcția ψ definită prin relațiile

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{18}$$

Înlocuirea componentelor u și v în ecuația (17) conduce la obținerea relației

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D^2\right)\psi = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D^2\right)^2 \psi, \tag{19}$$

unde s-a notat

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}.$$

Utilizarea funcției ψ este posibilă deoarece aceasta satisface ecuația de continuitate, care are pentru un fluid incompresibil forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \tag{20}$$

ecuație ce a fost utilizată și pentru deducerea relației (17). Condițiile la limită ale acestei probleme sînt

— pentru cilindrul interior:

$$r = R_1, \quad u = 0,$$
$$r = R_1, \quad v = E_1, \tag{21}$$

— pentru cilindrul exterior:

$$r = R_2, \quad u = 0,$$
$$r = R_2, \quad v = E_2, \tag{22}$$

E_1 și E_2 fiind date de relațiile (8) și (9).

Avînd în vedere forma adimensională a variabilelor folosite, condițiile la limită devin, pentru cilindrul interior,

$$r = 1, \quad u = 0,$$
$$r = 1, \quad v = -\frac{E_1}{2} Re \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{23}$$

iar pentru cilindrul exterior

$$r = 1, \quad u = 0,$$
$$r = 1, \quad v = -\frac{E_2}{2} Re \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{24}$$

Numerele lui Reynolds care intervin în aceste condiții limită sînt diferite deoarece pentru cilindrul interior s-a utilizat ca lungime caracteristică R_1, iar pentru acela exterior, R_2.

Se poate introduce funcția $\Phi(r, k)$ ca transformata Fourier a funcției $\psi(r, x)$ în raport cu variabila x și parametrul de integrare k [2, 7],

$$\Phi(r, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \psi(r, x) \, dx \tag{25}$$

și funcția $\sigma(k)$ ca transformata Fourier a lui $h(x)$ cu ajutorul aceluiași parametru.

$$\sigma(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{ikx} h(x) \, dx. \tag{26}$$

Revenind la ecuația (19), se consideră situația unui număr a lui Reynolds mic, ceea ce face ca membrul stîng al acestei ecuații să se neglijeze. Această aproximație a fost adoptată și în alte lucrări [2, 3, 9].

Dacă se aplică transformata Fourier ecuației simplificate se găsește

$$(L^2 - k^2)^2\Phi = 0, \tag{27}$$

unde s-a utilizat notația

$$L^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Tot prin transformata Fourier, condițiile limită aferente cilindrului interior se scriu

$$\Phi(r, k) + r\frac{\partial\Phi(r, k)}{\partial r} = 0,$$

$$\mathrm{i}k\,\Phi(r, k) = -\frac{R_2 - R_1}{2R_1} Re\frac{\partial p}{\partial x}\,\sigma(k). \tag{28}$$

Pentru cilindrul exterior cea de a doua condiție are forma

$$\mathrm{i}k\,\Phi(r, k) = -\frac{R_1 - R_2}{2R_2} Re\frac{\partial p}{\partial x}\,\varepsilon(k). \tag{29}$$

Diferența dintre termenul care înmulțește parametrul $\sigma(k)$ și, respectiv, $\varepsilon(k)$ constă în aceea că E_1 și E_2 au formule distincte. $\varepsilon(k)$ este transformata Fourier a lui $g(x)$,

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,g(x)\,dx. \tag{30}$$

Soluția ecuației (27) se alege asemănătoare cu aceea propusă în lucrările [2, 9].

$$\Phi(r, k) = AI_1(kr) + BrI_0(kr), \tag{31}$$

A și B fiind constante ce se determină utilizînd condițiile limită (28) sau (29) după cum problema este aplicată pentru cilindrul interior sau exterior.

Cu I_0 și I_1 s-au notat funcțiile Bessel modificate de specia întîi, ordinul zero și, respectiv, unu.

Rezolvînd sistemul format de condițiile limită pentru cilindrul interior se găsesc constantele

$$A = C_1\frac{\sigma(k)}{\mathrm{i}k}\cdot\frac{2I_0(k) + kI_1(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)I_1(k)},$$

$$B = -C_1\frac{\sigma(k)}{\mathrm{i}k}\cdot\frac{kI_0(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)I_1(k)}. \tag{32}$$

În aceste notații s-a utilizat notația $C_1 = \frac{R_2 - R_1}{2R_1}\cdot Re\frac{\partial p}{\partial x}$.

Pentru cilindrul exterior constanta C_1 va fi egală cu $\frac{R_1 - R_2}{2R_2} Re \frac{\partial p}{\partial x}$, iar raportul $\frac{\sigma(k)}{ik}$ se înlocuiește cu $\frac{\varepsilon(k)}{ik}$.

Funcția $\Phi(r, k)$ are deci forma

$$\Phi(r, k) = C_1 \frac{\sigma(k)}{ik} \cdot \frac{[2I_0(k) + k_1 I_1(k)]I_1(kr) - krI_0(k)I_0(kr)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)I_1(k)}. \tag{33}$$

Funcția $\psi(r, x)$ se obține cu formula

$$\psi(r, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \Phi(r, k) \, dk, \tag{34}$$

iar $h(x)$ și $g(x)$ cu relațiile

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \sigma(k) \, dk, \tag{35}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \varepsilon(k) \, dk. \tag{36}$$

În cele ce urmează vom căuta să arătăm în ce sens influențează prezența rugozității elementele mișcării.

Datorită simetriei calculelor față de cei doi cilindrii care formează etanșarea axială, în cele ce urmează se prezintă calculul pentru cilindrul interior.

Un element important al mișcării este căderea de presiune din sistemul de etanșare. Punctul de plecare pentru determinarea căderii de presiune îl constituie efortul de forfecare tangențial τ [4, 6],

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{37}$$

μ este viscozitatea dinamică a fluidului. Efortul de forfecare se poate scrie și sub formă adimensională dacă se utilizează relațiile (13) și (14), iar pentru normalizarea lui τ s-a împărțit acesta la ρU_0^2.

Pe peretele tubului interior ($r = 1$) efortul de forfecare va avea mărimea

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{r=1}. \tag{38}$$

Avînd în vedere expresia funcției $\Phi(r, k)$, se găsește

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{\partial^2 \Phi(r, k)}{\partial r^2} \, dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, k)}{\partial r} \, dk -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{\Phi(r, k)}{r^2} \, dk = - \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{k\sigma(k)}{i} \, dk. \tag{39}$$

În mod asemănător se găsește

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \, e^{-ikx} \, \Phi(r, k) \, dk. \tag{40}$$

Datorită acestor relații precum și condiției pe care o satisface funcția $\Phi(r, k)$, rezultă

$$\bar{\tau}_0 = -\frac{2C_1}{Re\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{k\sigma(k)}{i} \, dk. \tag{41}$$

Pentru cilindrul exterior, tot la $r = 1$, rezultă efortul de forfecare

$$\bar{\bar{\tau}}_0 = -\frac{2C_2}{Re\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{k\varepsilon(k)}{i} \, dk. \tag{42}$$

Factorii geometrici C_1/Re și C_2/Re sînt egali în valoare absolută deoarece în expresiile numerelor lui Reynolds intervin lungimile caracteristice R_1 și R_2.

Datorită acestei situații, dacă rugozitățile ar îndeplini relația $h(x) = g(x)$ s-ar realiza și egalitatea

$$\sigma(k) = \varepsilon(k), \tag{43}$$

ceea ce ar conduce și la eforturi de forfecare egale pe pereții celor două tuburi cilindrice.

Se poate considera ca prezența rugozității pe fiecare cilindru produce o creștere suplimentară de presiune dp, iar forța realizată pe elementul de fluid $\pi(R_2^2 - R_1^2)dp$ este egală cu aceea de forfecare pe peretele cilindric. Pentru cilindrul interior acesta din urmă are mărimea $2\pi R_1 \, \tau_i \, dx$, dx fiind lungimea pe care se calculează forța de frecare.

Dacă în egalitatea considerată se introduc variabilele adimensionale, rezultă pentru cilindrul interior

$$dp = \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \bar{\bar{\tau}}_0 \, dx, \tag{44}$$

iar pentru cilindrul exterior

$$dp = \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tau_0 \, dx. \tag{45}$$

Integrînd fiecare din cele două relații obținute pentru dp între $-\infty$ și $+\infty$, considerînd expresiile eforturilor de forfecare $\bar{\bar{\tau}}_0$ și $\bar{\tau}_0$ date de ecuațiile (40) și (41), rezultă pentru cilindrul interior

$$p(-x) - p(x) = -\frac{4C_1}{Re\sqrt{2\pi}} \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \, \sigma(k) \, dk, \tag{46}$$

iar pentru cilindrul exterior

$$p(-x) - p(x) = -\frac{4C_2}{Re\sqrt{2\pi}} \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ikx} - e^{-ikx})\, \varepsilon(k)\, dk. \quad (47)$$

Fiecare dintre cele două funcții $p(-x)$ și $p(x)$ pot fi dezvoltate în serie Taylor reținînd doar primii termeni ai dezvoltării.

De exemplu, această dezvoltare pentru prima funcție se scrie

$$p(-x) = p(0) - x\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \ldots, \quad (48)$$

$p(0)$ fiind valoarea presiunii în punctul de abscisă nulă. Scriind și pentru $p(x)$ o relație asemănătoare, rezultă

$$p(-x) - p(x) = -2x\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (49)$$

Membrul drept al celor două egalități (46) și (47) poate fi transformat avînd în vedere că $\sigma(k)$ și $\varepsilon(k)$ sînt transformatele Fourier ale mărimilor $h(x)$ și, respectiv, $g(x)$.

Din cauza acestei situații, se poate scrie imediat pentru cilindrul interior

$$2x\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{C_1}{Re} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} [h(-x) - h(x)], \quad (50)$$

iar pentru cilindrul exterior

$$2x\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{C_2}{Re} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} [g(-x) - g(x)]. \quad (51)$$

Relațiile obținute oferă posibilitatea calitativă de a constata influența rugozităților asupra căderii de presiune care se produce într-o etanșare axială.

Dacă s-ar cunoaște geometriile rugozităților este posibil și o determinare cantitativă a influenței rugozității asupra căderii de presiune în etanșarea axială [1].

În cele ce urmează se prezintă un calcul comparativ asupra celor doi gradienți de presiune realizați suplimentar $\frac{\partial p}{\partial x}$ datorită prezenței rugozității care se vor nota $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_i$ pe cilindrul interior și $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e$ pe cilindrul exterior.

Considerînd un punct ζ situat între $-x$ și $+x$ se poate scrie egalitatea

$$h(\zeta) = h(-x) - h(x) \quad (52)$$

și dacă se definește în mod identic și $g(\zeta)$ în funcție de $g(-x)$ și $g(x)$ rezultă că se poate scrie imediat raportul celor doi gradienți de presiune

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_i}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e} = \frac{R_1}{R_2}\,\frac{h(\zeta)}{g(\zeta)}. \tag{53}$$

Rezultatul obținut arată că ordinul de mărime al celor doi gradienți de presiune realizat suplimentar datorită prezenței rugozității pereților este egal cu ordinul de mărime al razelor celor doi cilindri care formează etanșarea axială. Etanșările realizate practic au raportul razelor egal cu unitatea, ceea ce dovedește că și influența rugozităților pe cei doi cilindrii are același efect asupra pierderilor de presiune în etanșare.

În afara acestor concluzii, se mai constată din relațiile prezentate că într-o etanșare cu un anumit grad de rugozitate debitul scurs prin aceasta este mai redus decît într-o etanșare axială perfect netedă.

4. CONCLUZII

Într-o etanșare axială au loc pierderi de presiune și în funcție de mărimea acestora precum și geometria etanșării se poate determina debitul de fluid scurs prin etanșare.

În situația unor etanșări axiale cu un anumit grad de rugozitate se produc suplimentar pierderi de presiune față de situația unei etanșări cu fețele etanșante netede.

Practic, ordinul de mărime al gradienților de presiune realizați suplimentar este egal cu ordinul de mărime al raportului celor două raze care formează etanșarea.

Primită la redacție la 20 februarie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. CL. LOUIS, *Etude des écoulements d'eau dans les roches fissurées et de leurs influences sur la stabilité des massifs rocheux*, E.D.F. Buletin de la direction des études et recherches. Série A, Nucléaire, hydraulique, termique *3*(1968).
2. E O'NEILL, *The resistance to steady paralell viscous flows produced by small-scale bondary irregularities*, Chem. Eng. Science, **25**, 283–291 (1970).
3. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Mișcarea printr-un tub cu pereți permeabili*, St. cerc. mec. apl., **38**, *1*, p. 29–39 (1979).
4. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor viscoase*, Edit. Academiei R.S. România, 129–132, 1967.
5. W. M. ROHSENHOW, J. M. HARTNETT, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw Hill – Book Comp. Inc. New York, Toronto, London, 6(64)–7(72), 1973.
6. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book, Comp. Inc. New York, London, 517–518, 1960.
7. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 23–29, 1951.
8. AL. D. STAN, *Curgerea fluidelor prin spații inelare*, St. cerc. mec. apl., **38**, *5*, 637–648 (1979.)
9. AL. D. STAN, *Mișcarea printr-un spațiu inelar permeabil*, St. cerc. mec. apl., **39**, *3*, 371–382 (1980).

ASUPRA ECUAȚIEI CONSTITUTIVE A FLUIDELOR SIMPLE ÎN CADRUL MIȘCĂRILOR VÎSCOMETRICE

de ALEXANDRU FITI

Universitatea București

În lucrare se prezintă un mod de reducere a ecuației constitutive a fluidelor simple în cadrul mișcărilor vîscometrice prin care funcțiile vîscometrice sînt puse în evidență direct prin aplicarea teoremelor lui C.C. Wang.

1. INTRODUCERE

În lucrările lui W. Noll privind comportamentul fluidelor simple în cadrul mișcărilor vîscometrice, problema determinării ecuației constitutive este redusă la determinarea a trei funcții scalare de variabilă scalară pozitivă, numite funcții vîscometrice. În lucrare se prezintă un alt mod de reducere a ecuației constitutive, în care funcțiile vîscometrice sînt puse în evidență direct prin aplicarea teoremelor de reprezentare ale lui C.C. Wang.

2. REDUCEREA ECUAȚIEI CONSTITUTIVE: FUNCȚIILE VÎSCOMETRICE

În cele ce urmează vom nota cu $\mathbf{T}$ tensorul tensiune Cauchy, cu $\mathbf{C}_t^t(s)$ istoria tensorului Cauchy-Green relativ, la momentul $t - s$ și cu $\mathbf{F}_t(\tau)$ istoria gradientului deformației relative la momentul τ.

În cadrul mișcărilor cu istoria constantă a deformației relative (vezi [1]), definite de acei gradienți ai deformației relative pentru care există $\mathbf{Q}(t)$ tensor ortogonal pentru orice t din R și există $\mathbf{M}$ un tensor constant, astfel încît $\mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\, e^{2\mathbf{M}}$, problema se reduce la determinarea următoarei ecuații constitutive:

$$\mathbf{T}(t) = -p\,\mathbf{1} + \mathfrak{g}(\mathbf{M}_t),$$

unde $p\mathbf{1}$ este o parte sferică nedeterminată de mișcare, $\mathbf{M}_t = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$ și $\mathfrak{g}$ o funcție tensorială izotropă.

Folosind izotropia lui $\mathfrak{g}$ și descompunerea $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{W}$ cu $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_t^T)$ și $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t^T)$ vom utiliza în continuare următoarele teoreme, cazuri particulare ale teoremelor generale de reprezentare ale lui C.C. Wang:

Teorema 1. Pentru un spațiu tridimensional, o reprezentare completă

și ireductibilă pentru orice funcție scalară izotropă $f(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ este dată de

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{W}) = F(I(\mathbf{A}, \mathbf{W})),$$

unde $I(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ reprezintă mulțimea tuturor invarianților din tabelele de mai jos pentru una sau două variabile pînă la o permutare în argumentul $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$.

Tabele de invarianți

Variabile	Invarianți
$\mathbf{A}$	$\operatorname{tr}\mathbf{A}$, $\operatorname{tr}\mathbf{A}^2$, $\operatorname{tr}\mathbf{A}^3$
$\mathbf{W}$	$\operatorname{tr}\mathbf{W}^2$
$\mathbf{A}, \mathbf{W}$	$\operatorname{tr}\mathbf{AW}^2$, $\operatorname{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{W}^2$, $\operatorname{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{W}^2\mathbf{AW}$

Tabele de generatori

Variabile	Generatori
Nici una	$\mathbf{1}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}, \mathbf{A}^2$
$\mathbf{W}$	$\mathbf{W}^2$
$\mathbf{A}, \mathbf{W}$	$\mathbf{AW}-\mathbf{WA}$, $\mathbf{WAW}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{W}-\mathbf{W}\mathbf{A}^2$, $\mathbf{WA}^2\mathbf{W}$, $\mathbf{WAW}^2-\mathbf{W}^2\mathbf{AW}$

Teorema 2. Pentru un spațiu tridimensional o reprezentare completă și ireductibilă pentru orice funcție tensorială, izotropă, simetrică $\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ este dată de

$$\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{N} g^i(\mathbf{A}, \mathbf{W}) g_i(\mathbf{A}, \mathbf{W}),$$

unde $g^1, \ldots, g^N$ sînt funcții scalare izotrope, iar $\{g_1, \ldots, g_N\}$ este o mulțime de generatori formată din toți generatorii din tabelul precedent în toate combinațiile obținute pentru niciuna, una, sau două variabile pînă la o permutare în argumentul $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$.

Folosind aceste teoreme, avem:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{M}_t) = \mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{W}) = g'\mathbf{1} + g^2\mathbf{A} + g^3\mathbf{A}^2 + g^4\mathbf{W}^2 + g^5(\mathbf{AW}-\mathbf{WA}) + \\ + g^6(\mathbf{WAW}) + g^7(\mathbf{A}^2\mathbf{W}-\mathbf{WA}^2) + g^8\mathbf{WA}^2\mathbf{W} + \\ + g^9(\mathbf{WAW}^2-\mathbf{W}^2\mathbf{AW}),\end{aligned}$$

unde

$$g^i = g^i(\operatorname{tr}\mathbf{A}, \operatorname{tr}\mathbf{A}^2, \operatorname{tr}\mathbf{A}^3, \operatorname{tr}\mathbf{W}^2, \operatorname{tr}\mathbf{AW}^2, \operatorname{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{W}^2, \operatorname{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{W}^2\mathbf{AW}).$$

În cazul mișcărilor vîscometrice, deci cînd $\mathbf{M}^2 = 0$, folosim

Teorema 3 (vezi [3] p. 131): Dacă $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$ atunci există o bază ortonormată în care

$$[\mathbf{M}] = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Obținem astfel:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_t^T), \quad \mathbf{A}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{M}_t \mathbf{M}_t^T + \mathbf{M}_t^T \mathbf{M}_t),$$

$$\mathbf{AW} - \mathbf{WA} = 2(\mathbf{M}_t^T \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t \mathbf{M}_t^T), \quad \mathbf{A}^2\mathbf{W} - \mathbf{WA}^2 = 0,$$

$$\mathbf{WAW} = \varkappa^2(\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_t^T), \quad \mathbf{WA}^2\mathbf{W} = -\varkappa^2(\mathbf{M}_t^T \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t \mathbf{M}_t^T),$$

$$\mathbf{WAW}^2 - \mathbf{W}^2\mathbf{AW} = \varkappa^2(\mathbf{M}_t^T \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t \mathbf{M}_t^T),$$

$$\text{tr } \mathbf{A} = 0 \quad \text{tr } \mathbf{A}^2 = 2\varkappa^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}^3 = 0, \quad \text{tr } \mathbf{W}^2 = 0,$$

$$\text{tr } \mathbf{AW}^2 = 0, \quad \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{W}^2 = -2\varkappa^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{W}^2\mathbf{AW} = 0.$$

Deci $g^i = g^i(\varkappa^2, \varkappa^4)$ și

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = g'\mathbf{1} + \frac{\tau\varkappa}{\varkappa}(\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_t^T) + \frac{\sigma_1(\varkappa)}{\varkappa^2}\mathbf{M}_t^T \mathbf{M}_t + \frac{\sigma^2(\varkappa)}{\varkappa^2}\mathbf{M}_t \mathbf{M}_t^T,$$

unde

$$\tau(\varkappa) = \varkappa\left(\frac{1}{2}g^2 + \varkappa^2 g^5\right),$$

$$\sigma_1(\varkappa) = \varkappa^2\left(\frac{1}{4}g^3 - \frac{1}{4}g^4 + 2g^5 - \varkappa^2 g^8 + \varkappa^2 g^9\right),$$

$$\sigma_2(\varkappa) = \varkappa^2\left(\frac{1}{9}g^3 - \frac{1}{4}g^4 - 2g^5 - \varkappa^2 g^8 - \varkappa^2 g^9\right),$$

Funcțiile considerate mai sus au sens pentru orice $\varkappa$ real deoarece în argumentele funcțiilor g^i, $\varkappa$ apare numai la puteri pare și avem:

$$\tau(\varkappa) = -\tau(-\varkappa),$$

$$\sigma_i(\varkappa) = \sigma_i(-\varkappa) \quad i = 1, 2.$$

Funcțiile vîscometrice sînt deci bine determinate de restricția lor la mulțimea numerelor reale pozitive.

Primită la redacție la 10 iulie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. W. NOLL, *Motions with Constant Stretch History*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **11**, 97–105 (1962).
2. WANG C. C., *A Newo Representation Theorem for Isotropic Functions: An Answer to Professor G.F. Smith's Criticism of my Papers on Representation for Isotropic Function. Part. 1. Scalar — Valued Isotropic Function. Part. 2. Vector — Valued Isotropic Functions, Symmetric Tensor — Valued Isotropic Functions, and Skew — Symmetric Tensor — Valued Isotropic Function*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **36**, 166–224.
3. W. R. SCHOWALTER, *Mechanics of Nonnewtonian fluids*, Perg. Press, 1978.

CHRIS MORGAN, *ROBOȚII — PLANIFICARE ȘI IMPLEMENTARE* (Robots — Planning and Implementation, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, Springer—Verlag, 1984, XI, 195 p., 57 fig.

Cartea lui Chris Morgan, inginer cu dublă specializare, în electronică și mecanică, tratează una dintre cele mai actuale probleme ale industriei moderne — roboții. Autorul are o bogată experiență în acest domeniu, el însuși fiind autor a 14 roboți cu o gamă largă de aplicații.

Caracteristica esențială este subliniată concis de Morgan, sub forma unui motto: „Robotul se distinge de alte tipuri de automate, prin faptul că el poate fi programat și reprogramat pentru a se acomoda la diferitele cerințe ale producției în felul și la momentul apariției lor".

Publicată în 1984 de către editura IFS (Publications) Ltd în Marea Britanie, cu sucursale la Berlin, Heidelberg, New York și Tokyo, cartea se adresează atît specialiștilor — care își pot clarifica și îmbogăți cunoștințele deja acumulate, absolvenților politehnicii — care acum își încep specializarea în acest domeniu atractiv, cît și specialiștilor ingineri și tehnicieni, care doresc o extindere a cunoștințelor inginerești, putînd deveni astfel buni roboticieni cu cunoștințe largi în mai multe domenii. Cartea poate folosi deci atît pentru a învăța, avînd un caracter didactic, dar și profesioniștii o vor aprecia ca utilă — datorită exigenței și nivelului înalt profesional la care este concepută.

Într-o scurtă introducere, autorul trece în revistă tipurile de roboți existenți la ora actuală, expunînd trei tipuri posibile de clasificare a lor: prima, după unealta folosită de robot, a doua după munca îndeplinită, de robot, iar a treia — numai pentru roboții de montaj.

Volumul de 194 de pagini este împărțit în trei părți. Primele două părți tratează teoria roboților, iar a treia are un caracter aplicativ concret.

Partea întîi se numește „Definirea cerințelor pentru un sistem-robot și alegerea corectă a robotului necesar". În această parte, autorul prezintă etapele de analiză, planificare și prognoză asociate dezvoltării roboților.

Partea a doua se numește „Domenii care impun o atenție specială" și expune pe larg problemele cele mai dificile ale fiabilității roboților, problemele calificării personalului uman, precum și aspecte financiare și comerciale.

Partea a treia se numește „Studii de cazuri" și ilustrează cinci cazuri concrete de aplicații ale roboticii în diferite țări ale Europei Occidentale.

Partea întîi este constituită din trei capitole. Primul, denumit „Definirea cerințelor pentru un robot" și conținînd trei paragrafe, tratează mai întîi condițiile necesare de îndeplinit de către un robot dat, în funcție de obiectivele unei întreprinderi. Obiectivele pot fi: financiare, de desfacere sau de producție. În continuare, autorul relevă interdependența dintre dezvoltarea pieței de desfacere a produselor finite și caracteristicile de bază ale roboților, dînd o clasificare a tipurilor de producție pe baza eficienței. În finalul capitolului a I se face un studiu de fezabilitate a producției în diverse condiții posibile.

Capitolul II se ocupă de problema alegerii celui mai adecvat tip de robot, în funcție de aplicația necesară la locul și momentul prestabilit de producție. Autorul analizează un număr de 23 de parametri caracteristici ai complexului robot-produs-spațiu de funcționare, care, în final, determină un număr foarte redus de roboți pasibili să îndeplinească acțiunile impuse. Numărul acestora poate fi în continuare restrîns prin teste.

Capitolul III tratează problema specificațiilor roboților, ordonarea sistemelor de roboți, instalarea lor și activitățile post-instalatorii.

Partea a doua este organizată tot pe trei capitole, numerotate în continuare. Capitolul IV analizează o problemă vitală a roboților — siguranța în funcționare și factorii fizici, tehnici umani care determină sau influențează fiabilitatea roboților.

Capitolul V analizează calificarea forței de muncă umane în vederea mînuirii roboților. Problema calificării este tratată ca făcînd parte din organizarea socială a muncii în întreprinderi.

Capitolul VI expune problemele financiare legate de investițiile necesare pentru instalarea și extinderea folosirii roboților în întreprinderi și industrii.

Partea a treia demonstrează aplicarea concretă a problemelor teoretice analizate în amănunțime în primele două părți ale lucrării, pe cinci cazuri din Italia — firma Aspera SPA,

Franța — firma Huard UCF SCM, Marea Britanie — firma Imhof Bedco Special Products Ltd. Suedia — firma Ramnas Bruk AB și Norvegia — firma Jonas Øglaend AS.

Lucrarea este bogat ilustrată atît cu scheme și grafice, cît și cu fotografii ale roboților în funcțiune.

În încheiere este expusă comparativ rezolvarea diferitelor probleme legate de introducerea în producție a roboților și liniilor automatizate cu roboți — de către cele cinci firme concret analizate.

În anexele A, B, C sînt prezentate descrierea interfețelor, un model de contract de cercetare aplicativă încheiat între un institut de roboți și o industrie, precum și aprecierea financiară globală asupra studiului de cazuri concrete prezentate.

Cartea este prevăzută cu un index alfabetic de noțiuni.

V.G. Lașcu

H. J. WARNECKE, W. DUTSCHKE, *Tehnica de măsurare în producție* (*Fertigungsmesstechnik*), Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, 818 p., 972 fig., 144 tab.

Lucrarea este un manual destinat industriei și cercetării. Materialul tratat este împărțit în 13 capitole, iar în anexă sînt date o bibliografie bogată și un index al normelor DIN și recomandărilor VDI cuprinzînd lucrările și normele citate pe parcursul celor 13 capitole. Anexa mai cuprinde un index al normelor și recomandărilor care nu au fost citate în text dar care se referă la domeniul tratat la diferitele capitole, precum și un index al termenilor de specialitate care apar în text.

Acest mod de prezentare al materialului este foarte util deoarece avînd în vedere caracterul de manual, lucrarea dă cititorului doar o informație și noțiunile generale asupra problemei de tehnica măsurătorii căutate, cunoștințele aprofundate urmînd a fi obținute din lucrările de specialitate citate în textul manualului.

Primul capitol se ocupă de bazele tehnicii de calcul, noțiuni și unități de măsură. În capitolul 2 sînt tratate metode statistice de evaluare, iar în capitolul 3 bazele tehnicii de măsurare geometrică. Capitolul 4 tratează despre mărimi de verificat (dimensiuni și toleranțe) ale tehnologiilor de producție, analizîndu-se atît mărimile geometrice precum și mărimi mecanice, electrice, temperatura, puterea luminoasă și ale radiației ionizante. În capitolul 6 se trec în revistă calibrele și instrumentele de măsură, iar în capitolul 7 procedee și instalații utilizate în camera de măsură ale întreprinderilor productive. În continuare, în capitolul 8 sînt prezentate procedee și aparate electronice, analoge și digitale, pentru verificarea unor mărimi negeometrice (tehnică de măsurare de proces) iar în capitolul 9 procedee și aparate pentru controlul mecanic-tehnologic al materialelor. Mai departe, în capitolul 10 se tratează despre procedee de control nedistructive și cu ajutorul microscopiei pentru metale și materiale plastice. În următoarele 3 capitole se expune organizarea sistemului de control tehnic în cadrul asigurării calității, probleme juridice privind răspunderea unui institut care execută expertize și al colaboratorilor săi și pregătirea profesională în controlul de calitate.

G. Winter

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 1.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DAN CONSTANTINESCU, **Efectele structurale ale curgerii lente a betonului**, 1985, 208 p., 19,50 lei.

GH. MĂRMUREANU, **Rezistența posteritică**, 1985, 302 p., 31 lei.

ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor compresibile**, 1984, 886 p., 68 lei.

IOAN ANTON, **Cavitația**, Vol. I, 1984, 338 p., 46 lei.

C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, **Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor**, 1984, 446 p., 47 lei.

IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, Vol. II, 1984, 244 p., 22 lei.

A. PAVEL, **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983, 310 p., 26 lei.

SERGIU T. CHIRIACESCU, **Stabilitatea în dinamica așchierii metalelor**, 1984, 188 p., 16,50lei.

D. F. SĂMĂRESCU, **Difuzia cimpului electromagnetic și aplicații**, 1983, 238 p., 20 lei.

DRAGOȘ CIOCLOV, **Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune și deformație**, 1983, 354 p., 32 lei.

V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.

IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul** vol. I, 1983, 198 p., 18 lei.

ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA (sub redacția), **Cutremurul de pămînt din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p., 10 lei.

ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**,1982, 253 p., 20 lei.

GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurată și informatic**, 1982, 192 p., 14,50 lei.

VOICU DOLOCAN, **Fizica joncțiunilor cu semiconductoare**, 1982, 320 p., 30 lei.

A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 39 lei.

DAN TEODORESCU, **Modele stohastice**, 1982, 246 p., 20 lei.

ELIE CARFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 630 p., 44 lei.

VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.

GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România : Matematica, Mecanica, Astronomia**, 1981, 618 p., 9 lei.

LIVIU DUMITRAȘCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.

TITUS PETRILĂ, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței peretilor nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.

ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.

MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.

DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**, 1981, 327 p., 26 lei.

HRISTACHE POPESCU, VETURIA CHIROIU, **Calculul structurilor optimale**, 1981, 239 p., 20,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

RM—ISSN 0039—4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 4, 1985, P. 321—410

I.P. Informația c. 1246

Lei 55. —

§ 69 pour un abonnement annuel

F2557

5
TOMUL 44
sept.—oct.
1985

1985 APR 2 0

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. C. IACOB
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. Ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R.S. România se vor adresa : ROMPRESFILATELIA—sectorul export-import presă, P. O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 44, nr. 5 septembrie-octombrie 1985

SUMAR

STUDII

I. STROE, Asupra mişcării plane a vehiculului spaţial în prezenţa unui centru atractiv 413
VASILE IONESCU, ION TUTUNEA, ALEXANDRU TURTĂ, Influenţa frecării intermoleculare a particulelor fluide în mişcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul radial 420
I. SETEANU, M. ERHAN, O problemă bilocală la limită în studiul infiltraţiei plane permanente 439
V. F. POTERAŞU, N. MIHALACHE, Tensiuni şi deplasări în elementele plane elastice cu metoda elementelor de frontieră. I. Analiza statică 445
ELENA SOARE, FLOREA MINESCU, Aspecte ale curgerii inelare în canale capilare 465
WILHELM W.KECS, Determinarea imaginilor Laplace inverse ale unor funcţii hiperbolice 476
O.S. CREŢU, Sincronizarea liberă a poziţiilor elementelor intermediare ale variatoarelor cu tracţiune. 488

RECENZII 499

ASUPRA MIȘCĂRII PLANE A VEHICULULUI SPAȚIAL ÎN PREZENȚA UNUI CENTRU ATRACTIV

de I. STROE

Institutul Politehnic, București

În lucrare sînt prezentate cîteva aspecte ale mișcării unui vehicul spațial, considerat corp rigid, în prezența unui centru atractiv, vehiculul avînd o viteză unghiulară perpendiculară pe planul orbitei. Sînt analizate două cazuri particulare, cel al rotației rapide și cel al orientării unei axe a vehiculului spre centrul atractiv.

1. INTRODUCERE

Poziția centrului de masă O' al vechiculului spațial este precizată prin coordonatele polare r, ν, polul fiind centrul atractiv O. Mișcarea de rotație este caracterizată prin unghiul θ dintre zaza vectoare și o axă centrală principală a corpului situată în planul orbitei.

În primul caz analizat, cel al rotației rapide, se integrează ecuația traiectoriei pentru o relație particulară între momentele de inerție.

În al doilea caz, cel al orientării unei axe a vechiculului spre centrul atractiv, este considerată și influența unei forțe de tracțiune constantă orientată în permanență pe direcția ce unește centrul atractiv cu centrul vehiculului.

2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Mișcarea este studiată cu ajutorul ecuației cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi, pentru care sînt necesare expresiile energiei cinetice și energiei potențiale.

Dacă A, B sînt momentele de inerție principale față de ax din planul orbitei, iar C este momentul de inerție principal față de axa perpendiculară pe acel plan, energia cinetică este :

$$E = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + (r\dot{\nu})^2] + \frac{1}{2}C(\dot{\theta} + \dot{\nu})^2. \tag{2.1}$$

Așa cum rezultă din [1], potențialul gravitațional este dat de

$$V = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{2r^3}[A + B + C - 3A\cos^2\theta - 3B\sin^2\theta], \tag{2.2}$$

în care

$$\mu \approx f M_0, \tag{2.3}$$

f fiind constanta atracției gravitaționale, iar M_0 masa corespunzătoare centrului atractiv.

Deoarece sistemul este scleronom, ecuația Hamilton-Jacobi se scrie

$$H\left(q; \frac{\partial K}{\partial q}\right) = \alpha_1, \tag{2.4}$$

unde $q = (q_2, \ldots, q_n)$ reprezintă coordonatele; α_1 este constanta energiei, iar $H = E + V$.

Soluția ecuației (2.4) este (teorema lui Hamilton):

$$t - t_0 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_1}$$

$$-\beta_k = \frac{\partial K}{\partial \alpha_k}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \tag{2.5}$$

$$p_k = \frac{\partial K}{\partial q_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

În ecuațiile (2.5) α_k, β_k fiind constante, $p_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}$ este impulsul generalizat, iar $\mathscr{L} = E - V$ este funcția lui Lagrange.

2.1. CAZUL ROTAȚIEI RAPIDE

Se înlocuiesc funcțiile $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ din expresia energiei potențiale (2.2) cu valorile lor medii, corespunzătoare unei rotații complete în jurul centrului de masă al vehiculului:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}. \tag{2.1.1}$$

Potențialul gravitațional devine

$$V = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{2r^3}\left[C - \frac{A+B}{2}\right]. \tag{2.2'}$$

Considerînd coordonatele r, ν și $\Phi = \theta + \nu$, impulsurile generalizate se scriu:

$$p_r = m\dot{r}; \qquad p_\nu = mr^2\dot{\nu}, \quad p_\Phi = C\dot{\Phi}. \tag{2.1.2}$$

Înlocuind (2.1.2) în expresia enegiei cinetice (2.1), obținem

$$E = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\nu^2\right] + \frac{1}{2C}p_\Phi^2. \tag{2.1'}$$

Ecuația cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi se scrie

$$\frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2\right] + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial K}{\partial \Phi}\right)^2 = 2(\alpha_1 - V). \tag{2.1.3}$$

Cu (2.2') ecuația (2.1.3) devine

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{mr^2}\left(\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial K}{\partial \Phi}\right)^2\right] - \frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{2r^3}\left[C - \frac{A+B}{2}\right] = \alpha_1. \tag{2.1.3'}$$

Deoarece ν, Φ sînt coordonate ciclice, funcția K este de forma

$$K = \alpha_2 \nu + \alpha_3 \Phi + R(r). \tag{2.1.4}$$

Înlocuind (2.1.4) în (2.1.3′), se obține

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \sqrt{f(r)}, \tag{2.1.5}$$

cu

$$f(r) = 2m\alpha_1 - \frac{m\alpha_3^2}{C} + \frac{2\mu m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{\mu m}{r^3}\left[C - \frac{A+B}{2}\right]. \tag{2.1.6}$$

Relația (2.1.4) devine

$$K = \alpha_2 \nu + \alpha_3 \Phi + \int_{r_0}^{r} \sqrt{f(\xi)}\ \mathrm{d}\xi. \tag{2.1.4′}$$

Soluția ecuației (2.1.3′) este, conform relației (2.5)

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{m\mathrm{d}\xi}{\sqrt{f(\xi)}}, \quad \nu_0 = \nu - \alpha_2 \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2 \sqrt{f(\xi)}}, \quad \Phi_0 = \Phi - \frac{m}{C}\alpha_3 \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \tag{2.1.7}$$

Cu notația

$$\xi = \frac{1}{u} \tag{2.1.8}$$

funcția f din (2.1.6) se scrie

$$f(u) = \mu m\left[C - \frac{A+B}{2}\right]u^3 - \alpha_3^2 u^2 + 2\mu m^2 u - \frac{m\alpha_3^2}{C} + 2m\alpha_1. \tag{2.1.9}$$

Rădăcinile ecuației

$$f(u) = 0 \tag{2.1.10}$$

dau indicații asupra mișcării.

Dacă ecuația (2.1.10) are două rădăcini simple a, b și în momentul inițial $a<u<b$, atunci u rămîne între cele două rădăcini, deci orbita este mărginită.

Dacă $u = c$ este o rădăcină dublă a ecuției (2.1.10), atunci $u \to c$ (u tinde către c) cînd $t \to \infty$.

Din prima și a treia ecuație (2.1.7) rezultă

$$\frac{t - t_0}{m} = \frac{\Phi - \Phi_0}{\frac{m}{C}\alpha_3}, \tag{2.1.11}$$

de unde

$$\dot{\Phi} = \frac{\alpha_3}{C} = \text{const.} \tag{2.1.11'}$$

Din a doua ecuație (2.1.7) se obține

$$\frac{d\nu}{dt}\frac{dt}{d\xi} = \alpha_2 \frac{1}{\xi^2\sqrt{f(\xi)}}. \tag{2.1.12}$$

Folosind prima ecuație din (2.1.7), rezultă

$$m\xi^2\,\nu = \alpha_2 = \text{const.} \tag{2.1.13}$$

Așadar, în cazul rotației rapide, se păstrează legea ariilor ca și în cazul punctului material.

Folosind relația $\Phi = \theta + \nu$, din (2.1.11') și (2.1.13) rezultă

$$\dot{\theta} = \frac{\alpha_3}{C} - \frac{\alpha_2}{m\xi^2}. \tag{2.1.14}$$

Dacă momentele de inerție satisfac relația

$$C = \frac{A+B}{2}, \tag{2.1.15}$$

funcția (2.1.9) devine

$$f(u) = -\alpha_2^2 u^2 + 2\mu m^2 u + 2m\alpha_1 - \frac{m\alpha_3^2}{C}. \tag{2.1.9'}$$

Ecuația $f(u) = 0$ are rădăcini reale dacă

$$\Delta = \mu^2 m^4 + \alpha_2^2\left(2m\alpha_1 - \frac{m\alpha_3^2}{C}\right) \geqslant 0. \tag{2.1.16}$$

Dacă $\Delta = 0$, de unde rezultă

$$\alpha_3^2 = \frac{C(\mu^2 m^3 + 2\alpha_2^2\alpha_1)}{\alpha_2^2}, \tag{2.1.17}$$

ecuația $f(u) = 0$ are rădăcina dublă,

$$u_0 = \frac{\mu m^2}{\alpha_2^2}. \tag{2.1.18}$$

Rezultă că pentru constantele α_1, α_2, α_3 care satisfac relația (2.1.17), orbita tinde către orbita circulară cu raza

$$r_c = \frac{\alpha_2^2}{\mu m^2}. \tag{2.1.18'}$$

Forma simplă a funcției $f(u)$ permite o comparație cu cazul mișcării punctului material sub influența centrului atractiv. Făcînd în (2.1.9') $\alpha_2 = 0$, obținem funcția $f^0(u)$ corespunzătoare mișcării punctului material,

$$f^0(u) = -\alpha_2^2 u^2 + 2\mu m^2 u + 2m\alpha_1. \tag{2.1.9''}$$

Fie $u_1^0 < u_2^0$ soluțiile ecuației $f^0(u) = 0$, care dau semiaxa mare, respectiv mică a elipsei pe care se mișcă punctul material. Dacă $u_1 < u_2$ sînt soluțiile ecuației $f(u) = 0$, deci pentru cazul mișcării rigidului obținem, pe baza expresiilor $f(u)$ și $f^0(u)$,

$$u_1^0 < u_1 < u_2 < u_2^0, \tag{2.1.19}$$

de unde

$$r_1^0 > r_1 > r_2 > r_2^0. \tag{2.1.19'}$$

Așadar corpul se mișcă pe o orbită mărginită de cercuri cu raze mai mici decît în cazul mișcării punctului material.

Pentru cazul particular în care funcția $f(u)$ este dată de (2.1.9'), ecuația (a doua (2.1.7), care dă traiectoria centrului de masă, se integrează cu funcții elementare.

Trebuie calculată primitiva

$$I = \int \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{f(\xi)}} = -\int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = -\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}}, \tag{2.1.20}$$

u și ξ fiind mărimi legate prin relația (2.1.8), $\xi = \frac{1}{u}$, iar a, b, c se determină prin identificare cu relația (2.1.9').

Deoarece $a < 0$, $b^2 > 4ac$, $|2au + b| < (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}$, calculînd (2.1.20) și introducînd în a doua ecuație (2.1.7), se obține

$$\nu_0 = \nu - \frac{\alpha_2}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2au + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{2.1.21}$$

Comparînd relațiile (2.1.20), (2.1.9'), rezultă:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\alpha_2} = 1, \quad -\frac{2a}{b} = \frac{\alpha_2^2}{\mu m^2},$$

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{b} = \sqrt{1 + \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 m^3}\left(2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{C}\right)}. \tag{2.1.22}$$

Înlocuind în (2.1.21), obținem ecuația traiectoriei

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu m^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 m^3}\left(2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{C}\right)}\cos\left(\nu + \frac{\pi}{2} - \nu_0\right)} \equiv \frac{p}{1 + e\cos\left(\nu + \frac{\pi}{2} - \nu_0\right)}. \tag{2.1.23}$$

Rezultă că traiectoria este o conică avînd același parametru p ca în aproximația punctului material.

Dacă vom nota cu e_0 excentricitatea traiectoriei pentru cazul punctului material ($\alpha_3 = 0$), vom obține

$$\frac{e^2}{e_0^2} = 1 - \frac{\beta\gamma}{1+\beta}, \tag{2.1.24}$$

cu

$$\beta = 2\frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\mu^2 m^3}, \qquad \gamma = \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1 C} \tag{2.1.25}$$

2.2. CAZUL ORIENTĂRII SPRE CENTRUL ATRACTIV

Dacă în timpul mișcării axa corespunzătoare momentului de inerție C rămîne în permanență în prelungirea razei vectoare r,

$$\theta = 0, \qquad \dot{\theta} = 0, \tag{2.2.1}$$

iar expresiile energiei cinetice și funcției de forță devin :

$$E = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + (r\dot{\nu})^2] + \frac{1}{2}C\dot{\nu}^2, \tag{2.2.2}$$

$$U = \mu\frac{m}{r} + \frac{\mu}{2r^3}[B + C - 2A] + ma_r r. \tag{2.2.3}$$

Ultimul termen din (2.2.3) reprezintă funcția de forță corespunzătoare tracțiunii , a_r fiind accelerația reactivă.

Impulsurile generalizate sînt :

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\nu = (mr^2 + C)\dot{\nu}. \tag{2.2.4}$$

Procedînd ca în cazul rotației rapide, obținem ecuația cu derivate sparțiale Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{mr^2 + C}\left(\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2 - \frac{2\mu m}{r} - \frac{\mu}{r^3}[B + C - 2A] - 2ma_r r = 2\alpha_1. \tag{2.2.5}$$

Introducînd

$$K = \alpha_2 \nu + R(r), \tag{2.2.6}$$

obținem

$$\frac{dR}{dr} = \sqrt{f(r)}, \tag{2.2.7}$$

cu

$$f(r) = 2m^2 a_r r + 2m\alpha_1 + \frac{2\mu m^2}{r} - \frac{m\alpha_2^2}{mr^2 + C} + \frac{\mu m}{r^3}[B + C - 2A]. \tag{2.2.8}$$

Rezultă

$$K = \alpha_2 \nu + \int_{r_0}^{r} \sqrt{f(\xi)}\, d\xi, \tag{2.2.9}$$

iar soluția ecuației Hamilton-Jacobi se scrie

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{m d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}, \quad \nu_0 = \nu - \alpha_2 m \int_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{(m\xi^2 + C)\sqrt{f(\xi)}}. \tag{2.2.10}$$

Se pot face considerații asupra mișcării ca în cazul precedent, pe baza rădăcinilor ecuației $f(r) = 0$, discuția fiind mai complicată, deoarece rezultă o ecuație de gradul VI.

În [2], p. (323—327), sînt puse în evidență clase de traiectorii pentru cazul mișcării punctului material, cu tracțiune.

Din a doua ecuație (2.2.10).

$$\frac{d\nu}{dt}\frac{dt}{d\xi} = \alpha_2 m \frac{1}{(m\xi^2 + C)\sqrt{f(\xi)}}. \tag{2.2.11}$$

Folosind și prima ecuație (2.2.10), obținem

$$m\dot{\nu}\left(\xi^2 + \frac{C}{m}\right) = \alpha_2 = \text{const.} \tag{2.2.12}$$

Așadar, legea ariilor este valabilă pentru traiectoria descrisă de punctul aflat în prelungirea razei vectoare la distanță

$$\xi' = \sqrt{\xi^2 + \frac{C}{m}} \tag{2.2.13}$$

față de centrul atractiv.

Primită la redacție la 25 octombrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. D. BROUWER, G. M. CLEMENCE, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1961.
2. M. M. NIȚĂ, *Teoria zborului spațial*, Editura Academiei R. S. România, București, 1973.
3. L. A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*, London, 1964.

INFLUENȚA FRECĂRII INTERMOLECULARE A PARTICULELOR FLUIDE ÎN MIȘCAREA UNUI FLUID VÎSCOS ÎNTR-UN MEDIU POROS. CAZUL RADIAL

de IONESCU VASILE, TUTUNEA ION
Universitatea din Craiova
TURTĂ ALEXANDRU
Institutul de Cercetări Petrol și Gaze, Cîmpina.

Se studiază influența frcării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid într-un mediu poros asupra variației în timp și spațiu a temperaturii. În această lucrare este analizat în detaliu cazul radial, unidimensional, infinit, pentru a se putea găsi soluții exacte ale problemei la limită a fenomenului.
Rezultatele teoretice sînt aplicate la cîteva cazuri particulare cu elemente din practica extracției de petrol și se interpretează fizic rezultatele obținute. Lucrarea trebuie considerată ca o continuaree a lucrărilor (1) și (2), unde se analizează cazul liniar.

În lucrările [1] și [2] s-a determinat cîmpul de temperatură generat de frecarea intermoleculară a unui fluid vîscos în mediul poros liniar. În lucrarea de față se studiază aceeași problemă în cazul radial. Ipotezele de calcul, simplificările adoptate în studiu și principiile generale de modelare matematică a fenomenului sînt cele din lucrările citate : 1. Mișcarea este unidimensională, mediul poros și fluidul omogene ; 2. Nu se ține seama de variația vîscozității cu temperatura ; 3. Se neglijează pierderile de căldură în stratele adiacente ; 4. Caracteristicile termice ale fluidului și ale mediului poros nu depind de temperatură ; 5. Schimbul de căldură între diferitele faze în contact este insantaneu. Mișcarea radială aproximează mai fidel fenomenele ce apar frecvent în practica extracției de petrol decît cea liniară ; problema matematică diferă mult în cele două cazuri.

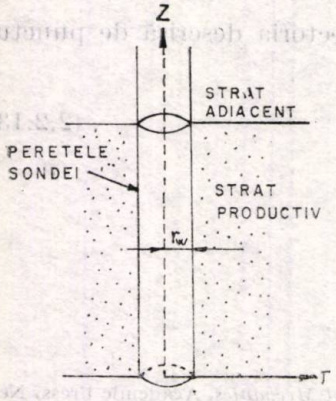


Fig. 1. — Schița zăcămîntului.

1. *Geometria și dinamica mișcării.* În figura 1 se prezintă o schiță a domeniului de mișcare în vecinătatea sondei de injecție. Zăcămîntul este presupus omogen și indefinit în spațiul cu trei dimensiuni raportate la un sistem de coordonate cilindrice (r, z). Variabila θ lipsește căci mișcarea este axial simetrică.

Prin sonda verticală cilindrică de rază r_w se introduce în zăcămînt un debit Q de fluid la o temperatură constantă T_i. Fluidul filtrează prin mediul poros în mod identic în toate planele ce trec prin axul sondei și în toate planele normale la axul sondei. Mișcarea va fi deci unidimensională în direcția r. Datorită frecării intermoleculare a fluidului se generează căldură, care se propagă în mediu prin conducție și prin convecție. Căldura care se generează după legea stabilită în [1] este singura sursă ce influențează temperatura. Deoarece nu se ține seama de variația vîscozității cu temperatura, rezultă că mișcarea va fi a unui fluid omogen într-un mediu omogen, problemă studiată în literatură. În aceste condiții trebuie determinată variația temperaturii în domeniul de mișcare.

Partea I. ASPECTUL TEORETIC AL PROBLEMEI. REZULTATE TEORETICE

În această primă parte a lucrării se studiază problema matematică la care conduce studiul mișcării, se dau soluții exacte și aproximative ale ei și se indică posibilitățile de aplicare ale rezultatelor obținute.

1. *Ecuația temperaturii.* Se pornește de la ecuația propagării căldurii prin conducție și prin convecție cu termen de generare din [3]

$$K\,\Delta T - \rho_a\, c_a\, \bar{V}\,\nabla T + q = [\Phi\,\rho_a\, c_a + (1-\Phi)\rho_m\, c_m]\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

care va fi scrisă în coordonate cilindrice. Folosind formulele de transformare a lui ΔT și ∇T [4], ecuația (1) devine

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \rho_a c_a v_r \frac{\partial T}{\partial r} + q = [\Phi\rho_a c_a + (1-\Phi)\rho_m c_m]\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Dacă în expresia precedentă se ține seama că viteza radială în mediu poros este $v_r = Q/(2\pi r\,\Phi^{2/3})$, ecuația (1) se scrie

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + (1 - \rho_a c_a\, Q/2\pi\, K\Phi^{2/3})\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{q}{K} = \frac{1}{K}[\Phi\rho_a c_a + (1-\Phi)\rho_m c_m]\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1'}$$

Urmează să se evalueze termenul de generare a căldurii din ecuația precedentă. În [1] s-a stabilit că

$$q = \frac{k}{\mu}(\text{grad } p)^2\ \Phi^{2/3}.$$

Deoarece, în cazul general

$$\bar{V} = -\frac{k}{\mu}\nabla p,$$

rezultă că

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k}\bar{V}$$

sau, înlocuind V^2 cu expresia sa de mai sus, se obține

$$q = \frac{\mu}{k}\Phi^{2/3}\,V^2 = \mu Q^2/(4\pi^2 r^2 k\,\Phi^{2/3}).$$

În acest caz, cu notațiile

$$\nu = \frac{\rho_a c_a Q}{4\pi K\,\Phi^{2/3}};\quad \alpha = \frac{K}{\Phi\rho_a c_a + (1-\Phi)\rho_m c_m};\quad f(r) = \frac{\mu Q^2}{4\pi^2 k K\,\Phi^{2/3}}\frac{1}{r^2}, \tag{1''}$$

ecuația (1') devine

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + (1 - 2\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = -f(r). \tag{3}$$

Temperatura trebuie să satisfacă condițiile inițiale și la limită

$$T(r, 0) = 0; \qquad T(r_w, t) = 0. \tag{3'}$$

În plus, ea trebuie să fie mărginită în tot spațiul. Cu schimbarea de variabilă $u = r/r_w$ ecuația temperaturii devine

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (1 - 2\nu)\frac{1}{u}\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial T}{\partial t} = -f(u), \tag{4}$$

iar condițiile (3)'

$$T(u, 0) = 0; \qquad T(1, t) = 0 \tag{4'}$$

cu $\alpha_1 = \alpha / r_w^2$. În cele ce urmează va fi rezolvată problema la limită dată de ecuația (4) și condițiile la limită (4').

2. *Soluția problemei la limită* va fi căutată în cadrul teoriei distribuțiilor, considerînd $T(u, t)$ ca distribuție de tip funcție

$$\bar{T}(u, t) = \begin{cases} T(u, t) & \text{pentru } u \geqslant 0 \text{ și } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{pentru } u < 0 \text{ sau } t < 0. \end{cases}$$

Dacă se aplică transformata lui Laplace în raport cu t ecuației (4) și se ține seama de proprietățile ei, se obține o ecuație de tip Bessel

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{T}}{\mathrm{d}u^2} + (1 - 2\nu)\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}\tilde{T}}{\mathrm{d}u} - \frac{p}{\alpha}\tilde{T} = -\frac{1}{p}f(u). \tag{5}$$

Soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare este [5]

$$\tilde{T}_0(u, p) = C_1 u^\nu I_\nu(u\sqrt{p/\alpha}) + C_2 u^\nu K_\nu(u\sqrt{p/\alpha}), \tag{6}$$

unde p este noua variabilă independentă introdusă de transformata lui Laplace, $I_\nu(x)$ și $K_\nu(x)$ sînt funcțiile lui Bessel de speța a doua [6], iar C_1 și C_2 două constante arbitrare ce vor fi determinate prin metoda variației constantelor. Derivarea lui (6) în raport cu u dă

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{T}_0}{\mathrm{d}u} = u^\nu I_\nu(u\sqrt{p/\alpha})\, C_1' + u^\nu K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})C_2' + C_1[u^\nu I_\nu(u\sqrt{p/\alpha})]' + C_2[u^\nu K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})]'. \tag{6'}$$

Dacă se pune condiția

$$u^\nu I_\nu(u\sqrt{p/\alpha})C_1' + u^\nu K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})C_2' = 0, \tag{6''}$$

derivata a doua a lui $\tilde{T}_0$ va fi

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{T}_0}{\mathrm{d}u^2} = C_1'[u^\nu I_\nu(u\sqrt{p/\alpha})]' + C_2'[u^\nu K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})]' + C_1[u^\nu I_\nu(u\sqrt{p/\alpha})]'' + C_2[u^\nu K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})]''. \tag{6'''}$$

Introducînd (6′) și (6‴) în (5) și ținînd seama că $u^{\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})$, $u^{\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})$ sînt soluții ale ecuației omogene atașate lui (5), se obține

$$[u^{\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})]' C_1' + [u^{\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})]' C_2' = -\frac{1}{p} f(u). \tag{7}$$

Rezolvînd sistemul format din (6″) și (7) în raport cu C_1' și C_2' și ținînd seama de expresia wronskianului funcțiilor $u^{\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})$ și $u^{\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})$, [5]

$$W[u^{\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}), u^{\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha})] = -u^{2\nu-1}$$

se obține

$$C_1' = -\frac{1}{p} u^{1-\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}) f(u); \quad C_2' = \frac{1}{p} u^{1-\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}) f(u)$$

sau, prin integrare.

$$C_1 = C_{11} - \frac{1}{p}\int_1^u u_0^{1-\nu} K_{\nu}(u_0\sqrt{p/\alpha}) f(u_0)\, du_0; \quad C_2 = C_{21} +$$

$$+ \frac{1}{p}\int_1^u u_0^{1-\nu} I_{\nu}(u_0\sqrt{p/\alpha}) f(u_0)\, du_0,$$

unde C_{11} și C_{21} sînt constante arbitrare. Dacă se ține seama de aceasta în (6), soluția generală a ecuației (5) va fi

$$\bar{T}(u, p) = \left[C_{11} - \frac{1}{p}\int_1^u u_0^{1-\nu} K_{\nu}(u_0\sqrt{p/\alpha}) f(u_0)\, du_0\right] u^{\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}) +$$

$$+ \left[C_{21} + \frac{1}{p}\int_1^u u_0^{1-\nu} I_{\nu}(u_0\sqrt{p/\alpha}) f(u_0)\, du_0\right] u^{\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}),$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\bar{T}(u, p) = \left[C_{11} - \frac{1}{p}\int_1^{\infty} \theta(u - u_0) u_0^{1-\nu} K_{\nu}(u_0\sqrt{p/\alpha})\, f(u_0)\, du_0\right] u^{\nu} I_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}) +$$

$$\left[C_{21} + \frac{1}{p}\int_1^{\infty} \theta(u - u_0)\, u_0^{1-\nu} I_{\nu}(u_0\sqrt{p/\alpha}) f(u_0)\, du_0\right] u^{\nu} K_{\nu}(u\sqrt{p/\alpha}), \tag{8}$$

$\theta(u - u_0)$ fiind distribuția lui Heaviside [7].

Constantele C_{11} și C_{21} se vor determina din condiția ca $\tilde{T}(u, p)$ să fie mărginită în tot spațiul și din a doua condiție (4'). Avînd în vedere că $\lim_{z\to\infty} I_\nu(z) = \infty$, [8], se deduce

$$C_{11} = \frac{1}{p}\int_1^\infty u_0^{1-\nu} K_\nu(u_0\sqrt{p/\alpha})\, f(u_0)\, du_0.$$

Condiția $\tilde{T}(1, p) = 0$ dă

$$C_{21} = -\frac{I_\nu(\sqrt{p/\alpha})}{pK_\nu(\sqrt{p/\alpha})}\int_1^\infty u_0^{1-\nu} K_\nu(u_0\sqrt{p/\alpha})\, f(u_0)\, du_0.$$

Înlocuirea lui C_{11} și C_{21} în (8) dă soluția ecuației (5) în condițiile impuse

$$\tilde{T}(u, p) = \int_1^\infty \Big\{ \theta(u - u_0)\, K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})\, I_\nu(u_0\sqrt{p/\alpha}) +$$

$$+ \theta(u - u_0)\, K_\nu(u_0\sqrt{p/\alpha})\, I_\nu(u\sqrt{p/\alpha}) -$$

$$- K_\nu(u\sqrt{p/\alpha})\, K_\nu(u_0\sqrt{p/\alpha})\frac{I_\nu(\sqrt{p/a})}{K_\nu(\sqrt{p/a})}\Big\}\, u^\nu u_0^{1-\nu}\frac{f(u_0)}{p}\, du_0. \tag{9}$$

Din expresia de mai sus urmează să se deducă funcția original. Acest lucru este posibil numai în anumite cazuri particulare ce vor face obiectul paragrafului următor.

3. *Cazul* $\nu = 1/2$. Dacă $\nu = 1/2$, se poate scrie, [6],

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi}\; z^{-1/2}\,\mathrm{sh}\, z;\quad K_{1/2}(z) = \sqrt{\pi/2}\; z^{-1/2}\, e^{-z}.$$

Expresia (9) se poate scrie în acest caz

$$\tilde{T}(u, p) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\int_1^\infty \Big\{ \theta(u - u_0)\frac{1}{p^{3/2}}\left[e^{-\frac{u-u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}} - e^{-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}\right] +$$

$$+ \theta(u_0 - u)\frac{1}{p^{3/2}}\left[e^{-\frac{u_0-u}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}} - e^{-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}\right] - \frac{1}{p^{3/2}}\left[e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}} -\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{u+u_0}{\sqrt{p}}\sqrt{p}}\right]\Big\}\, f(u_0)\, du_0. \tag{10}$$

Aplicînd în expresia precedentă transformata lui Laplace inversă și ținînd seama că [10]:

$$\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{p^{3/2}} = L\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{k^2}{4t}} - k\,\mathrm{erfc}\,(k/2\sqrt{t})\right],$$

se obține

$$\bar{T}(u,t)=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\int_1^\infty\Bigg\{\theta(u-u_0)\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{(u-u_0)^2}{4\alpha t}}-\frac{u-u_0}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{erfc}\frac{u-u_0}{2\sqrt{\alpha t}}\right]+$$

$$+\theta(u_0-u)\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{(u_0-u)^2}{4\alpha t}}-\frac{u_0-u}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{erfc}\frac{u_0-u}{2\sqrt{\alpha t}}\right]-\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{(u+u_0-2)^2}{4\alpha t}}-\right.$$

$$\left.-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{erfc}\frac{u+u_0-2}{2\sqrt{\alpha t}}\right]+[\theta(u-u_0)+\theta(u_0-u)-1]\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{(u+u_0)^2}{4\alpha t}}-\right.$$

$$\left.-\frac{u+u_0}{2\sqrt{\alpha}}\operatorname{erfc}\frac{u+u_0}{2\sqrt{\alpha t}}\right]\Bigg\}f(u_0)\,du_0.$$

Observînd că [8]:

$$\theta(u-u_0)+\theta(u_0-u)=1;\ \operatorname{erfc}(-x)=2-\operatorname{erfc}x;\ x\theta(x)=|x| \qquad (10')$$

expresia precedentă devine

$$\bar{T}(u,t)=\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\int_1^\infty f(u_0)\left\{e^{-\frac{(u-u_0)^2}{4\alpha t}}-e^{-\frac{(u+u_0-2)^2}{4\alpha t}}+\right.$$

$$\left.+\frac{u+u_0-2}{2\sqrt{\alpha t}}\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}\frac{u+u_0-2}{2\sqrt{\alpha t}}-\frac{|u-u_0|}{2\sqrt{\alpha t}}\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}\frac{|u-u_0|}{2\sqrt{\alpha t}}\right\}du_0 \qquad (11)$$

care este soluția problemei în cazul considerat.

4. *Cazul* $\nu=3/2$. Se poate scrie în acest caz, [6]

$$I_{3/2}(z)=\frac{z^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}}[(z-1)\,e^z+(z+1)\,e^{-z}];\quad K_{3/2}(z)=\sqrt{\pi/2}\,z^{-3/2}(z+1)\,e^{-z}.$$

Dacă se ține seama de aceste expresii în (9) se obține

$$\tilde{T}(u,p)=\frac{\alpha^{3/2}}{2}\int_1^\infty\Bigg\{\theta(u-u_0)\left[\left(\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}-\frac{u-u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{5/2}}\right)e^{-\frac{u-u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}+\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{5/2}}\right)e^{-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}\right]+\theta(u_0-u)\left[\left(\frac{u_0u}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{u_0-u}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{5/2}}\right)e^{-\frac{u_0-u}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}+\left(\frac{u_0u}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}+\frac{u_0+u}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{p^{5/2}}\right)e^{-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}\right]-\left[\left(\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}+\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{5/2}}-2\sqrt{\alpha}\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}(\sqrt{p}+\sqrt{\alpha})}-\right.\right.$$

$$- 2\sqrt{\alpha}\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2(\sqrt{p}+\sqrt{\alpha})} - 2\sqrt{\alpha}\frac{1}{p^{5/2}(\sqrt{p}+\sqrt{\alpha})}\Bigg) e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}} +$$

$$+\left(\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}+\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{5/2}}\right) e^{-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}\Bigg]\Bigg\}\frac{1}{u_0^2} f(u_0)\,du_0. \quad (12)$$

Vor fi determinate originalele ale căror imagini apar în (12). Se pornește de la relațiile [10]:

$$\frac{1}{p}e^{-k\sqrt{p}} = L\left[\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{t}}\right]; \quad \frac{1}{p^{3/2}}e^{-k\sqrt{p}} = L\left[2\sqrt{t/\pi}\,e^{-\frac{k^2}{4t}} - k\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{t}}\right]. \quad (13)$$

Aplicînd primeia din ele proprietatea, [7],

$$[Lf(t)]' = L[-tf(t)] \quad (14)$$

și ținînd seama de a doua relație (13), se obține

$$\frac{1}{p^2}e^{-k\sqrt{p}} = L\left\{\left(t^2+\frac{k^2}{2}\right)\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{t}} - k\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{k^2}{4t}}\right\}. \quad (15)$$

Analog, aplicînd (14) în a doua relație (13) și avînd în vedere (15), se obține

$$\frac{1}{p^{5/2}}e^{-k\sqrt{p}} = L\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{t}{\pi}}(4t+k^2)\,e^{-\frac{k^2}{4t}} - k\left(t+\frac{k^2}{6}\right)\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{t}}\right]. \quad (16)$$

Identitățile

$$\frac{e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}}{p^{3/2}(\sqrt{p}+\sqrt{\alpha})} = \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha^{3/2}}\frac{1}{p^{1/2}} - \frac{1}{\alpha^{3/2}}\frac{1}{p^{1/2}+\alpha^{1/2}}\right]e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}, \quad (17)$$

$$\frac{e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}}{p^2(\sqrt{p}+\sqrt{\alpha})} = \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} + \frac{1}{\alpha^{3/2}}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^{1/2}} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^{1/2}+\alpha^{1/2}}\right]e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}, \quad (17')$$

$$\frac{e^{-\frac{(u+u_0-2)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}}}{p^{5/2}(\sqrt{p}+\sqrt{\alpha})} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^{5/2}} - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^{3/2}}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha^{5/2}}\frac{1}{p^{1/2}} - \frac{1}{\alpha^{5/2}}\frac{1}{p^{1/2}+\alpha^{1/2}}\right]e^{-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}} \quad (17'')$$

sînt utile în calculul originalelor celorlalte transformate ce apar în (12). În [10] se găsește

$$\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+a)} = L\left[e^{ak+a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)\right]; \quad \frac{e^{-k\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} = L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{k^2}{4t}}\right]. \quad (18)$$

Cum însă

$$\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+a)} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-k\sqrt{p}} - \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{p}+a}e^{-k\sqrt{p}},$$

urmează că

$$\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{\sqrt{p}+a} = L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{k^2}{4t}} - a\,e^{ak+a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{19}$$

Din (13), (15) și (16) se obține

$$\left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{|u-u_0|}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{|u-u_0|}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) =$$

$$= L\left[\frac{2}{3\alpha}\sqrt{\frac{t}{\pi}}(u^2+uu_0+u_0^2-2\alpha t)\times\exp\left(-\frac{(u+u_0)^2}{4\alpha t}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{|u^3-u_0^3|}{3\alpha^{3/2}}\operatorname{erfc}\frac{|u-u_0|}{2\sqrt{\alpha t}}\right]. \tag{20}$$

Ținînd seama de (10′), rezultă

$$\theta(u-u_0)\left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{u-u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{u-u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) +$$

$$+ \theta(u_0-u)\left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{u_0-u}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{u_0-u}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) =$$

$$= \left[\frac{uu_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{|u-u_0|}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{|u-u_0|}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) \tag{21}$$

și, de asemenea,

$$\theta(u-u_0)\left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} + \frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) +$$

$$+ \theta(u_0-u)\left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} + \frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) -$$

$$- \left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} + \frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{u+u_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) = 0. \tag{22}$$

Înlocuind (17), (17′), (17″), (21) și (22) în (12), rezultă

$$\tilde{T}(u,p) = \frac{\alpha^{3/2}}{2}\int_1^\infty\left\{\left[\frac{uu_0}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}} - \frac{|u-u_0|}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{|u-u_0|}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\right) - \right.$$

$$\left. - \left[2\frac{uu_0-(u+u_0)+1}{\alpha^{3/2}}\frac{1}{p^{1/2}(p^{1/2}+\alpha^{1/2})} - 2\frac{uu_0-|u+u_0|+1}{p\,\alpha^{3/2}} + \right.\right.$$

$$+\frac{uu_0-2(u+u_0)+2}{\alpha}\frac{1}{p^{3/2}}+\frac{u+u_0-2}{\alpha^{1/2}}\frac{1}{p^2}+$$

$$+\frac{1}{p^{5/2}}\Big]\exp\Big(-\frac{u+u_0-2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{p}\Big)\Big\}\frac{f(u_0)}{u_0^2}\,du_0. \tag{23}$$

Dacă se aplică expresiei de mai sus transformata lui Laplace inversă și se ține seama de (13), (15), (16), (20) și (18), se obține

$$\bar{T}(u,t)=\int_1^\infty \frac{f(u_0)}{u_0^2}\Big\{\frac{\sqrt{\alpha t}}{3\sqrt{\pi}}[u^2+uu_0+u_0^2-2\alpha t]\exp\Big(-\frac{(u-u_0)^2}{4\alpha t}\Big)-$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}[u^2-uu_0+u_0^2+2u+2u_0-2-2\alpha t]\,e^{-\frac{(u+u_0-2)^2}{4\alpha t}}-$$

$$-\frac{|u^3-u_0^3|}{6}\operatorname{erfc}\frac{|u-u_0|}{2\sqrt{\alpha t}}+\frac{u^3+u_0^3-2}{6}\operatorname{erfc}\frac{u+u_0-2}{2\sqrt{\alpha t}}+$$

$$+(uu_0-u-u_0+1)\exp(u+u_0-2+\alpha t)\operatorname{erfc}\Big(\frac{u+u_0-2}{2\sqrt{\alpha t}}+$$

$$+\sqrt{\alpha t}\Big)\Big\}\,du_0,$$

unde $f(u_0)$ are expresia (1″).

Expresia lui $\bar{T}(u,t)$ se poate obține și în cazul $\nu=5/2$, dar deducerea ei este mult mai anevoioasă. În general, pentru o valoare oarecare a lui ν, soluția problemei va fi obținută aproximativ prin metoda diferențelor finite, așa cum se va arăta în paragraful următor.

5. *Soluția aproximativă.* Derivatele ce apar în problema la limită (3), (3′) se scriu sub forma aproximativă

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\frac{T_{m-1,n}-2T_{m,n}+T_{m+1,n}}{h^2};\quad \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{T_{m,n+1}-T_{m-1,n+1}}{h};$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\tau},$$

unde s-a notat

$$r_m=r_w+(m-1)h;\ m=1,2,\ldots;\ t_n=(n-1)\tau;\ n=1,2,\ldots;$$

$$T_{m,n}=T(r_m,t_n).$$

În acest caz ecuația (3) ia forma discretizată

$$\frac{T_{m-1,n}-2T_{m,n}+T_{m+1,n}}{h^2}+\frac{1-2\nu}{r_w/h+m-1}\frac{T_{m,n+1}-T_{m-1,n+1}}{h^2}-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\tau}=-\frac{\gamma}{h^2(r_w/h+m-1)^2} \tag{24}$$

cu notația

$$\gamma = \frac{\mu Q^2}{4\pi^2 k K \Phi^{2/3}},$$

iar condițiile (3')

$$T_{m,1} = 0\,;\; T_{1,n} = 0\,;\; m,\; n = 1,\; 2,\; \ldots . \tag{24'}$$

Din (24) se deduce

$$T_{m,n+1} = \frac{\dfrac{\alpha R\gamma}{(r_w/h + m - 1)^2} + \alpha RA\,T_{m-1,n+1} + (1 - 2\alpha R)T_{m,n} + \alpha R(T_{m-1,n} + T_{m+1,n})}{1 + \alpha RA}, \tag{24''}$$

unde

$$A = \frac{2\nu - 1}{r_w/h + m - 1}\,;\; R = \frac{\tau}{h^2}.$$

Formulele (24'') și (24') permit calculul temperaturii în orice punct al rețelei la orice moment (fig. 2). Formulele (24') dau temperaturile la momentul inițial în orice punct și temperaturile în $r = r_w$ (peretele sondei de injecție) la orice moment. Din (24''), pentru $n = 1$ și $m = 2, 3, \ldots$ se obțin valorile temperaturii la momentul $t = \tau$ în orice punct r_m. Tot din (24''), pentru $n = 2$ și $m = 2, 3, \ldots$ — se obțin valorile temperaturii la momentul $t = 2\tau$ în orice punct r_m. În mod asemănător se pot determina temperaturile în orice punct din domeniul de mișcare la orice moment $t = n\tau (n \in N)$.

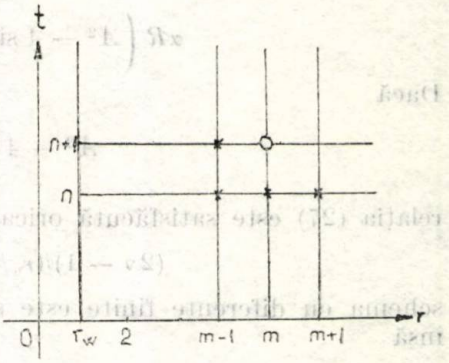


Fig. 2. — Schița de discretizare.

Se pune acum problema stabilității schemei de calcul propuse. Folosind metoda lui Neumann de analiză spectrală, trebuie să se caute soluția problemei la limită sub forma

$$T_{m,n} = \lambda^n e^{i\varphi m}, \tag{25}$$

care va fi introdusă în (24) omogenă ($\gamma = 0$), de unde se deduce $\lambda = \lambda(\varphi)$. Se obține

$$\alpha R(e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi}) - \lambda\,\alpha RA(1 - e^{-i\varphi}) - \lambda + 1 = 0.$$

Dacă în relația de mai sus se ține seama de identitățile

$$e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi} = -4\sin^2\frac{\varphi}{2}\,;\; 1 - e^{-i\varphi} = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

se deduce

$$\lambda = \frac{1 - 4\alpha R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + 2\alpha RA \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2i\alpha RA \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Din această expresie rezultă

$$|\lambda|^2 = \frac{1 - 8\alpha R \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 16\alpha^2 R^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}{1 + 4\alpha RA \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4\alpha^2 R^2 A^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

sau încă

$$1 - |\lambda|^2 = \frac{4\alpha R \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[A + 2 + \alpha R \left(A^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]}{1 + 4\alpha RA \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4\alpha^2 R^2 A^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (26)$$

Dacă se satisface condiția de stabilitate a lui Neumann $1 - |\lambda|^2 \geqslant 0$, rezultă inegalitatea

$$\alpha R \left(A^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \geqslant -A - 2. \quad (27)$$

Dacă

$$A^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} > 0$$

relația (27) este satisfăcută oricare ar fi R. Dacă, deci,

$$(2\nu - 1)/(r_w/h + m - 1) > 2,$$

schema cu diferențe finite este stabilă oricare ar fi pașii h și τ. Dacă însă

$$A^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} < 0,$$

din (27) se obține

$$R < \frac{1}{\alpha} \frac{2 + A}{A^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

sau încă

$$R < 1/\alpha(2 - A).$$

A fiind pozitiv, rezultă

$$R < 1/2\alpha, \quad (28)$$

care este condiția de stabilitate căutată.

Partea a II-a. APLICAȚII NUMERICE

În această parte a lucrării vor fi aplicate rezultatele teoretice obținute mai sus la cazuri concrete de mișcări cu date utilizate în mod obișnuit în practica de exploatare a țițeiului cu scopul de a sublinia caracteristicile evoluției temperaturii, influența diferiților parametri asupra cîmpului de temperatură și de a compara rezultatele obținute în cazul radial cu cele obținute în cazul liniar. S-a folosit în mod constant $r_w = 0{,}1$ m., $T_i = 0$ °C și în cele mai multe cazuri apa ca fluid de injecție. Rezultă: $\mu = 0{,}5055 \cdot 10^{-7}$ kg h/m², $\rho_a = 10^3$ kg/m³, $c_a = 1$ kcal/kg °C. Au fost considerate și alte fluide mai vîscoase ca apa de aproximativ 2—4 ori pentru a se urmări efectul vîscozității asupra temperaturii. În aceste cazuri s-a considerat în mod constant $\rho_a = 900$ kg/m³, $c_a = 0{,}5$ kcal/kg °C.

În ceea ce privește caracteristicile mediului poros, au fost considerate valori cuprinse între extremele cele mai întîlnite în practică: $k = 0{,}005\ D - 2\ D$; $K = 0{,}8 - 1{,}5$ kcal/mh °C; $\Phi = 0{,}15 - 0{,}4$; $\rho_m c_m = 400 - 600$ kcal/m³ °C. Pentru cazurile rezolvate cu metoda diferențelor finite s-a ales $h = 0{,}1$ m., $\tau = 0{,}5$ h,. valori ce asigură stabilitatea schemei în toate cazurile considerate. În cazul radial nu apare lungimea L a zăcămîntului, un parametru foarte important în cazul liniar, căci mișcarea are loc în spațiul infinit.

Rezultatele obținute utilizînd soluția exactă și cea aproximativă diferă prin valori nesemnificative. Pentru $\nu = 0{,}5$ rezultă din (1″) $Q = 0{,}0046$ m³/h m. Temperatura maximă la trei zile, calculată cu soluția exactă, este $0{,}439 \cdot 10^{-4}$ °C, iar cu soluția aproximativă $0{,}42 \cdot 10^{-4}$°C. Pentru $\nu = 1{,}5$ rezultă $Q = 0{,}0138$ m³/hm. Temperatura maximă la trei zile, calculată cu soluția exactă, este $0{,}6645 \cdot 10^{-3}$°C, iar cu soluția aproximativă, $0{,}6582 \cdot 10^{-3}$°C. Rezultatele sînt deci în bună concordanță.

În cazul mișcării în spațiul infinit, considerată în această lucrare, nu se pot calcula presiunile în zăcămînt, ci numai gradienții de presiune. Cunoscîndu-se debitul și raza sondei de injecție se poate calcula viteza de filtrare $v = Q/2\pi\, r_w$, care, introdusă în legea lui Darcy, dă grad $p = -\mu\, Q/2\,\pi\, rk$. Cu această formulă au fost calculate valorile gradientului de presiune la peretele sondei de injecție. Pe figurile ce urmează sînt indicate aceste valori.

1. *Caracteristicile evoluției temperaturii.* Din rezultatele obținute cu parametrii menționați se pot trage anumite concluzii ce caracterizează fenomenul radial și îl disting de cel liniar.

a. Timpul de injecție a fluidului în sistem influențează sensibil evoluția temperaturii numai la începutul procesului; în primele zile de injecție temperatura crește rapid pentru ca apoi să crească din ce în ce mai lent. Această caracteristică se poate urmări pe figurile 3, 4 și 5, unde este prezentată variația temperaturii în funcție de distanță la 1, 5, 10, 20 și 30 zile de la începerea injecției, pentru caracteristicile indicate pe fiecare figură în parte. În cazul din figura 3 temperatura a crescut în primele 10 zile de injecție la 8,171°C, iar în 30 zile la 9,246°C. Din datele prezentate în figura 4 se vede că în primele 10 zile temperatura a ajuns la 16,341°C pentru ca în 30 zile de injecție să se realizeze 18,488°C. Același lucru se vede și în figura 5, unde

este prezentată evoluția în timp a temperaturilor pentru un fluid de aproximativ trei ori mai vîscos ca apa. Aici, în primele 10 zile de la începerea injecției se realizează 22,719°C, iar în 30 zile 26,241°C.

Acest rezultat are deosebită importanță practică; pentru obținerea unui nivel oarecare de temperatură nu este necesară o injecție îndelungată.

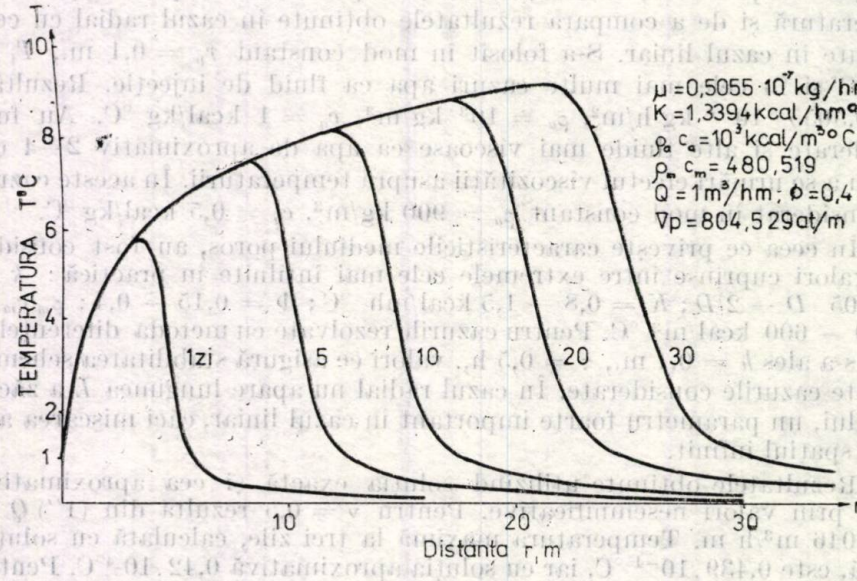


Fig. 3. — Distribuția temperaturii la diferite momente; $k = 0{,}01$ D.

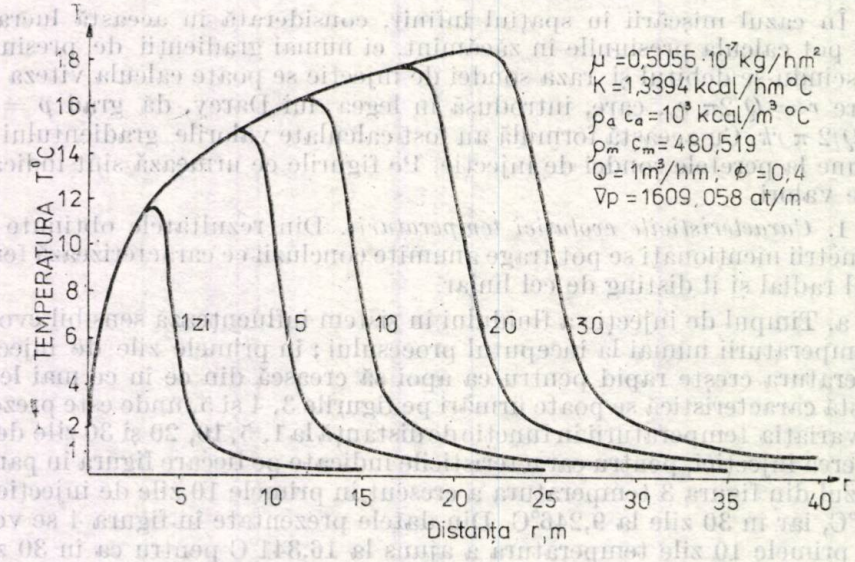


Fig. 4. — Distribuția temperaturii la diferite momente; $k = 0{,}005$ D.

Nu timpul stabilește acel nivel de temperatură, ci alți parametri care vor apare din cele de mai jos.

b. Parametrul care influențează foarte mult nivelul maxim de temperatură este permeabilitatea, așa cum rezultă din figurile 6 și 7 . În figura 6

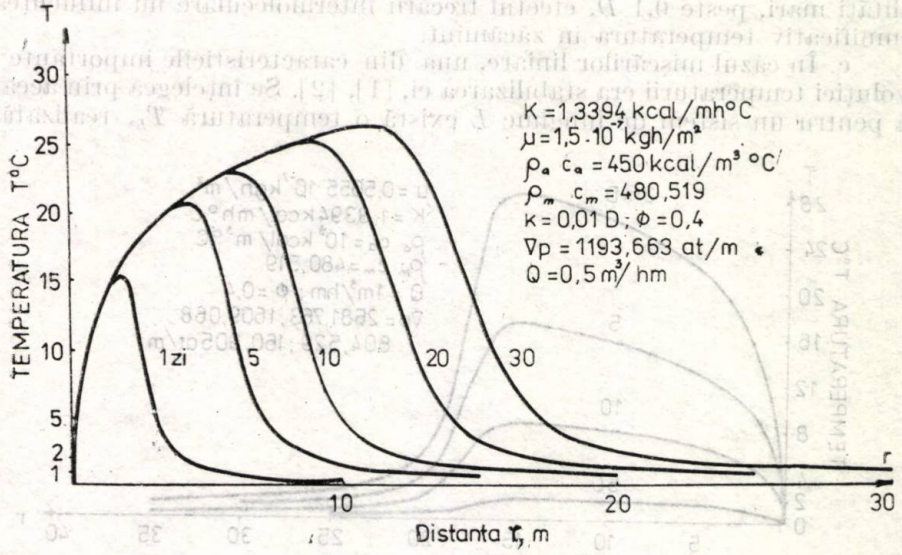


Fig. 5. — Distribuția temperaturii la diferite momente; $\mu = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ kg h/m².

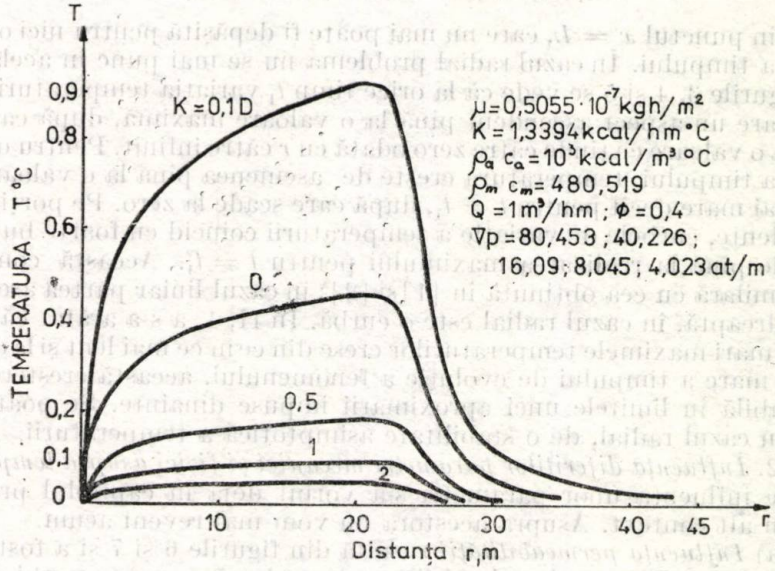


Fig. 6. — Repartiția temperaturilor la 30 zile de la începerea injecției, pentru diferite valori ale permeabilității.

sînt prezentate rezultatele obținute pentru datele indicate pe figură la diferite valori ale permeabilității. Cele mai mari temperaturi se realizează la 0,1 D., sub un grad centezimal. În figura 7, unde permeabilitățile sînt mult mai mici, se realizează temperatura maximă de 28, 5406°C pentru $k = 0{,}003\ D$ la numai 15 zile de la începerea injecției. Rezultă că la permeabilități mari, peste 0,1 D, efectul frecării intermoleculare nu influențează semnificativ temperatura în zăcămînt.

c. În cazul mișcărilor liniare, una din caracteristicile importante ale evoluției temperaturii era stabilizarea ei, [1], [2]. Se înțelegea prin aceasta că pentru un sistem de lungime L există o temperatură T_L, realizată la

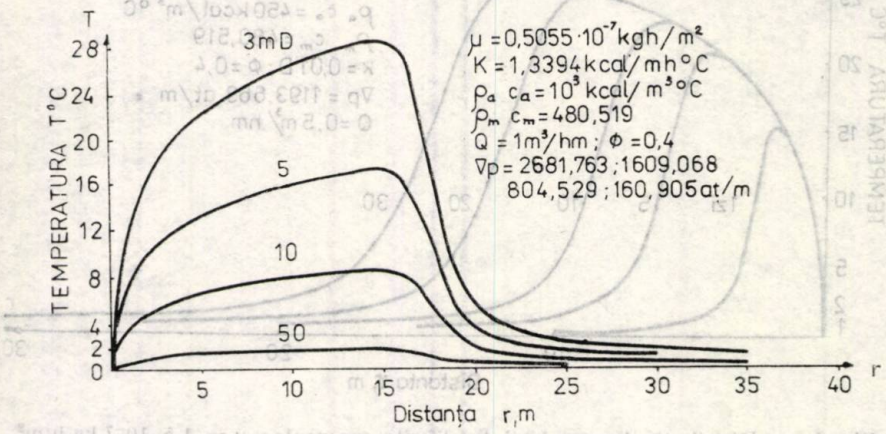


Fig. 7. — Repartiția temperaturilor la 15 zile de la începerea injecției, pentru diferite valori ale permeabilității.

$t = t_L$ în punctul $x = L$, care nu mai poate fi depășită pentru nici o valoare $t > t_L$ a timpului. În cazul radial problema nu se mai pune în același mod. Din figurile 3, 4 și 5 se vede că la orice timp t_1 variația temperaturii cu distanța are un aspect ascendent pînă la o valoare maximă, după care scade pînă la o valoare ce tinde către zero odată cu r către infinit. Pentru o valoare $t_2 > t_1$ a timpului, temperatura crește de asemenea pînă la o valoare maximă, mai mare decît pentru $t = t_1$, după care scade la zero. Pe porțiunile lor ascendente, curbele de variație a temperaturii coincid cu foarte bună aproximație pînă la realizarea maximului pentru $t = t_1$. Această comportare este similară cu cea obținută în [1] și [2]; în cazul liniar partea ascendentă era o dreaptă, în cazul radial este o curbă. În II, 1, a s-a arătat că la timpi foarte mari maximele temperaturilor cresc din ce în ce mai lent și la o valoare foarte mare a timpului de evoluție a fenomenului, această creștere devine neglijabilă în limitele unei aproximații impuse dinainte. Se poate vorbi, deci, în cazul radial, de o stabilitate asimptotică a temperaturii.

2. *Influența diferiților parametri mecanici și fizici asupra temperaturii.* Despre influența unor parametri s-a vorbit deja în capitolul precedent, într-un alt context. Asupra acestora nu vom mai reveni acum.

a) *Influența permeabilității* rezultă din figurile 6 și 7 și a fost prezentată mai sus. Din rezultatele obținute se vede că se poate vorbi, în cazul apei, de o generare de căldură prin frecare numai pentru permeabilități mai mici de 0,1 D.

b. *Influența debitului de injecție* este arătat în figura 8. Se vede că repartiția de temperatură este foarte sensibilă la variația debitului; de la 4,755 °C realizată la 0,3 m^3/h m., temperatura crește la 18,488°C pentru un debit de 1 m^3/h m.

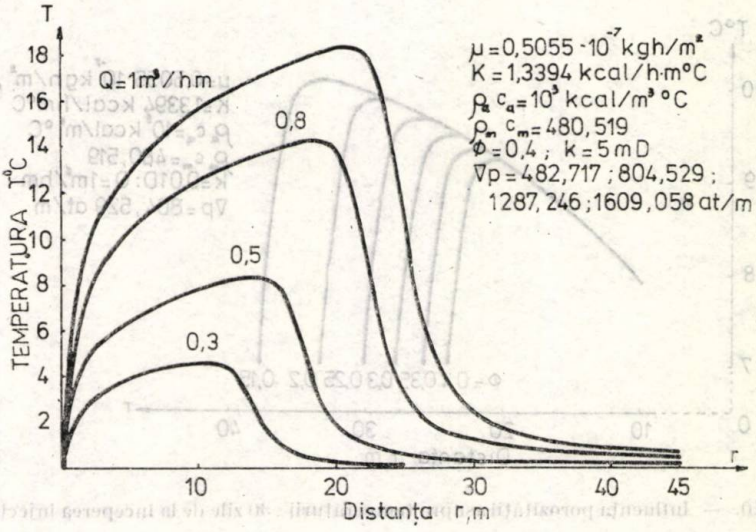


Fig. 8. — Influența debitului de injecție asupra temperaturii : 30 zile de la începerea injecției.

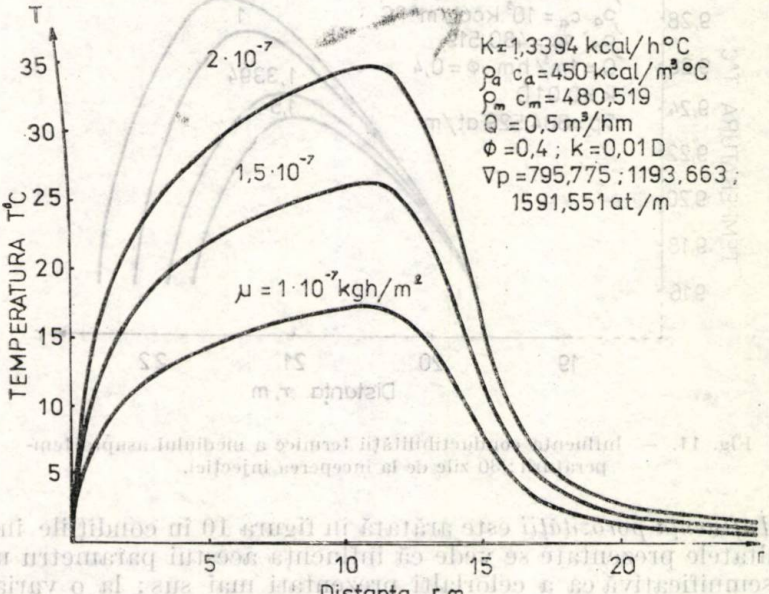


Fig. 9. — Influența viscozității asupra variației temperaturii la 30 zile de la începerea injecției.

c. *Influența vîscozității* se poate urmări în figura 9, unde sînt prezentate rezultatele obținute pentru fluide de aproximativ 2, 3 și 4 ori mai vîscoase ca apa, pentru un debit de 0,5 m³/h m. În condițiile de injecție prezentate în figură se obțin în aceste cazuri temperaturi destul de ridicate, evident, la gradienți mari de presiune.

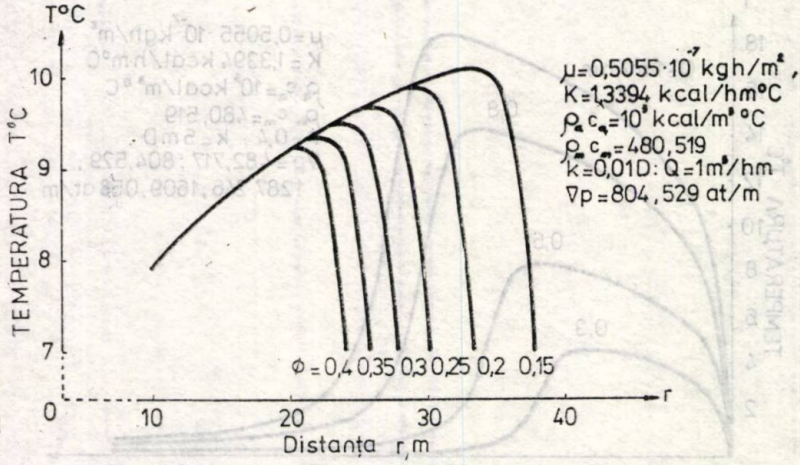


Fig. 10. — Influența porozității asupra temperaturii : 30 zile de la începerea injecției.

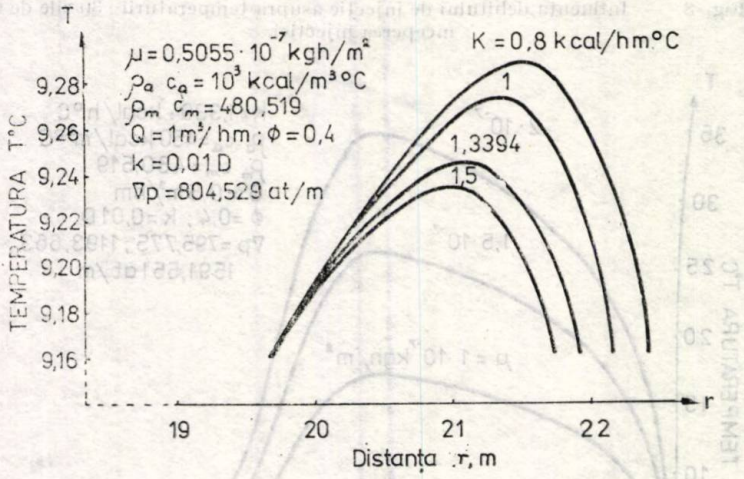


Fig. 11. — Influența conductibilității termice a mediului asupra temperaturii : 30 zile de la începerea injecției.

d. *Influența porozității* este arătată în figura 10 în condițiile indicate. Din rezultatele prezentate se vede că influența acestui parametru nu este la fel de semnificativă ca a celorlalți prezentați mai sus ; la o variație de porozitate între 0,15 și 0,4 se obține o variație a temperaturilor maxime de nici un grad centezimal. Pentru acest motiv s-a prezentat în figură numai detaliul care pune în evidență variația maximului de temperatură.

e. *Influența conductibilității termice și a capacității calorice a mediului poros* sînt și mai puțin semnificative decît influența porozității. Ele se pot urmări în figurile 11 și 12, unde se vede că la o variație a parametrilor respectivi, în limitele arătate, variațiile temperaturilor sînt de ordinul zecimilor de grad centezimal.

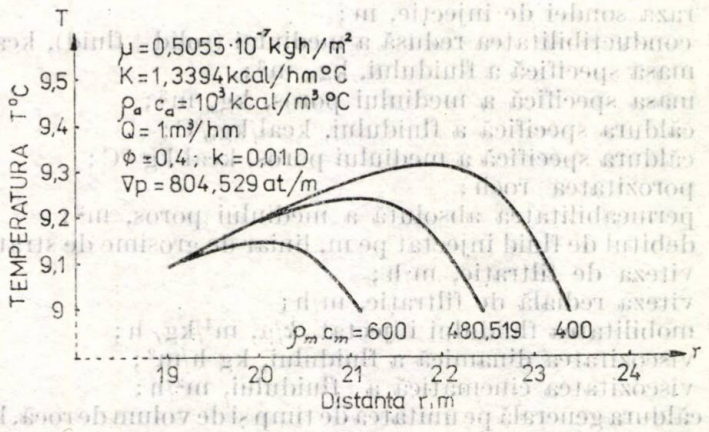


Fig. 12. — Influența capacității calorice a mediului asupra temperaturii ; 30 zile de la începerea injecției.

CONCLUZII

În cazul mișcării radiale rămîn valabile observațiile făcute în cel liniar privitor la importanța efectului frecării intermoleculare și a consecințelor lui. Se mai pot trage în plus unele concluzii specifice acestui caz, care îl diferențiază de celălalt.

a. Temperaturile maxime se realizează aproape de sonda de injecție la cîteva zile de la începerea procesului. Aceasta este consecința stabilizării asimptotice de care s-a vorbit în II, 1, c.

b. Efectul este semnificativ la permeabilități mici, la debite de injecție mari și la viscozități ridicate.

c. La gradienți mari de presiune se pot realiza temperaturi mai ridicate ca în cazul liniar.

d. Gradienții de presiune calculați cu formula stabilită la începutul părții a doua a lucrării au valori foarte mari, după cum se poate vedea în figurile 3 — 12. Aceasta se datorește faptului că domeniul fluid este nelimitat în direcția r ; presiunea din sondă de injecție trebuie să pună în mișcare o masă infinită de fluid viscos din mediul poros.

Dacă se vor considera domenii finite de mișcare, de pildă panouri cu patru sonde de extracție și una de injecție sau cu șase sonde de extracție și una de injecție, domeniul de variație al gradientului de presiune va fi mult micșorat. Rezultatele ce se vor obține în aceste cazuri vor fi mult mai apropiate de cele ce se întîlnesc în mod curent în extracția de țiței, căci fenomenul real este mai fidel reprezentat de modelul matematic. Dîndu-se valori ale presiunii în sondele de extracție, se pot calcula și variațiile presiunii cu distanța, nu numai cele ale gradientului de presiune.

NOTAȚII

T — temperatura în zăcământ, °C;
T_i — temperatura fluidului injectat, °C;
r — coordonata radială, m;
t — coordonata temporală, h;
r_w — raza sondei de injecție, m;
K — conductibilitatea redusă a mediului (solid+fluid), kcal/m h °C;
ρ_a — masa specifică a fluidului, kg_m/m^3;
ρ_m — masa specifică a mediului poros, kg_m/m^3;
c_a — căldura specifică a fluidului, $kcal/kg_m$°C;
c_m — căldura specifică a mediului poros, kcal/kg °C;
Φ — porozitatea rocii;
k — permeabilitatea absolută a mediului poros, m^2;
Q — debitul de fluid injectat pe m. liniar de grosime de strat, m^3/h m;
V — viteza de filtrație, m/h;
v_r — viteza redială de filtrație, m/h;
m — mobilitatea fluidului injectat, k/μ, m^4/kg_f h;
μ — vîscozitatea dinamică a fluidului, kg h/m^2;
ν — vîscozitatea cinematică a fluidului, m^2/h;
q — căldura generală pe unitatea de timp și de volum de rocă, $kcal/m^3$ h;
h — pasul de discretizare după r, m;
τ — pasul de discretizare după timp, h;
Δf — operatorul lui Laplace aplicat funcție f;
∇f — operatorul gradient aplicat funcției f;
$\nabla \bar{V}$ — operatorul divergență aplicat vectorului $\bar{V}$;
$L[f]$ — transformata lui Laplace a funcției f;
$\tilde{T}$ — transformata lui Laplace a funcției T.

Primită la redacție la 7 ianuarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. V. IONESCU, I. TUTUNEA, AL. TURTĂ, *Influența frecării intermoleculare a particolelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros; cazul liniar. Partea întîia*, St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 3 (1985).
2. V. IONESCU, I. TUTUNEA, AL. TURTĂ, *Influența frecării intermoleculare a particolelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros; cazul liniar. Partea a doua*, St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 4 (1985).
3. THE LATE MAX JACOB, *Heat transfer*, vol. I, John Wiley and Sons, New York, 1967.
4. F. M. MORSE, H. FESHBACH, *Metodele fizicii Teoretice*, Moscova, 1958.
5. I. S. GRADSTEIN, I. M. RÎJIK, *Tabele de integrale, sume serii și produse*, Moscova, 1971.
6. V. I. SMIRNOV, *Cours de mathématique supérieures*, vol. I—V, Ed. Mir, Moscou, 1970.
7. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică*, Edit. tehnică, București, 1975.
8. A. NIKIFOROV, V. UVAROV, *Elements de la théorie des fonctions speciales*, Ed. Mir, Moscou, 1974.
9. S. K. GODUNOV, V. S. REABENKI, *Scheme de calcul cu diferențe finite*, Edit. tehnică, București, 1977.
10. V. A. DITKIN, A. P. PRUDNIKOV, *Transformări integrale și calcul operațional*, Edit. „Nauka", Moscova, 1974.

O PROBLEMĂ BILOCALĂ LA LIMITĂ ÎN STUDIUL INFILTRAȚIEI PLANE PERMANENTE

de I. SETEANU, M. ERHAN
Institutul Politehnic, București

Se indică un procedeu de optimizare a amplasării și exploatării șirurilor de puțuri de drenaj ale unui teren agricol irigat, în vederea asigurării corelației adecvate între stocul de apă preluat din emisari în perioadele de vegetație și debitul de drenaj. Se alege drept funcție obiectiv suma valorilor absolute ale abaterilor dintre curba de depresie și linia terenului, ponderate cu factori de penalizare acolo unde apar bălțiri. Se prezintă rezultatele numerice pentru două exemple concrete analizate (două, respectiv trei șiruri de puțuri de drenaj).

1. INTRODUCERE

Exploatarea optimală a unui teren agricol irigat presupune o corelare adecvată între stocul de apă prelevat din emisar și utilizat în perioadele de vegetație cu stocul de apă returnat prin drenare în alte situații în care rezerva de apă a acviferului este prea mare. De asemenea, în situațiile de ape mari sau în anii ploioși, se impun perioade de drenări intensive.

Se analizează un teren agricol cu o pantă topografică redusă, irigat și drenat gravitațional din două rîuri cu regimuri hidrologice cunoscute, de asigurări impuse. Acviferul asociat modelului de suprafață constituie un mediu poros omogen de permeabilitate dată. Nivelul apei subterane este controlat printr-o rețea de puțuri de drenaj.

Se prezintă un procedeu de manevră optimală a puțurilor de drenaj, avînd drept funcție obiectiv rata cumulată a abaterilor dintre nivelul terenului și al apei subterane în acvifer, ponderate cu coeficienți de penalizare mari acolo unde există pericolul de bălțire datorită faptului că suprafața de depresie teoretică depășește cota terenului.

2. MODELUL MATEMATIC AL INFILTRAȚIEI PLANE PERMANENTE

Curgerea plană permanentă printr-un acvifer se poate descrie cu aproximație suficient de bună prin ecuația cu derivate parțiale a lui Boussinesq în regim permanent. Considerînd un element infinitezimal de mediu poros, aflat sub suprafața de depresie (fig. 1), principiul continuității impune următoarea condiție de bilanț masic :

$$v_x H \Delta t + q \Delta x \Delta t - (v_x H)_1 \Delta t = 0, \tag{1}$$

unde H este cota curbei de depresie deasupra stratului impermeabil, q — debitul specific lateral (pe unitatea de lungime) intrat/ieșit., iar x — coordonata orizontală a secțiunii transversale. Aproximînd debitul în secțiunea 1 prin relația :

$$(v_x H)_1 = v_x H + \frac{\partial}{\partial x}(v_x H)\Delta x,$$

ecuația (1) devine:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(v_x H) + q = 0. \tag{2}$$

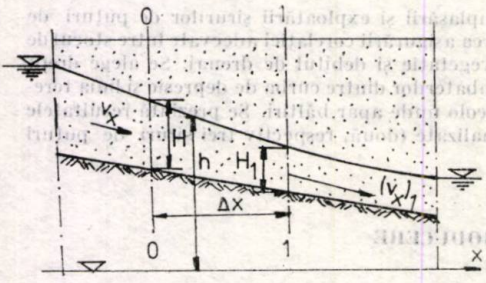


Fig. 1

Legea lui Darcy a infiltrației în acvifer este echivalentă cu condiția dinamică:

$$v_x = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{3}$$

unde k este coeficientul de infiltrație Darcy, iar h — cota deasupra unui plan orizontal convențional de referință.

Notînd prin I panta rocii impermeabile de profunzime, se poate scrie următoarea relație geometrică între cotele H și h:

$$H = h - I(L - x), \tag{4}$$

unde L reprezintă coordonata orizontală a intersecției între stratul impermeabil și planul convențional de referință.

Relațiile (2) și (3) sînt echivalente cu ecuația lui Boussinesq în regim staționar:

$$q + \frac{\partial}{\partial x}\left(kH\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0, \tag{5'}$$

$$H = h + Ix - IL \tag{5''}$$

sau

$$q + \frac{\partial}{\partial x}\left(kH\left(\frac{\partial H}{\partial x} - I\right)\right) = 0. \tag{6}$$

Condițiile la limită constau din impunerea nivelelor curbei de depresie la extremitățile zonei analizate, egale cu nivelele cunoscute ale emisarilor (fig. 2). Debitul specific lateral de infiltrație simulează regimul de irigare ($q \geqslant 0$), respectiv drenare ($q < 0$).

Condițiile de drenare sînt echivalente cu impunerea unui regim de exploatare a două sau trei șiruri de puțuri, modelate prin debitele laterale negative date, în grupuri de cîte două noduri adiacente ale schemei de discretizare, prezentată în continuare.

3. SCHEMA ÎN DIFERENȚE FINITE

Determinarea analitică a soluției problemei la limită bilocală este desosebit de dificilă datorită neliniarității ecuației (6), impunîndu-se astfel necesitatea utilizării metodelor numerice. Pentru aceasta se definește o rețea de calcul compusă din noduri spațiale discrete echidistante, cu pasul Δx, în care se determină valorile cotelor H ale curbei de depresie.

Pentru a reduce ordinul de neliniaritate al ecuației (6) este avantajos să se introducă o nouă funcție G, definită prin relația :

$$G = H^2. \tag{7}$$

Ecuația lui Boussinesq devine :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{2q}{k} + 2I\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{8}$$

Pentru o schemă în diferențe centrată, termenii relației (8) se scriu :

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_i \cong \frac{G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}}{(\Delta x)^2}, \tag{9}$$

$$2I\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_i \cong I\frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{\Delta x}. \tag{10}$$

Se obține o ecuație implicită în diferențe finite :

$$A_i G_{i+1} + B_i G_i + C_i G_{i-1} = D_i, \tag{11}$$

unde G semnifică în continuare funcția necunoscută, iar coeficienții au următoarele expresii :

$$A_i = \frac{k}{2(\Delta x)^2}\left(1 - \frac{I\Delta x}{2H_i}\right), \tag{12}$$

$$B_i = -\frac{4(\Delta x)^2}{k}, \tag{13}$$

$$C_i = \frac{k}{2(\Delta x)^2}\left(1 + \frac{I\Delta x}{2H_i}\right), \tag{14}$$

$$D_i = -q_i. \tag{15}$$

Deoarece, în rezolvarea schemei numerice, coeficienții trebuie să fie cunoscuți, iar nivelele H_i sînt necunoscute, algoritmul de calcul începe printr-o primă aproximare a formei curbei de despresie, corectată ulterior în procesul de calcul. Se constată că forma concretă a acestei prime aproximații nu are o influență majoră asupra vitezei de convergență a algoritmului. Ca urmare, prima aproximație a curbei de depresie s-a ales o linie dreaptă.

4. ALGORITMUL DUBLULUI PARCURS

Transcriind ecuația (11) în nodurile interioare ($i = 2, 3, \ldots, M - 1$), unde M este numărul total de noduri, se obține un sistem tridiagonal de ecuații liniare, rezolvabil prin procedeul lui Gauss [1]. Admițînd că valorile necunoscute G_{i+1} și G_i sînt legate prin relația liniară :

$$G_{i+1} = E_i G_i + F_i \quad (i = 1, M), \tag{16}$$

se obține un set de relații de recurență :

$$E_{i-1} = \frac{-C_i}{A_i E_i + B_i}, \tag{17}$$

$$F_{i-1} = \frac{D_i - A_i F_i}{A_i E_i + B_i}, \tag{18}$$

evhivalente cu sistemul tridiagonal de mai sus.

Condițiile la limită ale problemei bilocale constau din cunoașterea nivelelor H_1 și H_2 ale curbei de depresie la extremitățile sectorului analizat. Procesul de calcul începe prin indicarea condiției la limită aval :

$$H_M = H_2. \tag{19}$$

Această condiție poate fi satisfăcută identic dacă se admite că :

$$E_{M-1} = 0, \; F_{M-1} = H_2^2. \tag{20}$$

5. PROBLEMA DE OPTIMIZARE

Compararea curbei de depresie obținută ca mai sus cu linia terenului agricol poate evidenția următoarele inconveniente :

— curba de depresie să fie, în medie, situată prea jos, dovedind o exploatare excesivă a sistemului de drenaj, concretizată printr-un consum nejustificat de energie de pompare ;

— curba de depresie să depășească linia terenului (trasată la baza rădăcinilor plantelor de cultură), producînd bălțiri și alte efecte nedorite.

Pentru a obține o curbă de depresie convenabilă este necesar să se respecte restricția ca nivelul superior al apei să se afle pentru fiecare nod al rețelei sub o valoare impusă (cota terenului) ; deși nivelele mai coborîte sînt acceptabile, nivelele de depășire sînt interzise.

Metoda de optimizare necondiționată („pattern-search") Hooke și Jeeves [2] constituie un procedeu adecvat de minimizare a unei funcții obiectiv dificil reprezentabilă analitic. Se generează un șir de aproximații îmbunătățite prin perechi de etape. În etapa de explorare se examinează comportarea funcției obiectiv pentru valori modificate ale parametrului de optimizare. Dacă noua valoare a funcției obiectiv este mai redusă se trece la etapa de extrapolare, amplificîndu-se mărimea parametrului de optimizare în sensul precizat de prima etapă. În caz contrar se reia etapa de explorare pentru un pas de creștere diminuat al parametrului de optimizare. Algoritmul se oprește atunci cînd pasul de explorare scade sub o limită impusă, semnificînd atingerea optimului în limita de precizie dorită.

Prima încercare de alegere a funcției obiectiv a constat în selectarea diferenței maxime DH între curba de depresie și sol și în impunerea, într-o schemă minimax, a minimizării valorii absolute a acestei diferențe (fig. 3). Pentru a asigura o așezare echilibrată a curbei de depresie față de linia terenului s-a încercat definirea funcției obiectiv drept abaterea medie

pătratică între cele două linii. În acest caz deviația dintre curbe era minimă, dar se puteau produce băltiri. De aceea, s-a preferat o altă definire a funcției obiectiv, constînd din suma valorilor absolute ale abaterilor în nodurile de calcul, majorate cu coeficienți ponderali de penalizare foarte mari

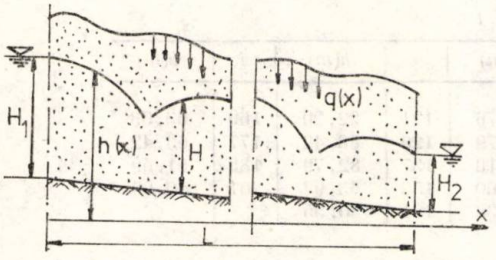


Fig. 2

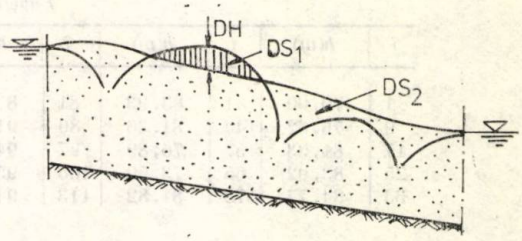


Fig. 3

atunci cînd cota curbei de depresie depășește cota terenului. Ca urmare, ariile de tipul $DS1$ (fig. 3) vor fi diminuate oricît de mult, menținîndu-se în același timp o poziționare echilibrată a curbei de depresie față de teren.

Ca parametri de optimizare, modificați în procedeul descris mai sus, s-au ales coordonatele de amplasare a șirurilor de puțuri de drenaj, precum și debitele acestora. S-au analizat cazurile a două și trei șiruri de puțuri de drenaj.

6. REZULTATE NUMERICE. CONCLUZII

Schema de calcul prezentată a fost aplicată pentru cazul unui sector de 50 km, situat între doi emisari, de cote $H_1 = 70$ m și $H_2 = 50$ m deasupra planului orizontal de referință, cu panta stratului impermeabil $I = 4 \cdot 10^{-5}$, permeabilitatea solului $k = 4{,}6 \cdot 10^{-4}$ m/s și porozitatea $n = 0{,}38$. S-au precizat un număr de $M = 201$ noduri de calcul echidistante, în condițiile unei irigări uniforme de debit specific $q = 8 \cdot 10^{-4}$ m³/s/m. Linia terenului este reprezentată în figura 4, împreună cu linia de depresie pentru cazul a două șiruri de puțuri de drenaj. Valorile optime ale parametrilor în acest caz sînt:

$x_1 = -2{,}76 \cdot 10^{-4}$ m³/s/m (debitul șirului de puțuri A),

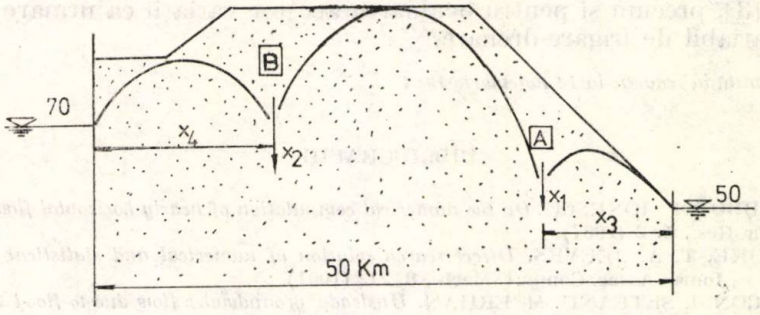


Fig. 4

$x_2 = -2{,}9 \cdot 10^{-4}$ m³/s/m (debitul șirului de puțuri B),
$x_3 = 11251$ m (coordonata șirului A),
$x_4 = 15754$ m (coordonata șirului B).

În tabela 1 se prezintă cîteva valori ale nivelelor curbei de depresie.

Tabelul 1

i	$h(m)$	i	$h(m)$	i	$h(m)$	i	$h(m)$	i	$h(m)$
1	70,00	41	83,93	81	87,76	121	92,20	169	63,03
9	76,82	49	81,36	89	91,79	129	88,42	177	63,42
17	81,33	57	76,89	97	94,16	137	82,79	185	61,59
25	83,92	65	73,50	105	95,00	153	63,94	201	50,00
33	84,77	73	81,82	113	94,36	161	60,35		

În figura 5 se indică linia de depresie pentru cazul a trei șiruri de puțuri pentru următoarele valori optimizate ale parametrilor :

$x_1 = -1{,}941 \cdot 10^{-4}$ m³/s/m (debitul șirului A),
$x_2 = -2{,}227 \cdot 10^{-4}$ m³/s/m (debitul șirului B),
$x_3 = 7688$ m (coordonata șirului A),
$x_4 = 10501$ m (coordonata șirului B),
$x_5 = -1{,}803 \cdot 10^{-4}$ m³/s/m (debitul șirului C),
$x_6 = 26938$ m (coordonata șirului C).

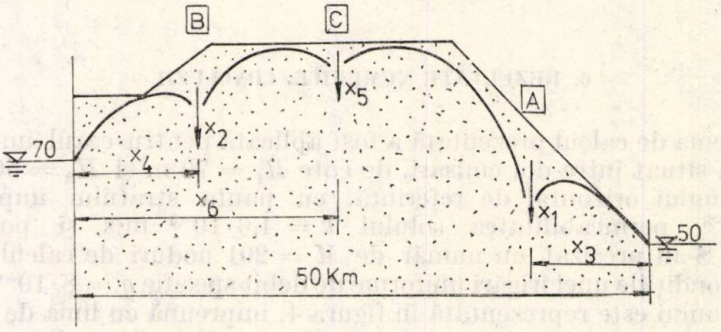


Fig. 5

Procedeul de calcul propus poate fi folosit pentru determinarea variațiilor curbei de depresie în acvifer, ca rezultat al unei unde de viitură în emisari [3], precum și pentru evaluarea acestor variații ca urmare a unui regim variabil de irigare-drenare.

Primită la redacție la 12 noiembrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. M. B. ABBOT, F. IONESCU, *On the numerical computation of nearly horizontal flows.* Journ. Hydr Res., **5**, 2 (1967).
2. R. HOOKE, T. A. JEEVES, *Direct search solution of numerical and statistical problems.* Journ. Assoc. Comput. Mech., **8**, 212 (1961).
3. A. DIACON, I. SETEANU, M. ERHAN, *Unsteady groundwater flow due to flood routing in open-channels.* Proc. of Euromech., **143**, 31 (1981).

TENSIUNI ŞI DEPLASĂRI ÎN ELEMENTELE PLANE ELASTICE CU METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ. I. ANALIZA STATICĂ

V. F. POTERAŞU, N. MIHALACHE

Institutul Politehnic, Iaşi

Lucrarea prezintă o analiză a stării de tensiune şi deformaţii în elemente ce lucrează în condiţiile stării plane de tensiune, prin metoda elementelor de frontieră, comparativ cu metoda elementelor finite. Metoda elementelor de frontieră, ca metoda numerică, permite o analiză a diferitelor categorii de elemente în domeniul de comportare liniară şi neliniară a materialului în regim static şi dinamic prin efectuarea unei discretizări numai pe contur. Metoda constă în combinarea ecuaţiilor integrale şi tehnica elementelor finite, dimensiunea spaţiului micşorîndu-se cu o unitate. În lucrare se prezintă mai multe exemple rezolvate, cu aplicaţii în structuri şi organe de maşini.

1. INTRODUCERE

Metoda elementelor de frontieră s-a dezvoltat ca metodă numerică pentru calculatoare în scopul determinării stării de tensiune şi deformaţii în elemente bidimensionale şi tridimensionale. Aplicarea lucrului mecanic virtual în forma unor ecuaţii integrale pentru un număr finit de subdomenii şi rezolvarea acestora prin procedee numerice (elemente finite) cu ajutorul calculatorului, a dus la apariţia acestei metode ce are o serie de avantaje faţă de metodele numerice cunoscute pînă în prezent. Metoda elementelor de frontieră permite transformarea problemelor tridimensionale în probleme bidimensionale, iar a acestora în probleme liniare, deci conduce la micşorarea spaţiului cu o unitate, avantaj deosebit pentru calculator. Modul de abordare poate fi direct şi indirect. Cel mai adesea în literatură [1], [3] se utilizează tehnica reziduului ponderat pentru rezolvarea ecuaţiilor.

Metoda elementelor de frontieră poate fi aplicată în rezolvarea problemelor de curgere a fluidelor, de transfer de căldură, elastostatică, elastodinamică. Astfel : în elastostatică, ecuaţiile integrale sînt ecuaţii de echilibru elastic în care necunoscutele sînt deplasările în puncte stabilite numai pe frontieră sau suprafaţa elementului. Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii integrale printr-un procedeu numeric se obţin expresiile deplasărilor în punctele stabilite. Prin derivarea expresiilor deplasărilor se obţin deformaţiile specifice (ecuaţiile lui Cauchy), iar ecuaţiile fizice (legea lui Hooke) permit determinarea tensiunilor în punctele dorite. Prin relaţii de trecere se obţin tensiunile şi deplasările în orice punct din interiorul domeniului cercetat.

Metoda elementelor de frontieră prezintă o serie de avantaje în raport cu metoda elementelor de finite şi metoda diferenţelor finite :

— discretizarea se efectuează numai pe frontiera elementului studiat, sistemul de ecuaţii algebrice este mai mic, crescînd în plus şi precizia rezultatelor :

— modelarea simplă a domeniilor infinite ;

— obţinerea unor bune rezultate în elementele ce prezintă concentrări de eforturi ;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 5, 1985, P. 445—464

— software pentru această metodă este mult mai simplu, datele de intrare și de ieșire sînt mai reduse și se obține o economie importantă de timp de calcul.

Totuși, metoda elementelor de frontieră prezintă inconveniente și dificultăți în cazurile cînd nu se găsesc soluțiile fundamentale, în domeniile anizotrope, în problemele de dinamică sînt necesare programe de inversare a transformatelor, iar matricele sistemelor de ecuații sînt mult mai pline decît în metoda elementelor finite. Astfel, cele două metode nu se exclud, avantajele lor putîndu-se combina.

2. TEHNICA REZIDUULUI PONDERAT

Se consideră un corp elastic (Fig. 1) pe care sînt specificate condițiile de contur.

$$u = \bar{u} \text{ pe } \Gamma_1; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ pe } \Gamma_2; \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma. \tag{1}$$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale, care sînt ecuațiile de echilibru elastic, sînt în general dificil de rezolvat cu metode exacte. De aceea se utilizează metode aproximative care acceptă anumite erori.

Una dintre cele mai generale metode aproximative este metoda reziduului ponderat. Drept exemplu se consideră ecuația de tip Laplace care apare în problemele de torsiune elastică, în problemele de potențial. O soluție aproximativă se poate scrie sub forma

$$u = \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \alpha_3\Phi_3 + \dots \tag{2}$$

Dacă se introduce această soluție în ecuația Laplace, $\nabla^2 u = 0$, se obține o eroare

$$\varepsilon = \nabla^2 u \neq 0, \quad \varepsilon_1 = u - \bar{u} \neq 0, \quad \varepsilon_2 = q - \bar{q} = 0. \tag{3}$$

Evident, există erori și în satisfacerea condițiilor de contur.

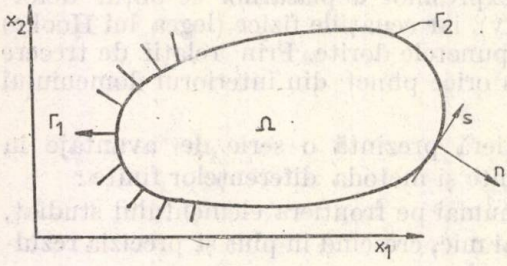


Fig. 1. — Condiții de contur.

Tehnica reziduului ponderat constă în găsirea unei soluții care satisface în mod exact condițiile de contur și în medie este satisfăcută pe domeniu. Astfel, dacă se consideră funcția pondere w

$$w = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3 + \dots \tag{4}$$

unde ψ_i sînt funcții liniar independente, iar β_i coeficienții numerici arbitrari, satisfacerea în medie a ecuației Laplace pe domeniu cu eroarea ε este exprimată prin

$$\int_\Omega \varepsilon w \, d\Omega = \int_\Omega (\nabla^2 u)\, w \, d\Omega = 0. \tag{5}$$

Tehnica diferențelor finite poate fi interpretată ca un caz special al ecuației (5) în care funcția pondere este funcția delta Dirac, iar β_i sînt coeficienți nodali arbitrari. Tehnica reziduului ponderat este cunoscută în literatură [2] și sub denumirile :

— metoda momentelor, metoda Galerkin și așa-numitele formulări slabe.

Metoda momentelor constă în considerarea funcției eroare sub forma unui moment de ordin superior, acest ordin fiind egal cu numărul coeficienților arbitrari α_i.

Exemplu. Se consideră funcția aproximativă

$$u = \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \alpha_3\Phi_3 = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) + \alpha_3 x^3(1-x) \tag{6}$$

și eroarea funcției sub forma

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + u + x. \tag{7}$$

După înlocuirea lui (6) în (7) se determină eroarea :

$$\varepsilon = x + \alpha_1(-2 + x - x^2) + \alpha_2(2 - 6x + x^2 - x^3) + \\ + \alpha_3(6x - 12x^2 + x^3 - x^4). \tag{8}$$

Dacă se introduce eroarea (8) în (5), funcțiile Φ_i fiind 1, x, x^2 pentru domeniul $x = 0$ și $x = 1$ al unui segment al frontierei,

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot 1\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^1 \varepsilon x\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^1 \varepsilon x^2\mathrm{d}x = 0, \tag{9}$$

se obține un sistem de trei ecuații cu necunoscutele α_i :

$$\begin{aligned} \frac{11}{6}\alpha_1 + \frac{11}{12}\alpha_2 + \frac{19}{20}\alpha_3 &= \frac{1}{2}, \\ \frac{11}{12}\alpha_1 + \frac{19}{20}\alpha_2 + \frac{29}{30}\alpha_3 &= \frac{1}{3}, \\ \frac{37}{60}\alpha_1 + \frac{9}{30}\alpha_2 + \frac{184}{210}\alpha_3 &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{10}$$

Soluția sistemului este

$$\alpha_1 = 0{,}185303\,; \quad \alpha_2 = 0{,}021175\,; \quad \alpha_3 = 0{,}147316,$$

iar funcția aproximativă (6) devine

$$u = 0{,}185303\,x(1-x) + 0{,}022175\,x^2(1-x) + 0{,}147316\,x^3(1-x).$$

Dacă se aplică relațile (9) celor N segmente ale frontierei, se obține un sistem de N ecuații algebrice a cărui soluție reprezintă valorile funcției în elementele de frontieră.

3. PRINCIPIUL METODEI ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

Problemele de potențial, problemele de teoria elasticității pot fi rezolvate numeric cu metoda elementelor de frontieră ca o tehnică a reziduului ponderat.

Dacă se consideră o funcție potențial u pe un domeniu Ω această funcție satisface ecuația Laplace.

$$\nabla^2 u = 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \tag{11}$$

cu condițiile de contur de forma

$$u = \bar{u} \text{ pe } \Gamma_1, \; q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ pe } \Gamma_2.$$

Se poate introduce o funcție de pondere u^* care are derivatele de ordinul întîi continui pe domeniul considerat, expresia reziduului ponderat (5) fiind

$$\int_\Omega (\nabla^2 u)\, u^* \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_1} (q - \bar{q})\, u^* \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} (u - \bar{u})\, q^* \mathrm{d}\Gamma, \tag{12}$$

unde

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ și } q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}. \tag{13}$$

Dacă se integrează de două ori prin părți membrul stîng al expresiei (12), se obține

$$\int_\Omega u(\nabla^2 u^*)\, \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* \mathrm{d}\Gamma. \tag{14}$$

Expresia (14) reprezintă ecuația integrală a unui punct de pe frontieră. Dacă se consideră drept soluție un potențial unitar în punctul i, ecuația lui Laplace $\nabla^2 u = 0$ devine :

$$\nabla^2 u + \Delta^i = 0, \tag{15}$$

unde Δ^i este funcția delta Dirac. Soluția ecuației (15) este denumită soluție fundamentală. Această funcție are proprietatea :

$$\int_\Omega u(\nabla^2 u^* + \Delta^i)\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u \nabla^2 u^* \mathrm{d}\Omega + u^i, \tag{16}$$

unde u^i reprezintă valoarea unei funcții necunoscute u în punctul de aplicație a potențialului unitar. Ținînd cont de (15), (16) se poate scrie :

$$\int_\Omega u(\Delta^2 u^*)\, \mathrm{d}\Omega = -\, u^i. \tag{17}$$

Cu (17), relaţia (14) ia forma :

$$u^i + \int_{\Gamma_2} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q}u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} qu^* d\Gamma. \tag{18}$$

Dacă $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ şi $q^* = \frac{\partial u}{\partial n}$ se înlocuiesc în (18), se obţine :

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma. \tag{19}$$

Pentru elemente bidimensionale, soluţia fundamentală a ecuaţiei Laplace este

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \tag{20}$$

iar pentru elemente tridimensionale

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}, \tag{21}$$

unde r este distanţa dintre punctul de aplicaţie a potenţialului unitar şi punctul considerat. În cazul $r = 0$ se obţin integrale singulare. În acest caz se consideră, pentru spaţiu, următoarea integrală pe suprafaţa unei sfere de rază ε cu centrul în punctul de pe frontieră unde este aplicat potenţialul unitar (fig. 2) :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = -\int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = -1. \tag{22}$$

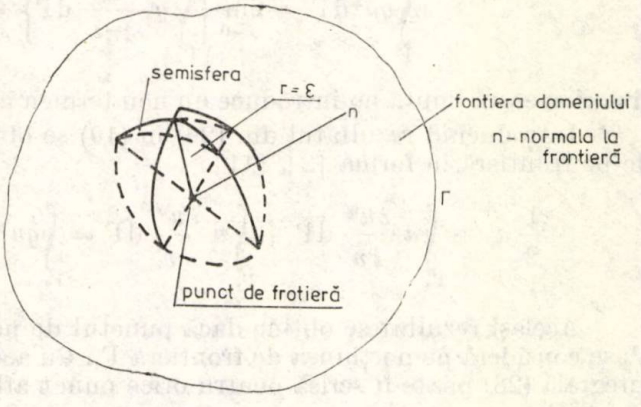


Fig. 2. — Frontiera Γ cu emisfera de rază $r = \varepsilon$.

Se poate verifica simplu că membrul stîng al identităţii (22) este egal cu -1 scriind următoarea expresie :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma. \tag{23}$$

Substituind soluția fundamentală (21) în (23), rezultă că

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial r} \mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int \left(-\frac{1}{r^2} \right) \mathrm{d}\Gamma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi r^2}{r^2} \right) = -1. \tag{24}$$

Rezultatul obținut în (24) este independent de r și aceasta înseamnă că dacă $r \to 0$, membrul stîng al expresiei (22) este de asemenea egal cu -1.

Expresia (19) este valabilă în cazul unui punct ce aparține domeniului studiat, considerîndu-se o emisferă pe frontiera domeniului (fig. 2). Cum raza emisferei este ε, în cazul cînd aceasta tinde la zero, punctul va aparține frontierei. Pentru analiza acestui caz se consideră porțiunea de frontieră Γ_2 divizată în două părți, prima integrală din membrul stîng al expresiei (19) scriindu-se

$$\int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{2-\varepsilon}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma. \tag{25}$$

Dacă în integrala a doua din membrul drept al relației (25) se substituie soluția fundamentală și se calculează limita pentru $\varepsilon \to 0$, rezultă :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \mathrm{d}\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\frac{u}{2} \right\} = -\frac{1}{2} u. \tag{26}$$

Cînd $\varepsilon \to 0$ frontiera $\Gamma_{2-\varepsilon}$ devine Γ_2 și deci punctul poate fi considerat pe frontiera Γ_2. Efectuînd același raționament pentru termenii membrului drept ai expresiei (19), se obține

$$\int_{\Gamma} q u^* \mathrm{d}\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathrm{d}\Gamma \right\} = 0 \tag{27}$$

și deci această limită nu introduce un nou termen în această relație.

Introducînd rezultatul din (26) în (19) se obține ecuația unui punct de pe frontieră în forma [2], [11] :

$$\frac{1}{2} u^i + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* \mathrm{d}\Gamma. \tag{28}$$

Același rezultat se obține dacă punctul de pe porțiunea de frontieră Γ_2 se consideră pe porțiunea de frontieră Γ_1. Cu aceste considerații ecuația integrală (28) poate fi scrisă pentru orice punct aflat pe întreaga frontieră în forma :

$$-\frac{1}{2} u + \int_{\Gamma} u q^* \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* \mathrm{d}\Gamma \tag{29}$$

cu condițiile de contur (1) specificate.

4. ANALIZA ELASTOSTATICĂ PRIN METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

Într-un punct al unui corp solicitat complex starea de tensiune este cunoscută sub forma (fig. 3)

Tensorul tensiunilor într-un punct al corpului este

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Ecuațiile diferențiale de echilibru static scrise pe un cub elementar au forma

$$\sigma_{jk,j} + b_k = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Legătura dintre tensiunile interioare și intensitatea forței exterioare este dată de

$$\sigma_{jk} \cdot n_j = p_k. \tag{32}$$

Tensorul deformațiilor specifice este cunoscut sub forma

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

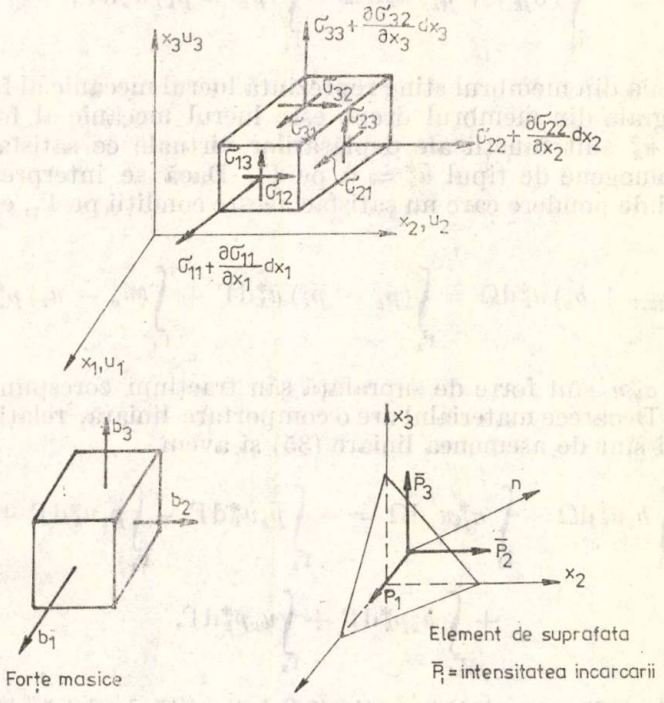


Fig. 3. — Tensiuni, intensități și forțe masice în punct.

Legătura dintre deformații și tensiuni este dată de legea lui Hooke generalizată

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \mu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] \tag{34}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \qquad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{G}.$$

Relația dintre deformațiile specifice și deplasări este dată de ecuațiile geometrice de tip Cauchy :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right); \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2, 3 \tag{35}$$

Plecînd de la ecuațiile generale ale mediului continuu deformabil și folosind teoremele lui Betti, se poate scrie :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k)\, u_k^* \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k)\, u_k^* \mathrm{d}\Gamma, \tag{36}$$

unde integrala din membrul stîng reprezintă lucrul mecanic al forțelor interioare, integrala din membrul drept este lucrul mecanic al forțelor exterioare, iau u_k^* sînt funcții ale deplasărilor virtuale ce satisfac condițiile de contur omogene de tipul $\bar{u}_k^* = 0$ pe Γ_1. Dacă se interpretează u_k^* ca fiind funcții de pondere care nu satisfac aceste condiții pe Γ_1, expresia (36) are forma :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k)\, u_k^* \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k)\, u_k^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k)\, p_k^* \mathrm{d}\Gamma, \tag{37}$$

unde $p_k^* = \sigma_{kj}^* n_j$ sînt forțe de suprafață sau tracțiuni corespunzătoare sistemului u_k^*. Deoarece materialul are o comportare liniară, relațiie deformații-deplasări sînt de asemenea liniare (35) și avem

$$\int_{\Omega} b_k u_k^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* u_k \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* \mathrm{d}\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* \mathrm{d}\Gamma. \tag{38}$$

Relația (38) reprezintă ecuația (37) integrată de două ori prin părți.

În general, soluția fundamentală care satisface ecuațiile diferențiale de echilibru static este :

$$\sigma_{jk,j} + \Delta_l^i = 0 \tag{39}$$

unde Δ_l^i este funcția delta Dirac care în acest caz reprezintă o forță unitară aplicată în punctul i după direcția l. Acest tip de soluție va conduce pentru fiecare direcție l la următoarea expresie :

$$u_l^i = \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* \mathrm{d}\Gamma, \tag{40}$$

unde u_l^i reprezintă deplasarea punctului i în direcția l. Dacă se consideră $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, iar forța unitară acționează în spațiul tridimensional, (40) are forma

$$u_l^i + \int_{\Gamma} u_k p_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* \mathrm{d}\Omega, \tag{41}$$

unde p_{lk}^* și u_{lk}^* reprezintă tracțiunile și deplasările în direcția k date de o forță unitară ce acționează în punctul i și direcția l.

În literatură [1], [2], [5], [11] soluțiile fundamentale, pentru corpul omogen, izotrop tridimensional, ale deplasărilor u_{lk}^* și tracțiunilor p_{lk}^* sînt date de

$$\begin{aligned} u_{lk}^* &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r}\left[(3-4\nu)\Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right], \\ p_{lk}^* &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\Delta_{lk} + 3\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right] - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu)\left[\frac{\partial r}{\partial x_l}\eta_k - \frac{\partial r}{\partial x_k}\eta_l\right]\right\}, \end{aligned} \tag{42}$$

unde n este normala la suprafața elementului, Δ_{lk} — delta Kronecker, r — distanța de la punctul de aplicație al forței la punctul considerat, η_j — cosinii directori.

Pentru elemente bidimensionale izotrope, soluția deplasărilor u_{lk}^* și tracțiunilor p_{lk}^* devin [1], [11]

$$\begin{aligned} u_{lk}^* &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right], \\ p_{lk}^* &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\Delta_{lk} + 2\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}\right] - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu)\left[\frac{\partial r}{\partial x_l}\eta_k - \frac{\partial r}{\partial x_k}\eta_l\right]\right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Ecuația (41) poate fi particularizată pentru puncte pe frontieră. Dacă se consideră frontiera plană și punctul i se găsește pe Γ_2, integrala din membrul stîng al expresiei (41) poate fi scrisă pentru cele două subdomenii :

$$\int_{\Gamma_2} u_k p_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{2-\varepsilon}} u_k p_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_k p_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma. \tag{44}$$

Dacă se consideră integrala pe domeniul Γ_ε pentru cazul $\varepsilon \to 0$ și se determină limita acestei integrale, după înlocuirea lui p_{lk}^* se obține :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} u_k \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1 - 2\nu) \Delta_{lk} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (1 - 2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_l} \eta_{lk} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \right] \frac{1}{8\pi(1 - \nu) r^2} \cdot \tag{45}$$

Fie $\varepsilon = r$, iar pentru simplitate se vor folosi coordonatele sferice (fig. 4)

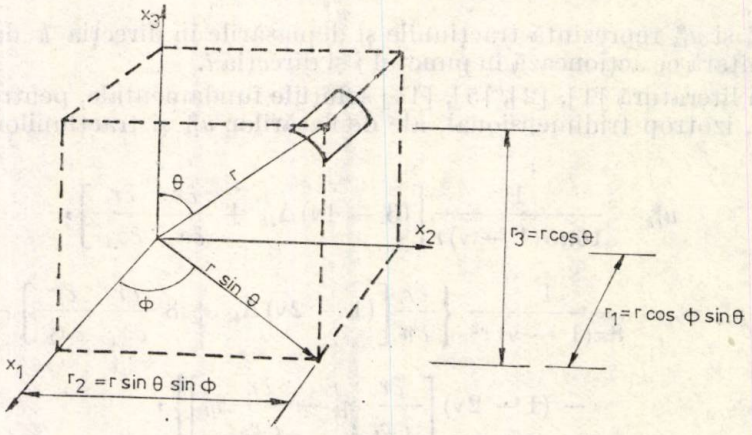


Fig. 4. — Definirea vectorului în coordonate sferice.

Pentru $l = 1$ și cazul coordonatelor sferice, relația (45) devine

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} [u_1^i (1 - 2\nu) + 3u_1^i l_1 l_1 + 3u_2^i l_1 l_2 + 3u_3^i l_1 l_3] \frac{\sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\Phi}{8\pi(1 - \nu)} \right., \tag{46}$$

unde

$$l_i = \eta_{li} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot$$

Integrala (46) este independentă de r și poate fi exprimată numai în termenii Φ și θ, tar după efectuarea ei, rezultă

$$I = - \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} [(1 - 2\nu) 2\pi + 2\pi] u^i = - \frac{1}{2} u_1^i. \tag{47}$$

Aceleași rezultate se obțin dacă se înlocuiește $l = 2$ și $l = 3$ și în forma generală expresia unui punct i pe frontieră are forma

$$c^i u_l^i + \int_\Gamma u_k p_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma p_k u_{lk}^* \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* \mathrm{d}\Omega, \tag{48}$$

unde $c^i = -1/2$ pentru frontiere plane, iar pentru frontiere neplane c^i trebuie calculat fiind diferit de 1/2. În forma matriceală, relația (48) devine

$$c^i u^i + \int_\Gamma p^* u \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma u^* p \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega u^* b \mathrm{d}\Omega, \tag{49}$$

unde

$u^i = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ componentele vectorului deplasării nodului i după direcțiile x_i,

$p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$ intensitatea încărcării exterioare după direcțiile x_i,

$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$ forțele masice după direcțiile x_i,

$p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix}$ coeficienții matricei p_{lk}^* reprezintă componentele în punctul k date de o forță unitară ce acționează în punctul i după direcția l,

$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}$ coeficienții matricei u_{lk}^* reprezintă componentele deplasărilor în punctul k date de o forță unitară ce acționează în punctul i după direcția l.

Se consideră frontiera divizată în elemente (fig. 5), iar funcțiile u și p pot fi aproximate pentru fiecare element j folosind următoarele funcții de interpolare :

$$u = u_j \begin{bmatrix} \Phi^T & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^T \end{bmatrix} = \Phi^T u_j, \quad p = p_j \begin{bmatrix} \Phi^T & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^T \end{bmatrix} = \Phi^T p_j, \tag{50}$$

unde u_j și p_j sînt funcții necunoscute în nodurile elementului j. Funcțiile Φ pot fi considerate de tip constant, liniar sau de ordin superior. Se pot substitui aceste funcții în relația (49) și se obține ecuația integrală a unui punct al frontierei în forma

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi^T \mathrm{d}\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi^T \mathrm{d}\Gamma \right\} p_j + \sum_{s=1}^{m} \left\{ \int_{\Omega_s} u^* \Phi^T \mathrm{d}\Omega \right\} b_s, \tag{51}$$

unde $\sum_{j=1}^{n}$ indică suma pentru n elemente ale suprafeței Γ_j, u_j și p_j sînt funcțiile deplasărilor și intensităților încărcărilor exterioare în nodurile j. Domeniul Ω se consideră divizat în m celule pentru care sînt calculate forțele masice. În general, integrala din membrul stîng al expresiei (51) este notată cu H_{ij}, iar cele din membrul drept cu G_{ij} și B. Dacă se scrie pentru fiecare nod i al frontierei expresia (51) cu notațiile stabilite se ajunge la un sistem de ecuații matriceal.

$$HU = GP + B, \tag{52}$$

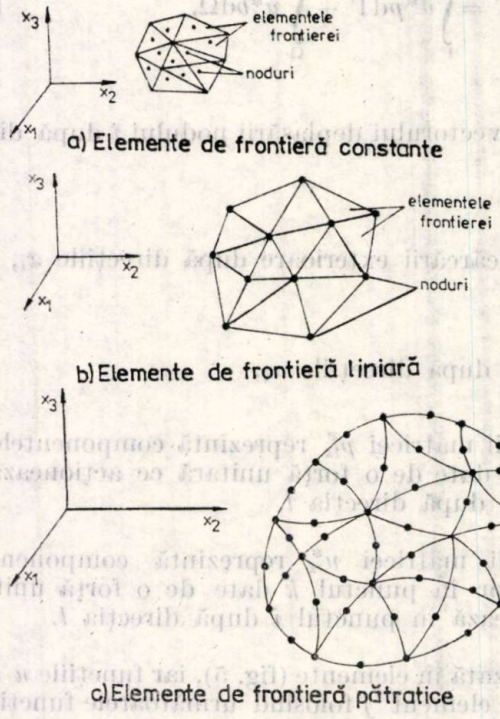


Fig. 5. — Elemente de frontieră : *a*) constante ; *b*) liniare ; *c*) pătratice.

unde U este matricea deplasărilor, iar p este matricea încărcărilor în nodurile frontierei. Prin rezolvarea sistemului de ecuații (51) se obțin expresiile deplasărilor și forțelor reactive pe frontieră. Dacă sînt cunoscute expresiile deplasărilor și forțelor reactive pe frontieră se pot determina deplasările și tensiunile în punctele interioare ale domeniului. Deplasările sîn tdate de (49) cu particularizarea că pentru puncte interne $c^i = 1$ [2], [11]

$$u^i = \int_\Gamma u^* p \, \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma p^* u \, \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega b u^* \, \mathrm{d}\Omega, \tag{53}$$

iar componenta deplasării după direcția p este următoarea :

$$a_l^i = \int_\Gamma u_{lk}^* p_k \, \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma p_{lk}^* \, \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{54}$$

Dacă se cunosc expresiile deplasărilor punctelor interne, prin derivarea acestora se obţin deformaţiile specifice. Din ecuaţiile constitutive se pot obţine tensiunile sub forma

$$\sigma_{ij} = \lambda\Delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{55}$$

unde Δ_{ij} este delta Kronecker, iar λ şi μ sînt ecuaţiile lui Lamé

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{56}$$

Substituind (54) în (55) se obţine expresia tensiunii

$$\sigma_{ij} = \int_\Gamma \left[\lambda\Delta_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_l} + \mu\left(\frac{\partial u^*_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial u^*_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] p_k \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma \left[\lambda\Delta_{ij}\frac{\partial p^*_{lk}}{\partial x_l} + \right.$$

$$\left. + \mu\left(\frac{\partial p^*_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^*_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] u_k \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \left[\lambda\Delta_{ij}\frac{\partial u^*_{lk}}{\partial x_l} + \mu\left(\frac{\partial u^*_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial u^*_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] b_k \mathrm{d}\Omega. \tag{57}$$

În formă restrînsă relaţia (57) se poate scrie

$$\sigma_{ij} = \int_\Gamma D_{kij} p_k \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma S_{kij} u_k \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega D_{kij} b_k \mathrm{d}\Omega, \tag{58}$$

unde

$$D_{kij} = \frac{1}{r^\alpha}\left\{(1-2\nu)\left[\Delta_{ki}\frac{\partial r}{\partial x_j} + \Delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial x_i} - \Delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right] + \right.$$

$$\left. + \beta\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right\}\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)}, \tag{59}$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^\beta}\left\{\beta\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\Delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu\left(\Delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j} + \Delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) - \right.\right.$$

$$- \gamma\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\Big] + \beta\nu\left(\eta_i\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k} + \eta_j\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ (1-2\nu)\left(\beta\eta_k\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j} + \eta_j\Delta_{ik} + \eta_i\Delta_{jk}\right) -$$

$$\left. - (1-4\nu)\,\eta_k\Delta_{ij}\right\}\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)}.$$

Pentru elementele bidimensionale $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, iar pentru elemente tridimensionale $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$. Derivatele vectorului $\bar{r}$ pentru cazul bidimensional sînt arătate în figura 6.

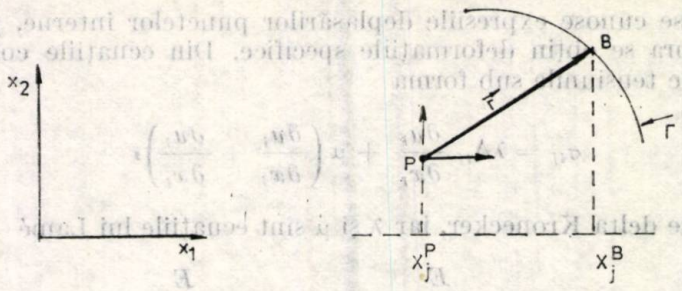


Fig. 6. — Derivatele vectorului r.

5. EXEMPLE NUMERICE

Metoda elementelor de frontieră poate fi utilizată în rezolvarea celor mai complexe probleme tehnico-inginerești unde metoda elementelor finite se aplică cu dificultate. Astfel, problema stării de tensiune în jurul cavităților de formă complexă în mediu infinit poate fi rezolvată cu ușurință prin această metodă. Dacă prin metoda elementelor finite este necesară o discretizare a domeniului pînă la limita unde tensiunile au valori neconcludente, prin metoda elementelor de frontieră se efectuează o discretizare doar a conturului cavității și se obține starea de tensiune și deplasări în punctele dorite

4.1. Cavitate de formă rectangulară acționată de o presiune interioară. S-a considerat o cavitate de formă pătrată cu dimensiunile de 6,00 × 6,00 m² acționată de o presiune interioară $p = 100$ daN/cm². Modulul de elasticitate longitudinal $E = 94500$ daN/cm², modulul de elasticitate transversal $G = 42950$ daN/cm² și coeficientul lui Poisson $\nu = 0{,}1$. S-a efectuat o discretizare doar pe frontieră (conturul interior) în 24 puncte, iar tensiunile normale și tangențiale au fost determinate în punctele 1, 2, ..., 6 (fig. 7).

Coordonatele punctelor de pe frontieră și deplasările după cele două direcții sînt date în tabelul *1*. În tabelul 2 sînt date deplasările și tensiunile în punctele stabilite.

Tabelul 1

Punct	Coordonate (cm)		Acțiuni (daN)		Deplasări (cm)	
	X	Y	Px	Py	ΔX	ΔY
12	0	297	0	100	0	0,0022
13	100	297	26	97	0,00033	0,0021
14	200	297	50	87	0,00059	0,0016
15	260	297	71	71	0,0011	0,0011
16	297	260	87	50	0,002	0,00083
17	297	100	97	26	0,0023	0,0004
18	297	0	100	0	0,0024	0

Tabelul 2

Punct	Coordonate cm		Deplasări cm		Tensiuni daN/cm²		
	X	Y	ΔX	ΔY	σ_x	τ_{xy}	σ_y
1	400	0	0,0019	−0,00021	−73,1	−6,42	49,7
2	−400	0	−0,0019	−0,00018	−80,6	−8,46	48,4
3	600	0	0,0013	0,00017	−43,05	−3,43	31,7
4	100	0	0,00079	0,00014	−16,1	−1,16	13,02
5	2000	0	0,00039	0,00012	−3,87	−0,25	3,29
6	50000	0	0,00015	0,00012	−0,6	−0,02	0,52

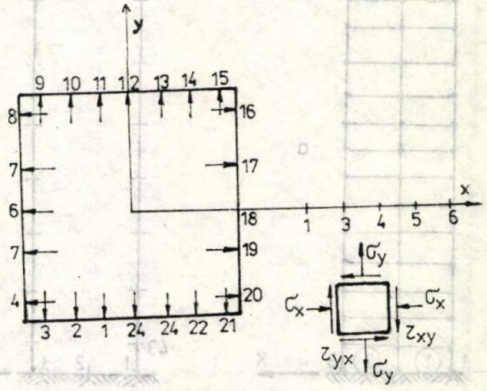


Fig. 7. — Cavitate în mediu infinit.

Timpul de calculator este de 36 secunde pentru rezolvarea acestei probleme.

Se constată simplitate în efectuarea discretizării și în introducerea datelor de intrare.

4.2. Analiza statică a unei console scurte acționată de încărcările unui pod rulant

Consola unui stîlp din beton armat este prezentată în figura 8.

Consola este acționată de o forță concentrată provenită din acțiunea podului rulant de valoare $P = 600$ KN. Caracteristicile elastice sînt: $E = 280\,000$ daN/cm², $G = 120\,000$ daN/cm² și $\nu = 0{,}16$. Elementul a fost discretizat în 131 noduri și 106 elemente patrulatere pentru analiza prin metoda elementului finit, iar prin metoda elementelor de frontieră a fost discretizat doar conturul în 43 elemente. S-au comparat valorile tensiunilor în zona de încastrare a consolei și s-a constatat că valorile obținute prin cele două metode sînt apropiate (fig. 9).

Timpul de calculator este de secunde prin metoda elementului finit și de secunde prin metoda elementelor de frontieră.

4.3. Pereți casete cutii viteză cu și fără goluri

4.3.1. Perete plin acționat de forțe orizontale. S-a studiat starea de tensiune și deplasări în peretele unei cutii de viteză fără goluri acționat de o forță orizontală [6] (fig. 10).

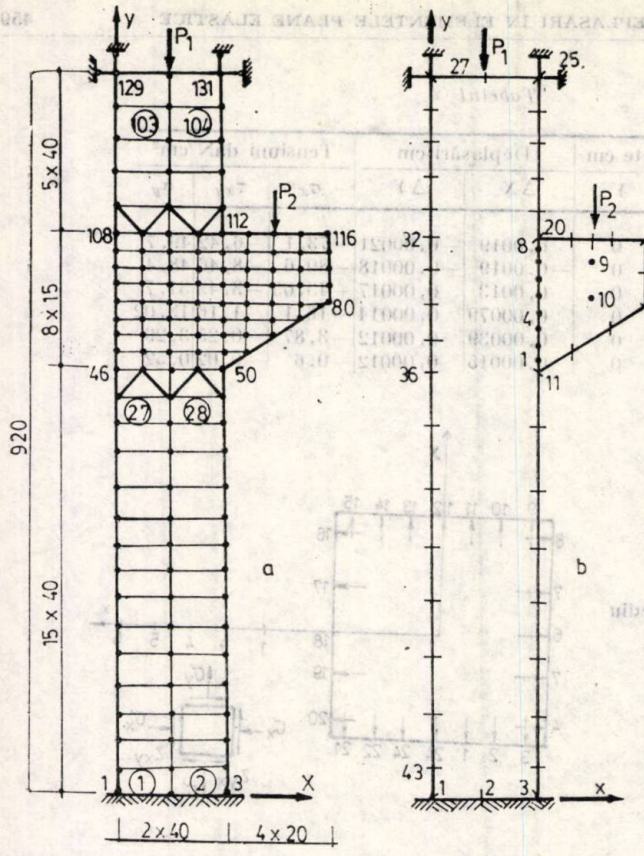


Fig. 8. — Discretizarea prin FEM și BEM (elemente de frontieră).

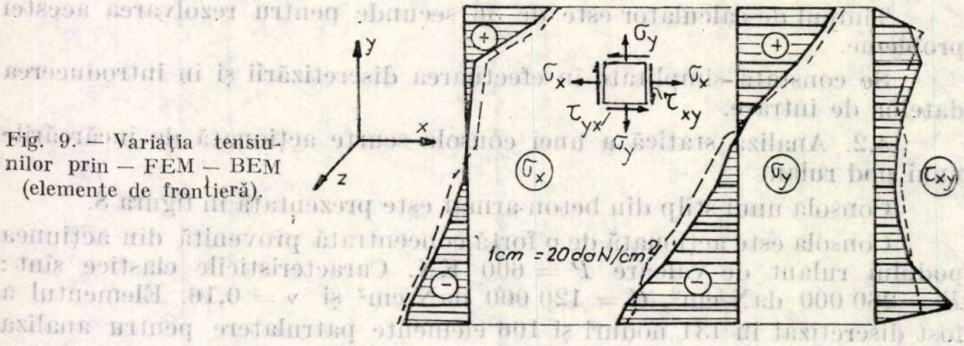


Fig. 9. — Variația tensiunilor prin — FEM — BEM (elemente de frontieră).

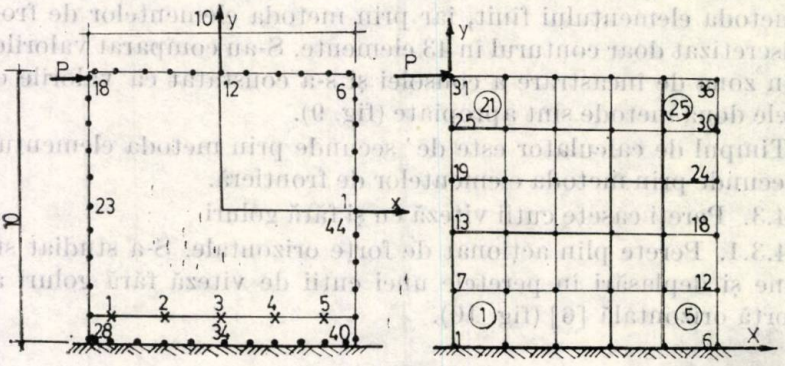


Fig. 10. — Discretizare perete prin FEM și BEM.

Peretele este din oțel avînd modulul de elasticitate longitudinal, $E = 2{,}1 \times 10^6$ daN/cm², $G = 800\,000$ daN/cm² și $\nu = 0{,}3$. Valoarea forței orizontale este $P = 400$ daN. Pentru rezolvarea prin metoda elementelor finite peretele considerat încastrat la bază și liber pe celelalte laturi a fost discretizat în 36 noduri și 25 elemente patrulatere. Tensiunile au fost calculate în centrul și mijlocul laturilor patrulaterelor. Pentru rezolvarea prin metoda elementelor de frontieră peretele a fost discretizat doar pe contur în 44 noduri și 40 elemente, iar tensiunile au fost calculate în 5 puncte ce coincid cu cele calculate prin metoda elementului finit (fig. 10). Variația tensiunilor este arătată în figura 11.

Forma deformată a peretelui obținut pe baza deplasărilor punctelor de pe contur prin cele două metode este arătată în figura 12.

4.3.2. Perete cu gol acționat de forțe transmise de arborele cotit. S-a considerat un perete cu un gol circular acționat de două forțe concentrate după două direcții (fig. 13).

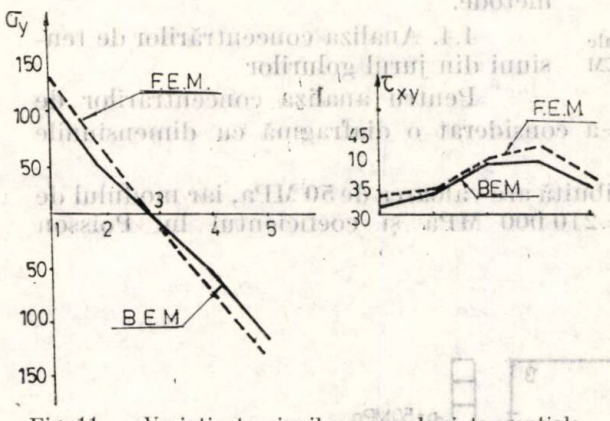


Fig. 11. — Variația tensiunilor normale și tangențiale.

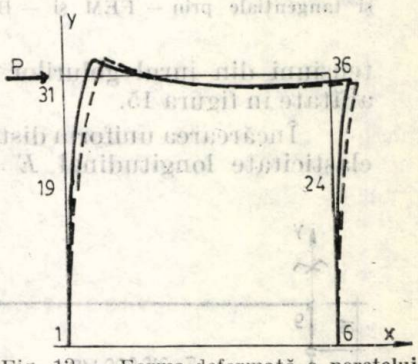


Fig. 12. — Forma deformată a peretelui — FEM — BEM.

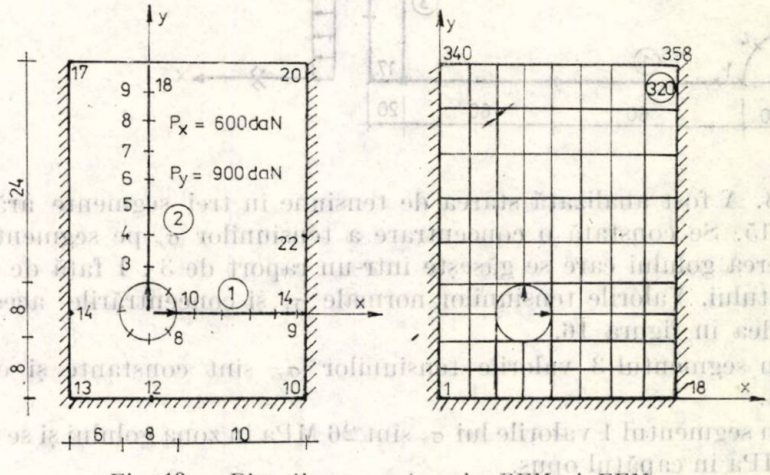


Fig. 13. — Discretizare perete prin BEM și FEM.

Prin metoda elementelor de frontieră a fost discretizat conturul în 22 puncte în care s-au calculat deplasările și reacțiunile. Pentru determinarea tensiunilor normale și tangențiale s-au fixat 15 puncte interioare (fig. 13).

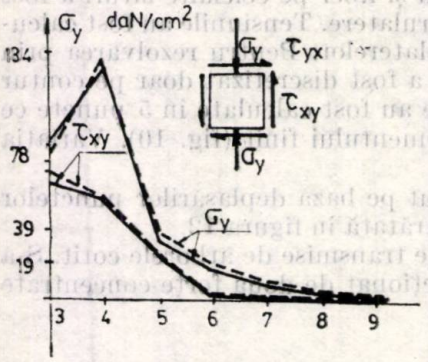


Fig. 14. — Variația tensiunilor normale și tangențiale prin — FEM și — BEM

Prin metoda elementelor finite, pentru a obține tensiunile în aceleași puncte s-a efectuat o discretizare corespunzătoare. Au apărut unele dificultăți în discretizarea zonei în jurul golului circular ceea ce a mărit numărul de elemente patrulatere și triunghiulare din zonă. Variația tensiunilor normale și tangențiale în punctele 3—9 este arătată în figura 14.

Și în acest exemplu se constată rezultatele apropiate ale celor două metode.

4.4. Analiza concentrărilor de tensiuni din jurul golurilor

Pentru analiza concentrărilor de tensiuni din jurul golurilor s-a considerat o diafragmă cu dimensiunile arătate în figura 15.

Încărcarea uniform distribuită are valoarea de 50 MPa, iar modulul de elasticitate longitudinal $E = 210\,000$ MPa și coeficientul lui Poisson

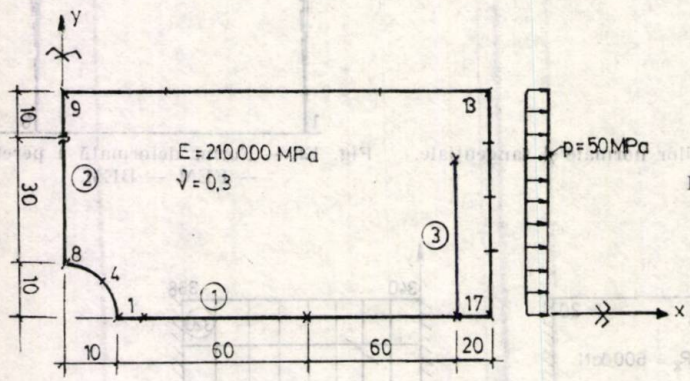


Fig. 15. — Discretizare diafragmă prin BEM.

$\nu = 0{,}3$. A fost analizată starea de tensiune în trei segmente arătate în figura 15. Se constată o concentrare a tensiunilor σ_x pe segmentul 2 în apropierea golului care se găsește într-un raport de 3 : 1 față de capătul segmentului. Valorile tensiunilor normale σ_x și concentrările acestora se pot vedea în figura 16.

În segmentul 3 valorile tensiunilor σ_x sînt constante și egale cu 49 MPa.

În segmentul 1 valorile lui σ_x sînt 26 MPa în zona golului și se apropie de 50 MPa în capătul opus.

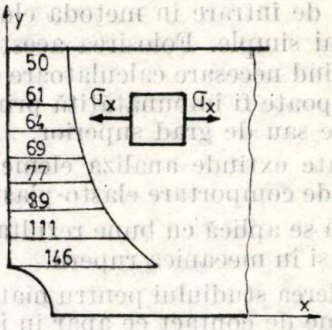


Fig. 16. — Concentrările tensiunilor adiacente golului.

6. CONCLUZII

Metoda elementelor de frontieră oferă posibilitatea rezolvării problemelor tehnico-inginerești pe cale numerică aducînd unele avantaje față de alte metode ca metoda elementelor finite, metoda diferențelor finite.

La baza metodei stau ecuațiile generale ale mediului continuu deformabil și teoremele lui Betti ce sînt aplicate problemei de rezolvat. Metoda permite determinarea necunoscutelor în punctele interioare numai dacă se cunosc valorile unei funcții și derivatele ei de ordinul doi continui pe frontiera domeniului.

Folosind a doua formulă a lui Green se poate trece de la rezolvarea unei integrale de volum la rezolvarea unei integrale de suprafață care numeric simplifică mult calculele. Practic, se trece de la discretizarea volumului la discretizarea suprafeței pentru elemente tridimensionale și de la discretizarea suprafeței elementului la discretizarea conturului acestuia pentru elemente plane. Necunoscutele problemei în metoda elementelor de frontieră, pentru elemente plane, sînt deplasările după care cele două direcții și reacțiunile în punctele nodale rezultate din discretizare. Scriind ecuația integrală pentru fiecare punct pe frontieră rezultă un sistem de $2N$ ecuații care rezolvate numeric dau soluțiile în punctele nodale. În funcție de valorile deplasărilor și forțelor de pe conturul elementului se determină valorile deplasărilor și tensiunilor în punctele interne. În baza relațiilor matematice prezentate se pot întocmi programe de calcul în limbaj FORTRAN IV sau FORTRAN 77 care să rezolve probleme aplicative în mecanica solidului deformabil. Programele sursă întocmite sînt mult mai simple. Timpul de calculator pentru citirea programului sursă este mult mai mic. De asemenea, în exemplele analizate prin metoda elementelor de frontieră, timpul de calculator se reduce cu aproximativ 30—40% față de metoda elementelor finite. Pentru obținerea tensiunilor și deplasărilor în punctele dorite prin metoda elementelor finite se efectuează o discretizare adecvată, care, pentru elemente cu geometrie complexă, se poate realiza mai dificil. Astfel, din discretizare pot apare elemente de formă neregulată pentru care trebuie mărit ordinul de integrare în obținerea unei bune precizii.

Discretizarea mediilor infinite prin metoda elementelor finite este mult mai dificil de realizat. Metoda elementelor de frontieră elimină aceste neajunsuri deoarece se poate efectua o discretizare a frontierei oricît de complexă.

Datele de intrare în metoda elementelor de frontieră sînt mult mai reduse și mai simple. Folosirea acestor programe este accesibilă și ușor de utilizat fiind necesare calculatoare de capacitate mică și medie. Precizia rezultatelor poate fi îmbunătățită prin introducerea unor funcții de interpolare liniare sau de grad superior.

Se poate extinde analiza elementelor în domeniul elastodinamic și în domeniul de comportare elasto-plastică a materialului.

Metoda se aplică cu bune rezultate în curgerea fluidelor, în probleme de potențial și în mecanica ruperii.

Extinderea studiului pentru materiale neomogene permite rezolvarea unor probleme de contact ce apar în inginerie.

Analizele experimentale ale acestor elemente au scos în evidență concordanța rezultatelor.

Primită la redacție la 7 noiembrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. EDS. C. A. BREBBIA, T. FUTAGAMI, M. TANAKA, *Boundary Elements*, Proc. Vth Int Conf. Hiroshima, Japan, nov. 1983, C.M.L. Southampton, Springer Verlag, 1983.
2. C. A. BREBBIA, S. WALKER, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newness-Butterworths, London, 1980.
3. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1981.
4. S. L. CROUCH, A. M. STARFIELD, *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, George Allen & Unwin, 1983.
5. E. ALARCON, P. REYRO, *Guia de Introduction al Metodo de los Elementos de Contorno*, Seccion de Publicaciones ETS Ingenieros Industriales, Madrid, 1983.
6. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Comparison Study by FEM and BEM for some plane structural elements*, XVI-th Yugoslav Congress of Theoretical and Applied Mechanics, May-June 1984, Becici, Yugoslavia.
7. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Static and Dynamic Analysis by FEM and BEM of the Reinforced Concrete Hybrid Structures*, IKM Weimar, 2—7 sept, 1984, R.D.G.
8. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Three Dimensional State Stress and Strain of the Reinforced Concrete Short Cantilevers Dynamically Charged by FEM and BEM*, Int. Conf. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Split, 17—21 sept. 1984, Yugoslavia.
9. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. tehnică, București, 1983.
10. V. S. PARTON, P. I. PERLIN, *Integral Equations in Elasticity*, Mir Publ., Moscow, 1982.
11. K. TAKAKUDA, *On integral Equation Methods for Elastic Boundary Value Problems*, Bulletin JSME, **I—26**, 212, p. 186—193, Febr (1983) **II—26**, 219, p. 1488—1494, Sept (1983); **III—27**, 226, p. 625—632, April (1984).
12. M. TANAKA, *Some Recent Advances in BEM*, Applied Mechanics Reviews, **36**, 5, p. 627—634 (1983).
13. U. HEISE, *Comparison of round-off errors in integral equation formulations of elastostatistical boundary value problems*, Computer Meth. Appl. Mech. Eng., **28**, p. 145—177 (1981).
14. V. F. POTERAȘU, *Boundary Element Techniques*, Lectures ETS Ingenieros Industriales, Madrid, Febr., 1984.
15. J. MACKERLE, T. ANDERSSON, *Boundary Element Software in Engineering*, Advances in Engineering Software, **6**, 2, p. 66—103 (1984).
16. H. ANTES, M. OTTENSTREUER, G. SCHMID, *Randelemente*, Technical Reports, 82—2, 1982, Ruhr Universitat Bochum, Institut fur Konstruktiven Ingebieurbau.
17. O. TULLBERG, *A Study of the Boundary Element Method*, Publ. 83 : 3, Dept. Struct. Mechanics, Chalmers Univ. of Tehnology, 1983.
18. L. WARDLE, *An Introduction to the Boundary Element Method*, pp. 525—553, în Ed. John Noye, Computational Techniques for Differential Equations, North-Holland, 1984.

ASPECTE ALE CURGERII INELARE ÎN CANALE CAPILARE

de ELENA SOARE, FLOREA MINESCU
Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Lucrarea tratează cîteva aspecte ale curgerii inelare în canale de dimensiuni capilare, cu secțiune constantă. Se deduc legile de curgere în canale cilindrice și prismatice, evidențiind unitatea acestor legi. Se fac referiri la modelele pentru mediile poroase, cu deosebire pentru explicarea, prin acest regim de curgere (inelară), a unor comportări paradoxale din punct de vedere al permeabilității relative pentru faza neumezitoare.

1. INTRODUCERE

Mediile poroase constituite de rocile colectoare de hidrocarburi sînt alcătuite din pori, care sînt canale de dimensiuni capilare. Curgerea prin aceste medii, privită la scara porilor individuali, este un fenomen foarte complex : descrierea exactă nefiind posibilă, datorită formei și dimensiunii infinit de variate a porilor, precum și a regimurilor de curgere care diferă de la un canal la altul (prin regim de curgere înțelegem : curgere omogenă, curgere inelară, deslocuire etc.). În această lucrare va fi tratată problema curgerii inelare în canale capilare de secțiune constantă. Studiul curgerii în cilindri netezi va fi extins aici și pentru canale de forma unor prisme cu secțiune triunghiulară, obținînd unele rezultate de interes practic privind acest regim de curgere în pori. Unele din ipotezele acceptate în studiul nostru (curgerea laminară a fluidelor newtoniene, lipsa efectelor de capăt, lipsa gravitației) sînt cel mai adesea folosite în studii de acest fel.

2. CURGEREA INELARĂ ÎN CILINDRI NETEZI

La curgerea inelară într-un cilindru, condiția de interferență minimă (energie minimă) este satisfăcută de o dispunere concentrică a fazelor, cea umezitoare (indicele U) la exterior și cea neumezitoare (indicele N) la interior, rezultă de aici o simetrie a curgerii față de axa cilindrului.

Ecuațiile Navier-Stokes se reduc la forma [1]

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{1}$$

în care v este viteza, p presiunea, μ vîscozitatea și z direcția de curgere.

Ecuația (1) este valabilă pentru ambele faze care curg.

Considerînd două puncte pe axa tubului la distanța L, unde presiunile sînt p_1, respectiv p_2, avem :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p_1 - p_2}{L}. \tag{2}$$

Făcînd abstracție de greutatea lichidului, integrala ecuației diferențiale (1) este :

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + c_1 \cdot \ln r + c_2. \tag{3}$$

Deoarece viteza în axa tubului ($r = 0$) trebuie să aibă o valoare finită, rezultă

$$c_1 = 0. \tag{4}$$

Astfel, ecuația (3) ia forma :

$$v = -\frac{\Delta p}{4\mu L} \cdot r^2 + c_2, \tag{5}$$

unde $\Delta p = p_1 - p_2$ reprezintă căderea de presiune pe distanța L, aceeași pentru ambele faze care curg.

Condiția la limită pentru faza umezitoare este (fig. 1.) :

$$\text{la } r = 0, \qquad v = 0, \tag{6}$$

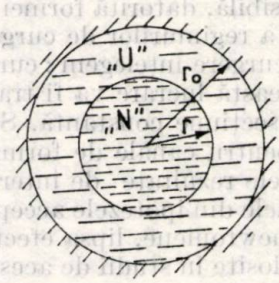


Fig. 1. — Curgerea inelară printr-un canal cilindric.

de unde rezultă :

$$c_2 = \frac{\Delta p}{4\mu_U L} \cdot r_0^2 \tag{7}$$

și, mai departe,

$$v_U = \frac{\Delta p}{4\mu_U L} \cdot r_0^2 \cdot (1 - R^2), \tag{8}$$

în care $R = r/r_0$.

Această lege este valabilă pînă la $R = R_1$ (fig. 1).

Condiția la limită pentru faza neumezitoare este :

$$\text{la } R = R_1, \qquad v_U = v_N, \tag{10}$$

de unde rezultă

$$c_2 = \frac{\Delta p}{4L} \frac{r_0^2 - r_1^2}{\mu_U} + \frac{r_1^2}{\mu_N} \tag{11}$$

și, mai departe,

$$v_N = \frac{\Delta p}{4\mu_N L} [H \cdot (1 - R_1^2) + R_1^2 - R^2], \tag{12}$$

unde $H = \mu_N/\mu_U$.

Condiția la limită (10) presupune lipsa unei viteze relative a celor două faze la nivelul interfeței. Această presupunere este justificată de cercetările făcute asupra mișcării picăturilor de lichid sau a bulelor de gaz în diferite medii fluide de mai mulți cercetători, citați în [2], care au ajuns

la concluzia că la nivelul interfețelor componenta tangențială a vitezei este zero.

Prin extindere, rezultatul lor se poate aplica și în cazul de față, condiția fiind similară.

Debitele celor două faze sînt date de expresiile :

$$Q_U = \frac{\pi}{8}\frac{r_0^4}{\mu_U}\frac{\Delta p}{L}\cdot(1 - R_1^2)^2 \tag{13}$$

și

$$Q_N = \frac{\pi}{8}\frac{r_0^4}{\mu_N}\frac{\Delta p}{L}\cdot[2H\cdot(R_1^2 - R_1^4) + R_1^4]. \tag{14}$$

Expresiile (13) și (14) se regăsesc sub o formă echivalentă în [3].

Se poate remarca faptul că Q_U și Q_N depind de R_1, dar numai Q_N depinde de H. În fapt, problema trebuie pusă într-un mod diferit : valorile lui Q_U, Q_N și H determină poziția interfeței, respectiv îl determină pe R_1. Notînd $\alpha = Q_U/Q_N$, din relațiile (13) și (14) rezultă :

$$R_1^2 = \frac{1 + \alpha - \sqrt{\alpha\,(\alpha + 1/H)}}{1 - \alpha/H + 2\,\alpha}. \tag{15}$$

Cu ale cuvinte, dacă într-un capilar cilindric de rază r_0 se introduc două fluide (unul cu caracter umezitor pentru peretele capilarului, celălalt neumezitor) sub un gradient de presiune $\Delta p/L$, avînd debitele în raportul $\alpha = Q_U/Q_N$, faza neumezitoare se va plasa central, extinzîndu-se pînă la raza $r_1 = R_1 \cdot r_0$, R_1 fiind dat de relația (15).

O altă remarcă este aceea că forțele de interfață nu sînt evidențiate în tratarea anterioară. Această lipsă se justifică prin aceea că diferența capilară de presiune la nivelul interfeței nu are componentă axială, iar componenta radială, datorită simetriei axiale a curgerii, nu modifică caracterul acesteia. Pentru faza neumezitoare, interfața are același efect ca un perete mobil.

Introducînd noțiunea de saturație a canalului în cele două faze, ca raportul dintre volumele fazelor și volumul total al canalului, se poate scrie :

$$S_U = 1 - R_1^2, \tag{16}$$

$$S_N = R_1^2. \tag{17}$$

Astfel, relațiile debitelor iau următoarea formă :

$$Q_U = \frac{\pi}{8}\frac{r_0^4}{\mu_U}\frac{\Delta p}{L}\cdot S_U^2, \tag{18}$$

$$Q_N = \frac{\pi}{8}\frac{r_0^4}{\mu_N}\frac{\Delta p}{L}S_N\cdot[2H\cdot(1 - S_N) + S_N]. \tag{19}$$

Dacă notăm cu Q_{U0} și Q_{N0} debitele celor două faze la curgerea monofazică, adică

$$Q_{U0} = \frac{\pi}{8} \frac{r_0^4}{\mu_U} \frac{\Delta p}{L}, \tag{20}$$

$$Q_{N0} = \frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\mu_N} \frac{\Delta p}{L}, \tag{21}$$

notînd cu $\bar{Q}_U$ și $\bar{Q}_N$ rapoartele dintre debitele fazelor și debitele de la curgerea monofazică, rezultă

$$\bar{Q}_U = S_U^2, \tag{22}$$

$$\bar{Q}_N = S_N[2H(1 - S_N) + S_N]. \tag{23}$$

O primă observație asupra ultimelor două relații este aceea că numai $\bar{Q}_N$ depinde de contrastul de vîscozitate H sau, cu alte cuvinte, curgerea fazei umezitoare are loc în mod independent de proprietățile fazei neumezitoare dacă cele două faze sînt dispuse concentric într-un tub cilindric.

O a doua observație este aceea că $\bar{Q}_U \leqslant 1$, pe cînd $\bar{Q}_N \leqslant 1$ pentru $H \leqslant 1$ și $\bar{Q}_N \geqslant 1$ pentru $H \geqslant 1$.

În sfîrșit, se poate observa că $\bar{Q}_N$ prezintă o valoare maximă pentru o saturație în fază neumezitoare $S_N = H/(2H-1)$, și anume :

$$(\bar{Q}_N)_{max} = \frac{H^2}{2H - 1}. \tag{24}$$

Pentru $H < 1$ $(\bar{Q}_N)_{max}$ nu are semnificație fizică, punctul de maxim corespunzînd unei saturații supraunitare.

Faptul că $(\bar{Q}_N)_{max}$ poate fi supraunitar are o importanță practică deosebită, în sensul că prin canale pot curge fluide cu vîscozitate foarte mare la gradienți mici de presiune, dacă curgerea este inelară, faza cu vîscozitate mică fiind dispusă periferic. Acest fapt este cunoscut în tehnologia transportului țițeiurilor foarte vîscoase prin conducte.

În ceea ce privește cazul particular al mediilor poroase, concluzia de mai sus poate explica, cel puțin în parte, existența unor anomalii ale permeabilității relative pentru faza neumezitoare la curgerea bifazică care, uneori, ia valori supraunitare, prin aceea că într-o fracție mare din volumul de pori are loc acest regim de curgere.

Pentru exemplificarea celei de a treia observații asupra relației (23) vom prezenta în tabelul 1 evaluarea numerică a acesteia pentru $H \geqslant 1$.

Pentru $H = 2 \ldots 100$, datele din tabel sînt prezentate grafic în figura 2.

Tabelul 1

Valori ale lui $\bar{Q}_N$ în funcție de S_N și H.

H \ S_N	0,0025	0,01	0,04	0,15	0,25	0,64	0,81	0,9025	1
1	0,005	0,0199	0,0784	0,277	0,4375	0,8704	0,9639	0,9905	1
2	0,00998	0,0397	0,1552	0,532	0,812	1,3312	1,2712	1,1665	1
5	0,0249	0,0991	0,3856	1,297	1,957	2,7136	2,1951	1,69	1
10	0,04988	0,1981	0,7696	2,572	3,812	5,0175	3,734	2,574	1
50	0,0997	0,3961	1,5376	5,112	7,562	9,6256	6,8121	4,334	1
100	0,4987	1,908	7,6816	25,52	37,56	46,48	31,436	18,41	1
200	0,9975	4,04	15,35	51,02	75,6	92,56	62,81	36,012	1

Pentru $S_N = 0{,}5$ și $H = 200$, rezultă $\bar{Q}_N = 100$. Acest lucru înseamnă că la saturații egale în cele două faze, debitul fazei neumezitoare este de 100 ori mai mare decît dacă faza respectivă ar curgè singură sub același

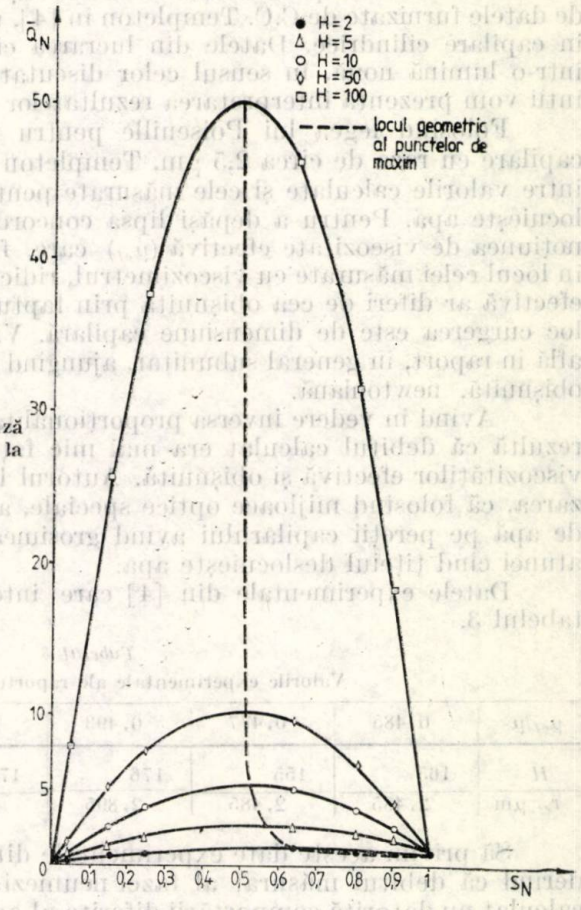


Fig. 2. — Debitul adimensional de fază neumezitoare în funcție de saturație la curgerea inelară.

gradient de presiune. La prima vedere acest fapt pare surprinzător însă, dacă ținem seama că gradientul de viteză este maxim în apropierea peretelui și devine foarte mic în zona centrală, unde curgerea se apropie ca natură de cea potențială, atunci faptul pare absolut normal.

Valorile maxime ale lui $\bar{Q}_N$ sînt date în tabelul 2.

Tabelul 2

$(\bar{Q}_N)_{max}$ în funcție de S_N și H.

H	1	2	5	10	50	100	200
S_N	1	0,66....	0,555...	0,526	0,513	0,503	0,501
$(\bar{Q}_N)_{max}$	1	1,33...	2,778	5,263	10,256	50,25	100,25

Se observă că pentru contraste medii și mari de vîscozitate, saturația în fază neumezitoare pentru care rezultă un $(\bar{Q}_N)_{max}$ este în apropierea valorii $S_N = 0{,}5$.

Verificarea experimentală a observațiilor anterioare este permisă de datele furnizate de C.C. Templeton în [4], urmare a studiului dislocuirii în capilare cilindrice. Datele din lucrarea citată vor fi interpretate aici într-o lumină nouă, în sensul celor discutate în prezentul paragraf. Mai întîi vom prezenta interpretarea rezultatelor dată de C.C. Templeton.

Folosind legea lui Poiseuille pentru descrierea curgerii în canale capilare cu raza de circa 2,5 μm, Templeton a constatat o neconcordanță între valorile calculate și cele măsurate pentru debitul de țiței, care deslocuiește apa. Pentru a depăși lipsa concordanței, Templeton a introdus noțiunea de vîscozitate efectivă (μ_{ef}) care, folosită în legea lui Poiseuille în locul celei măsurate cu vîscozimetrul, ridica neconcordanța. Vîscozitatea efectivă ar diferi de cea obișnuită prin faptul că interstițiul prin care are loc curgerea este de dimensiune capilară. Vîscozitatea astfel definită se află în raport, în general subunitar, ajungînd pînă la 0,477 cu vîscozitatea obișnuită, newtoniană.

Avînd în vedere inversa proporționalitate între debit și vîscozitate, rezultă că debitul calculat era mai mic față de cel măsurat în raportul vîscozităților efectivă și obișnuită. Autorul lucrării citate mai face precizarea, că folosind mijloace optice speciale, a constatat prezența unui film de apă pe pereții capilarului avînd grosimea cuprinsă între 28 — 44 Å, atunci cînd țițeiul deslocuiește apa.

Datele experimentale din [4] care interesează aici sînt reluate în tabelul 3.

Tabelul 3

Valorile experimentale ale raportului μ_{ef}/μ [4]

μ_{ef}/μ	0,485	0,477	0,493	0,53	0,55	0,556
H	165	155	176	176	173	173
r_e, μm	2,485	2,485	2,895	2,895	2,58	2,58

Să privim aceste date experimentale din alt punct de vedere. Considerînd că debitul măsurat al fazei neumezitoare este mai mare decît cel calculat nu datorită comportării diferite al acesteia dinpunct de vedere al vîscozității pentru care nu pledează nici o teorie asupra curgerii, ci datorită existenței filmului de apă care nu este imobil cum consideră autorul citat, ceea ce înseamnă că

$$\bar{Q}_N = \mu_{Nef}/\mu_N.$$

Pentru datele din tabelul 3 se obțin, pe baza acestei ipoteze, următoarele rezultate (tabelul 4) :

Tabelul 4

Grosimea filmului mobil de apă

H	165	155	176	176	173
r_0, μm	2,485	2,485	2,895	2,895	2,58
S_N	0,9936	0,9928	0,994	0,995	0,9952
R_1	0,9968	0,9964	0,997	0,9975	0,9978
$(r_0 - r_1)$, Å	79,5	89,5	86,8	72,3	61,9

Se poate constata o concordanță relativ bună între grosimile filmului de apă calculat (61,9 — 89,5) Å și cel măsurat (28—44) Å, dacă ținem seama de limitările introduse de forma cilindrică a canalului în măsurarea grosimii filmului și de faptul că este puțin probabil ca diametrul canalului și grosimea filmului de apă să fie constante pe toată lungimea. Rezultă că în acest film mobil se consumă circa jumătate din energia necesară curgerii.

3. CURGEREA INELARĂ ÎN CANALE CU SECȚIUNE TRIUNGHIULARĂ

Vom trata în acest paragraf o problemă similară cu cea din paragraful precedent, cu precizarea că se va studia numai cazul cînd faza neumezitoare, dispusă central, ocupă un domeniu mai restrins decît acela în care curgerea se poate considera simetrică, astfel încît forma nucleului central este cilindrică. În caz contrar, nucleul central are o formă care tinde către cea a canalului, rezultînd din interacțiunea forțelor de frecare și a celor de interfață, fiind destul de greu de descris,

Legea de variație a vitezei în secțiune este următoarea [5]:

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu L}\,\frac{y + r_i}{r_i}\left(\frac{2r_i - y}{3} - x^2\right), \tag{25}$$

în care r_i este raza cercului înscris în triunghiul echilateral de secțiune, iar x și y coordonatele carteziene.

Definind pe R în mod silmilar cu cel de la secțiunea circulară, $R_1 = r_i/r_i$, vom evalua numeric relația (25) într-o secțiune mediană longitudinală prin canal, pentru a putea aprecia domeniul în care curgerea este aproximativ simetrică. Rezultatele acestei evaluări sînt date în tabelul 5 și figura 3.

Tabelul 5

Variația vitezei într-o secțiune mediană prin canal

R_1	−1	−0,9	−0,8	−0,6	−0,5	−0,1	0	0,1	0,5	0,6	0,8	1	1,6	1,8	2
ct. v	0	0,841	1,57	2,7	3,2	3,97	4	3,97	3,37	3,13	2,6	2	0,4	0,11	0

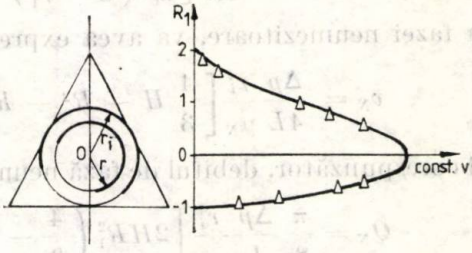


Fig. 3. — Variația vitezei într-o secțiune mediană printr-un canal prismatic la curgerea omogenă.

Din tabelul 5 și figura 3 se poate constata că în secțiunile care trec prin vîrfurile triunghiului, în care asimetria este cea mai pronunțată, pentru valori ale lui $R_1 < 0{,}5$, vitezele nu mai diferă decît foarte puțin, așa încît putem aproxima curgerea cu una simetrică. În aceste condiții

putem afirma că pentru $R_1 \geqslant 0{,}5$, legea de variație a vitezei în secțiune este dată de relația (25), iar pentru $R_1 < 0{,}5$ legea de variație a vitezei în secțiune se poate aproxima prin relația (5). Pentru determinarea constantei de integrare, c_2, se pune condiția la limită :

$$\text{La } r = r_1, \quad v_U = v_N. \tag{26}$$

Pentru a putea calcula viteza v_U la $r = r_1$, este necesar ca relația (25) să fie trecută în coordonate cilindrice. Rezultă

$$v_U = \frac{\Delta p}{4L} \frac{r_i^2}{3\mu_U} [4 - 3R_1^2 - R_1^3 \sin\theta(1 - 4\cos^2\theta)]. \tag{27}$$

Ultimul termen din relația (37) poate fi neglijat în comparație cu ceilalți, astfel încît, pentru $R_1 \leqslant 0{,}5$, aceasta devine :

$$v_U = \frac{\Delta p}{4\mu_U L} \cdot r_1^2 (4/3 - R_1^2). \tag{28}$$

Pentru a vedea în ce măsură ultima relație este o bună aproximare, vom evalua numeric această relație și o vom compara cu valoarea medie pe secțiune obținută cu relația (25). Rezultatele sînt redate în tabelul 6.

Tabelul 6

Evaluarea comparativă a relațiilor (25) și (28)

R_1	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,2	0,1	0
ct. v_U (rel. 25)	3,25	3,392	3,52	3,634	3,73	3,884	3,97	4
ct. v_U (rel. 28)	3,25	3,39	3,52	3,63	3,73	3,88	3,97	4

Se poate constata o perfectă concordanță între cele două relații pentru $R_1 \leqslant 0.5$. Pentru valori mai mari ale lui R_1 diferențele sînt mici la început, apoi devin relativ mari.

Condiția la limită (26) conduce la următorul rezultat :

$$c_2 = \frac{\Delta p}{4L} \left[\frac{r_i^2}{\mu_U} \left(\frac{4}{3} - \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) + \frac{r_1^4}{\mu_N} \right], \tag{29}$$

iar viteza fazei neumezitoare, va avea expresia

$$v_N = \frac{\Delta p}{4L} \frac{r_i^4}{\mu_N} \left[\frac{4}{3} H - R^2 - R_1^2 (H - 1) \right] \tag{30}$$

și, în mod corespunzător, debitul de fază neumezitoare :

$$Q_N = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p}{L} \frac{r_i^4}{\mu_N} \left[2HR_1^2 \left(\frac{4}{3} - R_1^2 \right) + R_1^4 \right], \tag{31}$$

iar debitul de fază umezitoare :

$$Q_U = \frac{\Delta p}{L} \frac{r_i^4}{\mu_U} \left[0{,}78 - \frac{\pi}{3} R_1^2 + \frac{\pi}{9} R_1^4 \right]. \tag{32}$$

Procedînd ca în cazul canalului cilindric, relațiile (31) și (32) se pot scrie în funcție de saturația în fazele respective :

$$Q_N = 1{,}07 \frac{\Delta p}{L} \frac{r_i^4}{\mu_N} [S_N^2 + H (1{,}612\, S_N - 2S_N^2)], \tag{33}$$

respectiv

$$Q_U = \frac{\Delta p}{L} \frac{r_i^4}{\mu_N} (0{,}995\, S_U^2 - 0{,}178\, S_U). \tag{34}$$

Mai departe, se pot obține expresiile lui $\bar{Q}_N$ și $\bar{Q}_U$:

$$\bar{Q}_U = S_U^2 - 0{,}228\, S_U(1 - S_U) \tag{35}$$

și

$$\bar{Q}_N = 1{,}372\, S_N[S_N + 2H\,(0{,}806 - S_N)]. \tag{36}$$

Relațiile (35) și (36) sînt valabile pentru $S_N \leqslant 0{,}151$. Comparînd aceste relații cu cele similare de la canalele cilindrice se observă că debitul relativ de fază neumezitoare este dat de relații asemănătoare, pe cînd debitul relativ de fază umezitoare este dat de relații care diferă atît formal cît și, evident, cantitativ.

Singhal și Somerton [6] care au studiat curgerea simultană în canale prismatice, reluînd unele din rezultatele lui Yuster, folosesc pentru debitele relative ale celor două faze aceleași relații ca pentru secțiunea circulară, adică relațiile (22) și (23), ceea ce nu concordă cu rezultatele noastre.

Evaluarea relației (36) pentru $S_N \leqslant 0{,}15$ este dată în tabelul 7.

Tabelul 7

Debitul relativ de fază neumezitoare funcție de S_N și H.

H \ S_N	0	0,0025	0,01	0,04	0,15
1	0	0,00552	0,022	0,0863	0,3
2	0	0,0111	0,0438	0,17	0,57
5	0	0,0303	0,109	0,423	1,381
10	0	0,0555	0,219	0,844	2,73
50	0	0,277	1,092	4,21	13,5
100	0	0,554	2,184	8,42	27,0
200	0	1,107	4,368	16,83	54,0

Comparînd datele din tabelul 7 cu cele corespunzătoare din tabelul 1 constatăm o diferență relativ mică : circa 8%, diferențele mai mari apărînd în saturații mai mici în fază neumezitoare.

Avînd în vedere că valoarea maximă a lui $\bar{Q}_N$ se obține la valori superioare lui 0,15 pentru S_N, relația (36) nu se poate folosi pentru această evaluare. De asemenea, nu există nici un temei pentru folosirea relației (23) în acest scop. Din contră, există indicii suficiente pentru a arăta că folosirea relației (23) pentru calculul lui $\bar{Q}_N$ nu se justifică pentru saturații mai mari, pentru că pe măsură ce S_N crește, caracterul asimetric al curgerii se accentuează.

Notăm aici faptul că în considerentele anterioare s-a făcut ipoteza că ambele faze curg. Cazul în care faza periferică ar fi imobilă, ar echivala cu curgerea printr-un canal avînd secțiunea determinată de forma meniscului interior. Această formă va fi cilindrică dacă saturația în fază umezitoare este superioară lui 0,4, adică faza umezitoare nu mai este cantonată în diedrele canalului, în mod izolat, ci are loc o unire a celor trei zone periferice din cele trei diedre. În momentul unirii, forma va fi cea de energie minimă de suprafață, adică, în secțiune, forma circulară.

4. ANALIZA COMPARATIVĂ A CURGERII INELARE IN CANALE CAPILARE DE SECȚIUNE CONSTANTĂ

În paragrafele anterioare s-a studiat curgerea inelară în cilindri netezi și în canale prismatice triunghiulare. Pentru celelalte tipuri de canale prismatice se pot extrapola rezultatele de la aceste canale pe baza următoarei observații : cilindrul prezintă simetrie axială, iar prisma triunghiulară prezintă cel mai mare grad de asimetrie. Cu toată această diferență, curgerea prezintă unele caracteristici comune pentru saturații în fază neumezitoare mai mici decît anumite valori limită, determinate de simetrizarea curgerii, Aceste valori limită vor fi specifice ficărui tip de canal. Pentru prisma triunghiulară această saturație limită este de 0,151. Ținînd seama de acest lucru, unele din concluziile rezultate din analiza curgerii inelare în canale de secțiune constantă sînt comune, între care :

— Cînd faza neumezitoare este mai vîscoasă decît cea umezitoare, debitul acestei faze este superior celui de la curgerea monofazică prin aceeași secțiune, creșterea de debit putînd fi de ordinul zecilor și chiar sutelor la contrast mare de vîscozitate. Această concluzie își păstrează valabilitatea numai dacă ambele faze curg ;

— Fenomenele de interfață (fluid-fluid) nu modifică caracterul curgerii decît prin dispunerea fazelor în secțiune care tinde să devină simetrică în raport cu axa canalului. Ținînd seama de aceasta, forțele de interfață nu sînt luate în considerare în calculele efectuate ;

— Curgerea fazei umezitoare nu este influențată de prezența fazei neumezitoare, în sensul că debitul de fază umezitoare este același ca la curgerea omogenă, relativ la aceeași secțiune ;

3 Există indicații în literatură [6] ca la anumite saturații, faza umezitoare poate fi imobilă, fără precizări concrete asupra acestor saturații. Stabilirea condițiilor în care o fază umezitoare este imobilă în timp ce o fază neumezitoare curge printr-un canal ar avea o importanță cu totul deosebită în stabilirea caracterului curgerii la nivel microscopic, în porii rocilor colectoare. O primă indicație în acest sens ar fi aceea că în cilindrii netezi fenomenul blocării fazei umezitoare la periferia canalului sub forma unui inel continuu nu este posibilă, indicație relevată de experiențele lui CC Templeton [1], precum și tendința care se manifestă la viteze mici de curgere, anume aceea a transformării inelului continuu sau dscontinuu în dopuri, determinate de condiția de suprafață minimă [7]. În schimb, în canalele prismatice acest lucru este posibil pînă la coalescența fazei neumezitoare din diedrele canalului. Spre exemplu, pentru prisma triunghiulară

saturația limită pînă la care faza umezitoare ar putea rămîne imobilă ar fi de 0,4, iar la cea pătratică de 0,215.

Se poate menționa aici că odată cu inițierea curgerii fazei umezitoare de vîscozitate mai mică, debitul de fază umezitoare va prezenta un salt din motivele menționate mai sus cu privire la variația gradientului în secțiunea transversală.

În cazul în care faza neumezitoare dispusă central, are o vîscozitate mai mică decît cea umezitoare, debitul acesteia va fi mai mic decît cel de la curgerea omogenă în secțiunea ocupată de faza neumezitoare. Această scădere are același sens cu creșterea menționată mai sus în cazul fazei umezitoare cu vîscozitate mai mică.

Discuția de mai sus este strict valabilă cînd avem de-a face cu un canal omogen din punct de vedere al umidibilității. Existența unor zone de umidibilitate diferită (eterogenitate a umidibilității) modifică fenomenele, imprimîndu-le un caracter mai mult sau mai puțin aleatoriu.

Utilitatea demersului nostru se poate regăsi în interpretarea unor anomalii ale permeabilității relative pentru faza neumezitoare la curgerea bifazică prin medii poroase, mai precis în cazul apariției unor permeabilități relative supraunitare [8].

Primită la redacție la 3 mai 1984

5. BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1967.
2. I. P. FENERSTEIN, A. C. CHAPPELEAR, *A Creeping Flow Model of a Deformable Drop Approaching a Plane Interface*, Can. J. Ch. Eng. **50**, oct. (1972).
3. M. C. WILLIAMS, *Migration of Two Liquid Phases in Capillaries Extrusion : An Energy Interpretation*, AIChE Jour., nov., 1975.
4. C.C. TEMPLETON, *A Study of Displacement in Microscopic Capillaries*, Trans. AIME, **201** (1954).
5. J. FLOREA ș.a., *Mecanica fluidelor — Culegere de probleme*, EDP, București, 1976.
6. A. C. SINGHAL, W. H. SOMERTON, *Quantitative Modelling of Immiscible Displacement in Porous Media*, Rev. IFP, nov. — dec., 1977.
7. G. MANOLESCU, E. SOARE, *Fizico-chimia zăcămintelor de hidrocarburi*, EDP, București, 1981.
8. G. MANOLESCU, *Asupra posibilității unor permeabilități relative supraunitare*, Bul, IPG, **XXVI** (1976).

DETERMINAREA IMAGINILOR LAPLACE INVERSE ALE UNOR FUNCȚII HIPERBOLICE

de WILHELM W. KECS
Universitatea București

În lucrare se arată că funcțiile complexe $\frac{\operatorname{sh} xp/a}{p^2 \operatorname{sh} lp/a}$, $\frac{\operatorname{ch} xp/a}{p^2 \operatorname{sh} lp/a}$, $p \in \mathbb{C}$, $x \in [0, l]$, $a, l > 0$ reprezintă imagini Laplace în sens clasic ale unor funcții original și se determină expresiile acestor funcții original. De asemenea, se arată că pentru funcțiile complexe $\frac{\operatorname{sh} xp/a}{p \operatorname{sh} lp/a}$, $\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}$ imaginile Laplace inverse există, numai în spațiul distribuțiilor $K'_+(\mathbb{R})$; totodată se determină expresiile distribuțiilor original. În final se dă soluția problemei propagării vibrațiilor longitudinale în bare elastice cu condiții la limită în tensiuni și interpretarea mecanică a soluției.

1. *Determinarea transformatei Laplace inversă a funcției*

$$\frac{\operatorname{sh} xp/a}{p^2 \operatorname{sh} lp/a}, \qquad x \in [0, l],\ a, l > 0,\ p \in \mathbb{C}.$$

La început vom demonstra unele proprietăți pentru funcția complexă :

$$F(p) = \frac{\operatorname{sh} xp/a}{p^2 \operatorname{sh} lp/a}, \qquad x \in [0, l],\ a,\ l > 0,\ p = \sigma + ir \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

PROPOZIȚIA 1.1. Funcția $F(p)$ este o funcție meromorfă admițînd următorii poli : polul dublu real $p = 0$ și polii simpli pur imaginari complex conjugați $p_k = k\pi ia/l$, $\bar{p}_k = -k\pi ia/l$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Demonstrație. Conform unei teoreme din teoria funcțiilor complexe ([2], p. 167), polii funcției $F(p)$ sînt zerourile funcției $p^2 \operatorname{sh} lp/a$. Rădăcinile ecuației $p^2 \operatorname{sh} lp/a$ sînt :

$p = 0$ rădăcină triplă,

$p_k = k\pi ia/l$, $\bar{p}_k = -k\pi ia/l$, $k \in N$ rădăcini simple.

Deoarece $p = 0$ este pol aparent pentru funcția $\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}$, rezultă că $p = 0$ este un pol dublu.

PROPOZIȚIA 1.2. Funcția complexă :

$$\varphi(p) = p^2 F(p) \tag{1.2}$$

este mărginită pe familia de cercuri C_k : $|p| = R_k$, unde $R_k = (2k + 1)\pi a/2l$, $k \in N^* = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Demonstrație. Demonstrația afirmației precedente revine la a arăta că funcția $\varphi(p)$ este mărginită pe familia de cercuri C_k, deci la a demonstra mărginirea sa în următoarele trei domenii :

a) $\qquad -\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$,

b) $\qquad \sigma < -\sigma_0$,

c) $\qquad \sigma_0 < \sigma$,

unde $\sigma_0 = a/l < R_0$. Cercul de rază minimă se obține pentru

$$k = 0, \; R_0 = \pi \, a/2l.$$

Cazul a). Avem

$$|\varphi(p)| = \frac{|e^{xp/a} - e^{-xp/a}|}{|e^{lp/a} - e^{-lp/a}|} \leqslant \frac{|e^{xp/a}| + |e^{-xp/a}|}{|e^{lp/a} - e^{-lp/a}|} \leqslant \frac{\operatorname{ch} x\sigma/a}{|\operatorname{sh} lp/a|}, \tag{1.3}$$

unde am folosit relațiile :

$$|e^{\pm xp/a}| = e^{\pm x\sigma/a}, \; |e^{\pm ix\sigma/a}| = e^{\pm x\sigma/a}.$$

Se observă că numărătorul este o funcție pară strict crescătoare pe $[0, \sigma_0]$ a cărei valoare maximă, pe segmentul $[-\sigma_0, \sigma_0]$, este $\operatorname{ch} x\sigma_0/a$.

Așadar, relația (1.3) devine

$$|\varphi(p)| \leqslant \frac{\operatorname{ch} x\sigma_0/a}{|\operatorname{sh} lp/a|}.$$

Deoarece $\operatorname{sh} lp/a$ este o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi ai/l$, rezultă că valorile funcției $\operatorname{sh} lp/a$ pentru $p \in D = \{0 \leqslant \operatorname{Im} p \leqslant 2\pi a/l, \; -\sigma_0 \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \sigma_0\}$ se repetă. Vom studia minimul funcției $|\operatorname{sh} lp/a|$ pe cele două arce de cerc conținute în dreptunghiul D. Funcția $|\operatorname{sh} lp/a|$ este o funcție reală continuă în variabilele $(\sigma, \tau) \in D \setminus D^*$, unde $D^* = \{|p| < r \cdot \operatorname{Im} p > 0\} \cup \{|p - \pi a/l| < r\} \cup \{|p - 2\pi a/l| < r \cdot \operatorname{Im} p < 2\pi a/l\}$, $r < \dfrac{\pi a}{4l}$ (fig. 1). Domeniul $D \setminus D^*$ este un compact.

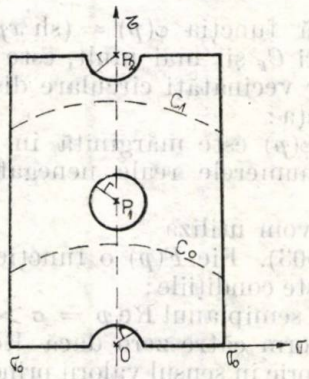


Fig. 1

În figura 1 am reprezentat în planul complex compactul $D \setminus D^*$ obținut din dreptunghiul D din care am scos două domenii semicirculare de aceeași rază $r < \sigma_0$ cu centrele în polii O și p_2 și domeniul circular de rază $r < \sigma_0$ centrată în polul p_1. C_0 și C_1 reprezintă arce de cerc de raze $R_0 = \pi a/2l$, $R_1 = 3\,\pi a/2l$ conținute în compactul $D \setminus D^*$.

În baza proprietăților funcțiilor reale continue definite pe un compact rezultă că există două constante reale și nenegative m și M, așa încît

$m \leqslant |\text{sh}\, lp/a| \leqslant M$. Deoarece domeniul $D \setminus D^*$ nu conține nici unul din zerourile funcției sh lp/a avem $m > 0$.

În consecință, minimul funcției $|\text{sh}\, lp/a|$ pe cele două arce de cerc din $D \setminus D^*$ va fi mai mare sau egal cu m. Deci pe cele două arce de cerc din $D \setminus D^*$ are loc inegalitatea:

$$|\varphi(p)| \leqslant \frac{\text{ch}\, x\sigma_0/a}{m}.$$

Datorită periodicității funcției complexe sh lp/a rezultă că majorarea noastră este valabilă pentru toate arcele de cerc conținute în banda $-\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$.

Cazul b). Conform ipotezei obținem majorarea:

$$|\varphi(p)| \leqslant \frac{e^{x\sigma/a} + e^{-x\sigma/a}}{|e^{l\sigma/a} - e^{-l\sigma/a}|} = \frac{e^{x\sigma/a} + e^{-x\sigma/a}}{e^{-l\sigma/a} - e^{l\sigma/a}} = \frac{1 + e^{2x\sigma/a}}{1 - e^{2l\sigma/a}} e^{-\sigma(x-l)/a}. \quad (1.4)$$

Ținînd seama că $\sigma < -\sigma_0 < 0$, inegalitatea (1.4) ne dă:

$$|\varphi(p)| \leqslant \frac{1 + e^{-2x\sigma_0/a}}{1 - e^{-2l\sigma_0/a}} e^{-\sigma_0(l-x)/a}.$$

Cazul c). Din condiția $\sigma > \sigma_0$ rezultă:

$$|\varphi(p)| \leqslant \frac{e^{x\sigma/a} + e^{-x\sigma/a}}{|e^{l\sigma/a} - e^{-l\sigma/a}|} = \frac{e^{x\sigma/a} + e^{-x\sigma/a}}{e^{l\sigma/a} - e^{-l\sigma/a}} = \frac{1 + e^{-2x\sigma/a}}{1 - e^{-2l\sigma/a}} e^{-(l-x)\sigma/a},$$

deci

$$|\varphi(p)| \leqslant \frac{1 + e^{-2x\sigma_0/a}}{1 - e^{-2l\sigma_0/a}} \cdot e^{-(l-x)\sigma_0/a}.$$

Așadar am arătat că funcția $\varphi(p) = (\text{sh}\, xp/a) / (\text{sh} lp/a)$ este mărginită pe familia de cercuri C_k și, mai mult, este mărginită în tot planul complex cu excepția unor vecinătăți circulare disjuncte centrate în polii funcției. Deci putem enunța:

COROLAR 1.1. Funcția $\varphi(p)$ este mărginită în semiplanul $\text{Re}\, p = \sigma > \sigma_0 = a/l$, adică există numerele reale nenegative m și M, așa încît $m \leqslant |\varphi(p)| \leqslant M$.

În cele ce urmează vom utiliza

TEOREMA 1.1. ([1] p. 503). Fie $F(p)$ o funcție de variabilă complexă $p = \sigma + i\tau$ care îndeplinește condițiile:

i) Este olomorfă în semiplanul $\text{Re}\, p = \sigma > \sigma^\circ > 0$,

ii) $F(p)$ tinde uniform către zero dacă $\text{Re}\, p \geqslant b > \sigma^\circ$, $|p| \to \infty$,

iii) Integrala (improprie în sensul valorii principale) $\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)dp$ este absolut convergentă.

Atunci $F(p)$ este transformata Laplace a unei funcții original $f(t)$ dată de formula Mellin-Fourier:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp, \quad b > \sigma^\circ > 0.$$

Din teorema precedentă urmează că este valabilă.

PROPOZIȚIA 1.3. Funcția complexă $F(p) = (\operatorname{sh} xp/a) / p^2(\operatorname{sh} lp/a)$, $x \in [0, l]$, $a, l > 0$, $p \in C$ este imaginea Laplace a unei funcții original.

Demonstrație. Vom arăta că sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.1.

i) Din propoziția 1.1 rezultă că $F(p)$ este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0 = a/l$.

ii) Din corolarul 1.1. avem

$$|F(p)| = \frac{1}{|p^2|}\left|\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}\right| \leqslant \frac{M}{|p^2|} \xrightarrow[|p|\to\infty]{} 0, \text{ pentru } \operatorname{Re} p \geqslant b > \sigma_0 = a/l.$$

iii) Cu ajutorul corolarului 1.1 putem stabili valabilitatea evaluării :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(b + i\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + \tau^2}\left|\frac{\operatorname{sh} x(b + i\tau)/a}{\operatorname{sh} l(b + i\tau)/a}\right| d\tau \leqslant \frac{M}{b}\pi.$$

Pentru calculul funcției original $f(t) = L^{-1}[F(p)]$ vom folosi :

TEOREMA 1.2. ([1] p. 518) Fie $F(p)$ o funcție meromorfă care satisface următoarele condiții :

i) Este imaginea unei funcții original.

ii) Există un șir de cercuri concentrice C_n : $|p| = R_n$, $R_1 < R_2 < \ldots$ $\ldots < R_n < \ldots \to \infty$, astfel încît nici un cerc C_n nu trece prin polii funcției $F(p)$ și $F(p) \to 0$ cînd p tinde către infinit rămînînd pe cercurile C_n.

Atunci funcția original $f(t)$ este dată de formula

$$f(t) = \theta(t) \sum_k \operatorname{rez}\,(F(p)\, e^{pt};\, p_k), \tag{1.5}$$

unde p_k sînt polii funcției $F(p)$ în ordinea nedescrescătoare a modulelor (nu pot să existe decît un număr finit de poli cu același modul, singularitățile lui $F(p)$ fiind izolate), iar este funcția lui Heaviside.

PROPOZIȚIA 1.4. Transformata Laplace inversă a funcției $F(p) = (\operatorname{sh} xp/a)/p^2 \operatorname{sh} lp/a$ este funcția $f(t, x)$ avînd expresia :

$$f(t, x) = L^{-1}[F(p)] = \theta(t)\frac{tx}{l} + \frac{2l}{a\pi^2}\theta(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{ka\pi t}{l}. \tag{1.6}$$

Demonstrație. Vom arăta că sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.2. Într-adevăr, prima condiție este îndeplinită în baza propoziției 1.3., iar a doua în baza propoziției 1.2.

Pentru determinarea funcției original $f(t, x)$ vom calcula reziduurile funcției $F(p)e^{pt}$ corespunzătoare polului dublu $p = 0$ și ale polilor simpli conjugați $p_k = \pi i a\, k/l$, $\bar{p}_k = -\pi i\, ak/l$, $k \in N$.

Astfel avem :

$$\operatorname{rez}\,[F(p)\, e^{pt}]_{p=0} = \lim_{p\to 0}\left[\frac{d}{dp}\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}\, e^{pt}\right] =$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{\left(te^{pt}\operatorname{sh} xp/a + \frac{x}{a}e^{pt}\operatorname{ch} xp/a\right)\operatorname{sh} lp/a - \frac{l}{a}e^{pt}\operatorname{sh} xp/a \operatorname{ch} lp/a}{\operatorname{sh}^2 lp/a}.$$

Deoarece avem o nedeterminare 0/0 utilizăm formula

$$\lim_{p\to p_0}\frac{f(p)}{g(p)}=\frac{f'(p_0)}{g'(p_0)},\quad \text{unde } f(p_0)=g(p_0)=0. \tag{1.7}$$

Aşadar

$$\operatorname{rez}\,[F(p)\,e^{pt}]_{p=0}= \tag{1.8}$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{t^2e^{pt}\operatorname{sh}\frac{x}{a}p+\frac{2tx}{a}e^{pt}\operatorname{ch}\frac{x}{a}p+\frac{x^2}{a^2}e^{pt}\operatorname{sh}\frac{x}{a}p-\frac{l^2}{a^2}e^{pt}\operatorname{sh}\frac{x}{a}p}{2\frac{l}{a}\operatorname{ch}\frac{l}{a}p}=\frac{tx}{l}.$$

De asemenea avem

$$\operatorname{rez}[F(p)e^{pt}]_{p_k=\pi ika/l}=\lim_{p\to p_k}[(p-p_k)F(p)e^{pt}]=$$

$$=\lim_{p\to p_k}\frac{p-p_k}{\operatorname{sh} lp/a}\lim_{p\to p_k}\frac{\operatorname{sh} xp/a}{p^2}e^{pt}.$$

Utilizînd (1.7), obţinem

$$\lim_{p\to p_k}\frac{p-p_k}{\operatorname{sh} lp/a}=(-1)^k a/l, \tag{1.9}$$

deci

$$\operatorname{rez}\,[F(p)\,e^{pt}]_{p_k=\pi ika/l}=(-1)^k\frac{a}{l}\cdot\frac{-l_i}{\pi^2a^2k^2}e^{i\pi kat/l}\sin\frac{\pi kx}{l}. \tag{1.10}$$

Procedînd în mod analog obţinem :

$$\operatorname{rez}\,[F(p)\,e^{pt}]_{p_k=-\pi ika/l}=(-1)^k\frac{l_i}{a\pi^2k^2}e^{-\pi ikat/l}\sin\frac{\pi kx}{l} \tag{1.11}$$

Din (1.10) şi (1.11) avem :

$$\operatorname{rez}\,[F(p)\,e^{pt}]_{p_k=\pi ika/l}+\operatorname{rez}\,[F(p)\,e^{pt}]_{p_k=-\pi ika/l}=$$

$$=\frac{(-1)^k 2l}{a\,\pi^2k^2}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi kat}{l}. \tag{1.12}$$

În consecinţă, din (1.5), (1.8), (1.12) rezultă că funcţia $F(p)$ are expresia dată de relaţia (1.6).

2. *Determinarea transformatei Laplace inversă a funcţiei*

$$\frac{\operatorname{ch} xp/a}{p^2\operatorname{sh} lp/a}\,a,\ l>0,\ x\in[0,l],\ p=\sigma+i\tau\in C.$$

Avem

PROPOZIŢIA 2.1. Funcţia complexă $G(p)=(\operatorname{ch} xp/a)/p^2\operatorname{sh} lp/a\,x\in$ $\in[0,l]$, $a,l>0$, $p\in C$ este imaginea Laplace a unei funcţii original.

Demonstrație. Vom arăta că sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.1.

i) Funcția $G(p)$ este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0 = a/l > 0$, deoarece polii funcției $G(p)$ sînt : polul triplu real $p = 0$ și polii simpli puri imaginari complex conjugați $p_k = k\pi i a/l$, $\bar{p}_k = -k\pi i a/l$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) Arătăm că funcția $H(p) = (\operatorname{ch} x\, p/a)/\operatorname{sh} lp/a$ este mărginită în semiplanul $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0 > 0$. Într-adevăr avem :

$$|H(p)| = \frac{|e^{xp/a} + e^{-xp/a}|}{|e^{lp/a} - e^{-lp/a}|} \leqslant \frac{e^{x\sigma/a} + e^{-x\sigma/a}}{|e^{l\sigma/a} - e^{-l\sigma/a}|} = \frac{1 + e^{-2x\sigma/a}}{1 - e^{-2l\sigma/a}} e^{-(l-x)\sigma/a} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1 + e^{-2x\sigma_0/a}}{1 - e^{-2l\sigma_0/a}} e^{-(l-x)\sigma_0/a} = M. \tag{2.1}$$

Așadar

$$|G(p)| = \frac{1}{|p^2|} \left| \frac{\operatorname{ch} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a} \right| \leqslant \frac{M}{|p^2|} \xrightarrow[|p|\to\infty]{} 0, \quad \operatorname{Re} p \geqslant b > \sigma_0 > 0.$$

iii) Folosind (2.1) obținem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(b + i\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + \tau^2} \left| \frac{\operatorname{ch} x(b + i\tau)/a}{\operatorname{sh} l(b + i\tau)/a} \right| d\tau \leqslant \frac{M}{b}\pi.$$

Are loc

PROPOZIȚIA 2.2. Transformata Laplace inversă a funcției $G(p)$ este funcția $g(t, x)$ avînd expresia :

$$g(t, x) = \mathfrak{L}'[G(p)] = \frac{a\theta(t)}{2l}\left(\frac{x^2}{a^2} + t^2 - \frac{l^2}{3a^2}\right) + \frac{2l\theta(t)}{a\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \times$$
$$\times \cos\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi a t}{l}. \tag{2.2}$$

Demonstrație. Vom arăta că sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.2. Prima condiție este îndeplinită în baza propoziției 2.1. Faptul că a doua condiție este îndeplinită, rezultă printr-o demonstrație analoagă celei date la propoziția 1.2.

Pentru determinarea funcției original $g(t, x)$ calculăm reziduurile funcției $G(p)\, e^{pt}$ corespunzătoare polului triplu $p = 0$ și polilor simpli conjugați $p_k = \pi i a k/l$, $\bar{p}_k = -\pi i a k/l$, $k \in N$.

Avem :

$$\operatorname{rez}\,[G(p)\, e^{pt}]_{p=0} = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0} \frac{d^2}{dp^2}\left(p \frac{\operatorname{ch} x\, p/a}{\operatorname{sh} lp/a} e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{p\to 0} \frac{-\frac{pl^2}{a^2}\operatorname{sh}\frac{3lp}{a} - \frac{2l}{a}\operatorname{sh}^2\frac{lp}{a}\operatorname{ch}\frac{lp}{a} + \frac{2pl^2}{a^2}\operatorname{sh}\frac{lp}{a}\operatorname{ch}^2\frac{lp}{a}}{\operatorname{sh}^4 lp/a} \operatorname{ch}\frac{xp}{a} e^{pt} + \right.$$

$$+ \lim_{p\to 0} \frac{\operatorname{sh} lp/a - (pl/a)\operatorname{ch} lp/a}{\operatorname{sh}^2 lp/a}\left(\frac{2x}{a} e^{pt} \operatorname{sh}\frac{xp}{a} + 2te^{pt} \operatorname{ch}\frac{xp}{a}\right) +$$

$$\left. + \lim_{p\to 0} \frac{p}{\operatorname{sh} l\, p/a}\left(2\frac{tx}{a} e^{pt} \operatorname{sh}\frac{xp}{a} + \frac{x^2}{a^2} e^{pt} \operatorname{ch}\frac{xp}{a} + t^2 e^{pt} \operatorname{ch}\frac{xp}{a}\right)\right]. \tag{2.3}$$

Pentru a calcula expresia (2.3) vom folosi următoarele rezultate elementare :

$$L_1 \qquad \lim_{p\to 0} \frac{p}{\operatorname{sh} lp/a} = \frac{a}{l} \cdot$$

$$L_2 \qquad \lim_{p\to 0} \frac{\operatorname{sh} lp/a - (pl/a)\operatorname{ch} lp/a}{\operatorname{sh}^3 lp/a} = -\frac{1}{3},$$

$$L_3 \qquad \lim_{p\to 0} \frac{\operatorname{sh} lp/a - (pl/a)\operatorname{ch} lp/a}{\operatorname{sh}^2 lp/a} = 0.$$

Cu ajutorul relațiilor L_1, L_2 și L_3, (2.3) devine :

$$\operatorname{rez}\,[G(p)\,e^{pt}]_{p=0} = \frac{1}{2}\left[-\frac{l^2}{a^2}\cdot\frac{a}{l} - \frac{2l}{a}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{a}{l}\left(\frac{x^2}{a^2} + t^2\right)\right] =$$

$$= -\frac{l}{6a} + \frac{a}{2l}\left(\frac{x^2}{a^2} + t^2\right)\cdot \tag{2.4}$$

De asemenea avem

$$\operatorname{rez}\,[G(p)\,e^{pt}]_{p_k=\pi ika/l} = \lim_{p\to p_k}\left[\frac{p-p_k}{\operatorname{sh} lp/a}\cdot\frac{\operatorname{ch} xp/a}{p^2}\,e^{pt}\right] =$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{l}{a\pi^2k^2}\cos\frac{\pi xk}{l}\,e^{i\pi akt/l}, \tag{2.5}$$

unde am folosit (1.9).

În mod analog obținem :

$$\operatorname{rez}\,[G(p)\,e^{pt}]_{p_k=-\pi ika/l} = (-1)^{k+1}\frac{l}{a\pi^2k^2}\cos\frac{\pi xk}{l}\,e^{-i\pi akt/l}. \tag{2.6}$$

Din (2.5), (2.6) rezultă

$$\operatorname{rez}\,[G(p)\,e^{pt}]_{p_k=\pi ika/l} + \operatorname{rez}\,[G(p)\,e^{pt}]_{p_k=-\pi ika/l} =$$

$$= (-1)^{k-1}\cdot\frac{2l}{a\pi^2k^2}\cos\frac{\pi xk}{l}\cdot\sin\frac{\pi akt}{l}\cdot$$

Într-adevăr, originalul funcției $G(p)$ are expresia dată de (2.2).

3. *Determinarea distribuțiilor original ale căror transformate Laplace sînt funcțiile* $\dfrac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}$, $\dfrac{\operatorname{sh} xp/a}{p\operatorname{sh} lp/a}$,

$$a,\ l>0,\ x\in[0,\ l],\ p = \sigma + i\tau \in C$$

Prin $K'(R)$ notăm mulțimea distribuțiilor difinite pe spațiul test al lui Schwartz $K(R) = \{\varphi : R\to C,\ \varphi\in C^\infty(R)$ și supp $\varphi = \Omega =$ compact$\}$, iar prin $K'_+(R)$ distribuțiile din $K'(R)$ avînd suporturile în $(0,\infty)$. Condiția

de existență a transformatei Laplace inversă în spațiul $K'_+(R)$ este precizată de:

PROPOZIȚIA 3.1. ([3] p. 258). Condiția necesară și suficientă pentru ca funcția complexă $F(p)$ să fie imagine Laplace a unei distribuții din $K'_+(R)$ este ca $F(p)$ să fie olomorfă în semiplanul $\mathrm{Re}\, p = \sigma > b$ și să avem

$$|F(p)| \leqslant P(|p|),$$

unde P este un polinom.

PROPOZIȚIA 3.2. Funcția $\varphi(p) = (\mathrm{sh}\, xp/a)/\mathrm{sh}\, lp/a$ este imaginea Laplace a distribuției $h(t, x) \in K'_+(R)$ având expresia.

$$h(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}[\varphi(p)] = \frac{2\theta(t)}{al} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{ka\pi t}{l}. \tag{3.1}$$

Demonstrație. Conform corolarului 1.1., funcția $\varphi(p)$ este olomorfă și mărginită în semiplanul $\mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_0 = a/l$. În consecință, sînt îndeplinite condițiile propoziției 3.1 și astfel $\varphi(p)$ reprezintă imaginea unei distribuții $h(t, x) \in K'_+(R)$. Această distribuție depinde de parametrul $x \in [0, l]$. Deoarece funcția $F(p) = (\mathrm{sh}\, xp/a) / p^2\, \mathrm{sh}\, lp/a$ admite transformata Laplace inversă în sens clasic (propoziția 1.4) rezultă că există transformata sa Laplace inversă și în spațiul distribuțiilor $K'_+(R)$ [această imagine este o distribuție de tip funcție având expresia dată de (1.6).

Utilizînd definiția transformatei Laplace în distribuții, avem:

$$\mathfrak{L}[f(t, x)] = (f(t, x), \mathrm{e}^{-pt}),\ x \in [0, l], \tag{3.2}$$

de unde rezultă valabilitatea relațiilor

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L}[f(t, x)] = \mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}\right] = \left(\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \cdot \mathrm{e}^{-pt}\right). \tag{3.3}$$

Explicitînd (3.3), ținînd seama de (1.6), obținem:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\mathrm{sh}\, xp/a}{\mathrm{sh}\, lp/a} = \mathfrak{L}\left[\frac{2\theta(t)}{al} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{ka\pi t}{l}\right].$$

Prin aplicarea transformantei Laplace inversă rezultă relația (3.1).

Pentru distribuția $h(t, x)$ dăm o nouă reprezentare.

PROPOZIȚIA 3.3. Funcția $\varphi(p) = (\mathrm{sh}\, xp/a) / \mathrm{sh}\, lp/a$ este imaginea Laplace a distribuției $h(t, x) \in K'_+(R)$, având expresia:

$$h(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}[\varphi(p)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\delta\left(t - \frac{(2k+1)l - x}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - \delta\left(t - \frac{(2k+1)\, l + x}{a}\right)\right], \tag{3.4}$$

unde $\delta(t)$ reprezintă distribuția lui Dirac având suportul concentrat în $t = 0$.

Demonstrație. Avem

$$\varphi(p) = \frac{\mathrm{sh}\, xp/a}{\mathrm{sh}\, lp/a} = \frac{\mathrm{e}^{-(l-x)p/a} - \mathrm{e}^{-(l+x)p/a}}{1 - \mathrm{e}^{-2lp/a}}. \tag{3.5}$$

Notăm $q = e^{-2lp/a}$ și pentru $\mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_0 = a/l$ obținem :

$$|q| = |e^{-2(\sigma+i\tau)l/a}| = e^{-2l\sigma/a}|e^{-2li\sigma/a}| = e^{-\lambda l\sigma/a} < 1.$$

În consecință, putem scrie dezvoltarea în serie geometrică

$$(1 - e^{-2lp/a})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2klp/a}. \tag{3.6}$$

Substituind (3.6) în (3.5), obținem :

$$\varphi(p) = (e^{-(l-x)p/a} - e^{-(l+x)p/a}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2klp/a} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-\frac{(2k+1)l-x}{a}p} - e^{-\frac{(2k+1)l+x}{a}p}]. \tag{3.7}$$

Ținînd seama de faptul că $\mathfrak{L}[\delta(t - \alpha)] = e^{-\alpha p}$ prin aplicarea transformatei Laplace inversă relației (3.7), obținem (3.4).

Observație. Echivalența dintre (3.1) și (3.4) rezultă din identitarea imaginilor Laplace ale acestor distribuții.

PROPOZIȚIA 3.4. Funcția $\psi(p) = (\mathrm{sh}\, xp/a)/p\ \mathrm{sh}\, lp/a$, unde $a, l > 0$, $x \in [0, l]$, $p \in C$ este imaginea Laplace a distribuției $r(t, x) \in K'_+(R)$ avînd expresia

$$r(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}[\psi(p)] = \frac{x\theta(t)}{l} + \frac{2\theta(t)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi at}{l}, \tag{3.8}$$

Demonstrație. Funcția $\psi(p)$ este olomorfă în semiplanul $\mathrm{Re}\ p = \sigma > \sigma_0 = a/l$. Utilizînd corolarul 1.1, avem :

$$|\psi(p)| = \frac{1}{|p|} \left|\frac{\mathrm{sh}\, xp/a}{\mathrm{sh}\, lp/a}\right| \leqslant \frac{M}{|p|} \leqslant \frac{M}{\sigma_0}.$$

Deci, conform propoziției 3.1, funcția $\psi(p)$ are imaginea Laplace inversă în $K'_+(R)$. Ținînd seamă de (3.2) și (2.2), obținem

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}[g(t, x)] = \mathfrak{L}\left[\frac{\partial g(t, x)}{\partial x}\right] = \left(\frac{\partial g(t, x)}{\partial x}, e^{-pt}\right). \tag{3.9}$$

Explicitînd (3.9) și ținînd seamă de (2.2), găsim

$$\frac{\mathrm{sh}\, xp/a}{\mathrm{ap\ sh}\, lp/a} = \mathfrak{L}\left[\frac{x\theta(t)}{al} + \frac{2\,\theta/t}{a\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi at}{l}\right].$$

Aplicînd transformata Laplace inversă, obținem (3.8).

PROPOZIȚIA 3.5. Funcția $\psi(p) = (\mathrm{sh}xp/a)/p\ \mathrm{sh}\, lp/a$, unde $a, l > 0$ $x \in [0, l]$, $p \in C$, este imaginea Laplace a distribuției $r(t, x) \in K'_+(R)$, avînd expresia

$$h(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}[\psi(p)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\theta\left(t - \frac{(2k+1)\,l - x}{a}\right) - \theta\left(t - \frac{(2k+1)\,l + x}{a}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Demonstrație. Utilizînd imaginea Laplace a produsului de convoluție în distribuții putem scrie:

$$\mathfrak{L}^{-1}[\psi(p)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\,\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] \underset{(t)}{*} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}\right] = \theta(t) \underset{(t)}{*} h(t, x). \tag{3.11}$$

Substituind (3.4) în (3.11) și utilizînd formula

$$u(t) \underset{(t)}{*} \delta(t-\alpha) = u(t-\alpha), \quad u \in K'(R), \quad \alpha \in R,$$

obținem relația (3.10).

Procedînd în mod analog, putem da pentru funcția

$f(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\dfrac{\operatorname{sh} xp/a}{p^2 \operatorname{sh} lp/a}\right]$, dată de (1,6), o nouă reprezentare și anume

$$f(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] \underset{(t)}{*} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh} xp/a}{\operatorname{sh} lp/a}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(t - \frac{2(k+1)\,l-x}{a}\right)\theta\left(t - \frac{(2k+1)\,l-x}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(t - \frac{(2k+1)\,l+x}{a}\right)\theta\left(t - \frac{(2k+1)\,l+x}{a}\right)\right].$$

4. *Aplicație*

Considerăm în spațiul distribuțiilor $K'(\mathbb{R})$ problema la limită în tensiuni pentru propagarea vibrațiilor longitudinale în bare elastice de lungime finită și secțiune constantă. Problema constă în determinarea distribuției $u(x, t) \in K'(\mathbb{R})$ depinzînd de parametrul $x \in [0, l]$ care să satisfacă ecuația de mișcare în distribuții:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{X_0 \theta(t)}{\rho} + u_1 \delta(t) + u_0 \delta'(t), \quad x \in (0, l), \tag{4.1}$$

E — modulul lui Young, δ — densitatea, X_0 — densitatea forței masice, c — viteza de propagare a vibrațiilor longitudinale, $c^2 = E/\rho$, $X_0 \in \mathbb{R}$, condiții inițiale constante:

$$u(x, 0) = u_0, \qquad u_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1, \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

și condiții la limită în tensiuni

$$\sigma(0, t) = -f_1(t), \qquad f_1(t) \in K'(\mathbb{R}), \tag{4.3}$$

$$\sigma(l, t) = -f_2(t), \qquad f_2(t) \in K'(\mathbb{R}),$$

unde tensiunea $\sigma(x, t) = E\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in K'(\mathbb{R})$, iar derivata în raport cu x se consideră în sens obișnuit, x fiind parametru.

Admitem că $u(x, t), f_1(t), f_2(t)$ au transformată Laplace în distribuții. Aplicînd transformata Laplace ecuației de mișcare (4.1), condițiilor la limită (4.3) și ținînd dseama de (4.2) obținem :

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}(x,\ p)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{p^2}{c^2}\tilde{u}(x,\ p) = -\frac{pu_0 + u_1 + X_0/\delta p}{c^2}, \tag{4.4}$$

$$E\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(x,\ p)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = -\tilde{f}_1(p), \qquad E\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(x,\ p)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=l} = -\tilde{f}_2(p), \tag{4.5}$$

unde $\tilde{u}(x, p) = \mathfrak{L}[u(x, t)](p), \tilde{f}_i(p) = \mathfrak{L}[f_i(t)](p).\ i = 1, 2.$

Soluția ecuației (4.4) cu condițiile (4.5) este

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{c}{E}\left[p\tilde{f}_1(p)\ \frac{\operatorname{ch}\dfrac{l-x}{c}p}{p^2\operatorname{sh}lp/c} - p\tilde{f}_2(p)\ \frac{\operatorname{ch} xp/c}{p^2\operatorname{sh}lp/c}\right] + \frac{u_0}{p} + \frac{u_1}{p^2} + \frac{X_0}{\rho p^3}. \tag{4.6}$$

Ținînd seama de (2.2) și aplicînd transformata Laplace inversă, obținem

$$u(x, t) = \mathfrak{L}^{-1}[\tilde{u}(x, p)](t) = \frac{c}{E}[f_1'(t) \underset{(t)}{*} g(t, l-x) - f_2'(t) \underset{(t)}{*} g(t, x)] + \\ + u_0\,\theta(t) + u_1\,t\theta(t) + \frac{X_0 t^2\theta(t)}{2\rho}, \quad x \in [0, l]. \tag{4.7}$$

Această ultimă relație se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = u_e(x, t) + u_r(x, t), \quad x \in [0, l], \tag{4.8}$$

unde

$$u_e(x, t) = \frac{C}{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}[f_1(t) \underset{(t)}{*} g(t, l-x) - f_2(t) \underset{(t)}{*} g(t, x)], \tag{4.9}$$

$$u_r(x, t) = \theta(t)\left[\frac{X_0 t^2}{2\rho} + u_1 t + u_0\right]. \tag{4.10}$$

Observăm că termenul $u_r(x, t)$ este o distribuție de tip funcție și reprezintă deplasarea rigidă corespunzătoare unei mișcări uniform variate a barei ; pentru $X_0 > 0$ avem mișcare uniform accelerată, iar pentru $X_0 < 0$ avem mișcare uniform întîrziată. Deoarece densitatea forței masice X_0 are dimensiunea $[X_0] = \dfrac{MLT^{-2}}{L^3}$, avem $[X_0/\rho] = LT^{-2}$, deci mărimea X_0/ρ

are dimensiunea unei accelerații. Ținînd seamă de legea spațiului în mișcarea uniform variată $s=at^2/2+v_0t+s_0$ și comparînd cu $u_r(x, t)$ rezultă că $u_r(x, t)$ exprimă o mișcare rigidă de translație în lungul axei barei.

În concluzie putem spune că soluția (4.8) reprezintă suma dintre deplasarea propriu-zisă elastică $u_e(x, t)$ a barei și deplasarea de corp rigid $u_r(x, t)$.

În particular dacă $u_0 = u_1 = X_0 = 0$ și condițiile la limită sînt $\sigma(0, t) = -B\theta(t)$, $\sigma(l, t) = 0$, $B \in \mathbb{R}_+$, atunci ținînd seama de (4.7) obținem pentru deplasare expresia:

$$u(x, t) = \frac{Bc\theta(t)}{E}\left[\frac{c}{2l}\left((l-x)^2 + t^2 - \frac{l^2}{3c^2}\right) - \frac{2l}{c\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi ct}{l}\right]. \tag{4.11}$$

Primită la redacție la 10 iulie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. B. CHABAT, M. LAVRENTIEV, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, MIR Moscou, 1972.
2. I. GH. ȘABAC, *Matematici speciale*, vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
3. L. SCHWARTZ, *Matematiceskie metodi dlia fiziceskih nauk*, MIR, Moskova, 1965.

SINCRONIZAREA LIBERĂ A POZIȚIILOR ELEMENTELOR INTERMEDIARE ALE VARIATOARELOR CU TRACȚIUNE

de O.S. CREȚU

Institutul de Învățământ Superior
Suceava

Se abordează problema sincronizării pozițiilor elementelor intermediare ale variatoarelor de turație cu tracțiune EHD, în primul rînd cauzele care produc desincronizarea pozițiilor elementelor intermediare, stabilindu-se că desincronizarea datorită abaterii de la poziția unghiulară a liniei ce unește contactele elementului intermediar cu discurile de intrare și ieșire ale variatorului este cea mai periculoasă.
În urma unui studiu cinematic elaborat pentru un variator de turație cu discuri și role toroidale, se stabilesc condițiile în care se poate produce sincronizarea. Final, se propun mai multe mecanisme pentru variația raportului de transmitere în condițiile sincronizării libere a pozițiilor elementelor intermediare.

DESINCRONIZAREA. EFECTELE ȘI CAUZELE CARE O PRODUC

Variatoarele de turație cu tracțiune EHD cu mai multe elemente intermediare au avantajul că transmit puteri mari prin divizarea puterii totale în fluxuri paralele. Prezența mai multor elemente intermediare necesită asigurarea sincronizării pozițiilor acestora astfel că fiecare să determine aceleași caracteristici cinematice.

Pentru a preciza influența desincronizării pozițiilor elementelor intermediare asupra performanțelor variatorului (putere transmisă durabilitate și randament) se presupune un variator la care se notează cu indicele 1 elementul conducător, cu indicele 2 elementul condus și cu indicele 3 elementele intermediare. De asemenea, se utilizează exponenții $'$, $''$. $'''$, pentru mărimile care se referă la primul, al doilea și respectiv, al treilea flux de putere.

În fiecare punct de contact vor apărea două viteze, aparținînd fiecărui element, numite viteze de rostogolire de modul

$$V_i = R_i \cdot \omega_i, \tag{1}$$

unde

V_i, R_i, ω_i, reprezintă vitezele, distanțele de la punctele de contact la axele de rotație și respectiv vitezele unghiulare.

Pentru a se transmite putere de la un element la altul, trebuie să existe relațiile :

$$\begin{aligned} \bar{V}_3 &= \bar{V}_1 - \Delta\bar{V}_{13}, \\ \bar{V}_2 &= \bar{V}_3 - \Delta\bar{V}_{32}, \end{aligned} \tag{2}$$

unde

$\Delta\bar{V}_{ij}$ reprezintă alunecarea longitudinală, generatoare de forță tangențială.

Alunecarea totală a celor două contacte se obține prin sumarea celor două alunecări :

$$\Delta\bar{V} = \Delta\bar{V}_{13} + \Delta\bar{V}_{32}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 5, 1985, P. 488—498

sau prin diferența dintre vitezele de rostogolire ale celor două discuri.

$$\Delta\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2. \qquad (4)$$

În condițiile unei sincronizări perfecte ($R_1' = R_1'' = R_1'''$ și $R_2' = R_2'' = R_3'''$), valoarea alunecării longitudinale se păstrează aceeași pe fiecare ramură a fluxului de putere :

$$\Delta V' = \Delta V'' = \Delta V''',$$

ceea ce asigură valori egale ale puterilor transmise pe fiecare ramură și deci funcționarea normală a contactelor.

Desincronizarea presupune valori diferite ale distanțelor de la punctele de contact la axele de rotație.

$$R_1' \neq R_1'' \neq R_1''' \text{ și}$$

$$R_2' \neq R_2'' \neq R_2''',$$

și deci variația alunecării longitudinale din contacte, ceea ce are ca efect repartizarea inegală a puterii transmise prin ramurile paralele ale fluxului de putere. Rezultă o suprasolicitare a unor contacte, afectînd puternic durabilitatea și o supraîncălzire a lubrifiantului, micșorînd randamentul variatorului.

Acest fenomen apare ca urmare a impreciziilor de execuție și montaj a elementelor variatorului. Sînt două aspecte mai importante ale preciziei variatorului care determină mărimea desincronizării.

— abaterea poziției centrului elementului intermediar de la poziția nominală ;

— abaterea de la poziția unghiulară nominală a liniei ce unește contactele elementului intermediar ;

Pentru exemplificare se consideră un variator cu discuri și role toroidale (fig. 1) la care se pune acut problema sincronizării. În partea superioară este simbolizată o rolă al cărui centru nu coincide cu poziția nominală, dar linia contactelor coincide cu cea nominală ('), iar în partea inferioară rola are centrul în poziția prescrisă, dar linia contactelor prezintă abatere de la poziția nominală ('').

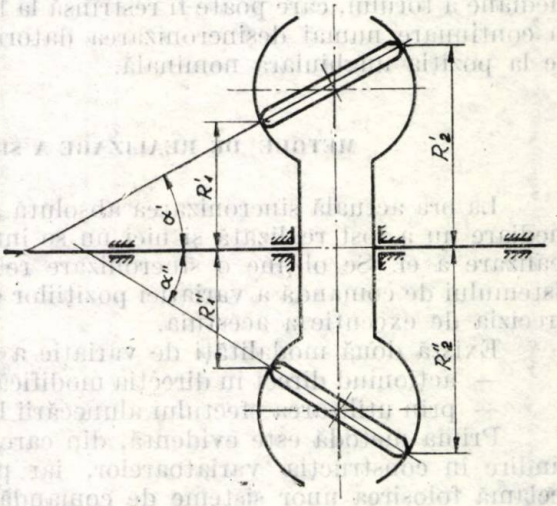


Fig. 1

Rola poziționată, conform dimensiunilor teoretice, nu este reprezentată pe desen și va fi numită rolă nominală.

Se observă imediat că abaterea de la poziție a centrului elementului intermediar are ca efect variația în același sens a mărimii razelor de dispunere a punctelor de contact de pe cele două discuri (R_1 și R_2), iar abaterea de la poziția unghiulară nominală a liniei de contact determină variația în sensuri contrare a mărimilor razelor respective.

Determinîndu-se modulul alunecării longitudinale pentru cele trei role se obține :

$$\begin{aligned} &- \text{pentru prima rolă : } \Delta V' = \omega_1 R_1' - \omega_2 R_2', \\ &- \text{pentru a doua rolă : } \Delta V'' = \omega_1 R_1'' - \omega_2 R_2'', \\ &- \text{pentru rola nominală : } \Delta V = \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2, \end{aligned} \tag{5}$$

de unde

$$\begin{aligned} \Delta\Delta V' &= \Delta V' - \Delta V = \omega_1(R_1' - R_1) - \omega_2(R_2' - R_2), \\ \Delta\Delta V'' &= \Delta V' - \Delta V = \omega_1(R_1'' - R) - \omega_2(R_2'' - R_2), \end{aligned} \tag{6}$$

se observă că

$$|\Delta\Delta V'| < |\Delta\Delta V''|, \tag{7}$$

adică modulul variației alunecării longitudinale $\Delta\Delta V$ în cazul rolei desincronizate prin abaterea de la poziția unghiulară nominală a liniei de contact este mai mare decît modulul variației alunecării longitudinale în cazul rolei desincronizate prin abaterea poziției centrului rolei de la valoarea nominală. Desincronizarea cauzată de abaterea de la poziția unghiulară nominală a liniei de contact este astfel cea mai periculoasă.

Deoarece abaterea de la poziția nominală a centrului elementelor intermediare este datorată de necircularitatea liniei circumferențiale mediane a torului, care poate fi restrînsă la limite convenabile, se studiază în continuare numai desincronizarea datorită abaterii liniei contactelor de la poziția unghiulară nominală.

METODE DE REALIZARE A SINCRONIZĂRII

La ora actuală sincronizarea absolută a pozițiilor elementelor intermediare nu a fost realizată și nici nu se întrevăd posibilități practice de realizare a ei. Se obține o sincronizare relativă, funcție de construcția sistemului de comandă a variației pozițiilor elementelor intermediare și de precizia de execuție a acestuia.

Există două modalități de variație a raportului de transmisie [2] :

— acționînd direct în direcția modificării poziției rolei intermediare ;

— prin utilizarea efectului alunecării laterale.

Prima metodă este evidentă, din care cauză a căpătat o largă răspîndire în construcția variatoarelor, iar pentru realizarea sincronizării reclamă folosirea unor sisteme de comandă deosebit de precise, ceea ce conduce la ridicarea prețului de cost al variatorului.

Cea de-a două metodă modifică raportul de transmisie indirect, folosind efectul alunecării laterale, este foarte puțin utilizată [1], cu toate că oferă o serie de avantaje în funcționarea variatorului :

— nu „forțează" filmul de lubrifiant, prin introducerea unor deplasări bruște pe direcția laterală ;

— necesită valori mici ale forțelor de comandă ;

— se pretează pentru folosirea unui sistem de automatizare.

Deoarece prin folosirea alunecării laterale elementele intermediare își aleg singure pozițiile pentru obținerea raportului de transmitere, sincronizarea realizată în aceste condiții a fost numită sincronizare liberă.

În vederea găsirii posibilităților de sincronizare liberă a elementelor intermediare este necesară efectuarea unei analize cinematice a elementului intermediar. Ținînd seama că alunecarea laterală apare atunci cînd axa elementului intermediar și axa discului de intrare sau ieșire nu sînt concludente, se face analiza cinematică a elementului intermediar, rostit sau translat față de poziția nominală.

CINEMATICA ROLEI INTERMEDIARE ROTITE

Se consideră același variator toroidal din figura 1, reprezentat printr-o porțiune a canalului toroidal și rola intermediară (fig. 2) ; A și B reprezintă punctele de contact dintre rolă și discurile de ieșire, respectiv de intrare. Centrul rolei, punctul M considerat fix, se găsește pe axa canalului toroidal, reprezentat printr-un cerc de rază R.

Raza rolei intermediare este notată cu r. Unghiul α dintre linia de contact AB și axa O_z poate fi variat prin rotația rolei în jurul axei (Δ), ce trece prin M, aparține planului rolei și este perpendiculară pe AB, obținîndu-se astfel modificarea raportului de transmitere. Coordonatele punctelor A, B și M față de sistemul de referință ales sînt :

$$A(R + r \sin \alpha,\ 0,\ -r \cos \alpha),$$

$$B(R - r \sin \alpha,\ 0,\ r \cos \alpha),$$

$$M(R,\ 0,\ 0). \tag{8}$$

Se imprimă rolei o rotire de unghi γ în jurul lui AB. Dreapta (Δ) ajunge în poziția (Δ^{vr}), iar segmentul MN în poziția MN' (fig. 3). N și N' sînt punctele în care axa de rotație principală a rolei intermediare intersectează planul YOZ pentru cele două poziții. Dreptele (D), (Δ^{vr}), MN și MN' sînt situate într-un plan (P) perpendicular pe AB, care aparține planului XOZ. Urma planului (P) pe planul ZOY este $MN' \parallel OY$. Unghiurile $\widehat{NMN'}$ și $\widehat{(\Delta), (\Delta^{vr})}$ sînt egale cu γ, avînd laturile reciproc perpendiculare. La fel, unghiurile $\widehat{OMN}$ și $\widehat{AB, OZ}$.

Se calculează vectorul MN' :

$$MN' = MN + NN' = MO + ON + NN' = R\bar{i} + R\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \alpha} R \operatorname{tg} \alpha \bar{k} \tag{9}$$

al cărui versor este

$$\bar{u} = -\cos \alpha \cos \gamma \bar{i} + \sin \gamma \bar{j} - \sin \alpha \cos \gamma \bar{k}, \tag{10}$$

iar vitezele, punctelor A și B de pe discuri, notate cu $\bar{V}_{A2}$ și, respectiv, $\bar{V}_{B1}$ sînt :

$$\bar{V}_{A2} = \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2 A} = -\omega_2 (R + r \sin \alpha)\, \bar{j},$$
$$V_{B1} = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1 A} = \omega_1 (R - r \sin \alpha)\, \bar{j}. \tag{11}$$

Vitezele punctelor A și B de pe rolă, determinate de mișcarea de rotație în jurul lui MN', notate cu $\bar{V}_{A3}$ și $\bar{V}_{B3}$ sînt egale și de sens contrar :

$$\bar{V}_{A3} = \bar{\omega}_3 \times \overline{MA} = -r\omega_3 \sin\gamma \cos\alpha\, \bar{i} - r\omega_3 \cos\gamma\, \bar{j} - r\omega_3 \sin\alpha \sin\gamma\, \bar{k},$$
$$\bar{V}_{B3} = \bar{\omega}_3 \times \overline{MB} = r\omega_3 \sin\gamma \cos\alpha\, \bar{i} + r\omega_3 \cos\gamma\, \bar{j} + r\omega_3 \sin\alpha \sin\gamma\, \bar{k}. \tag{12}$$

Viteza punctului B de pe discul conducător $\bar{V}_{B1}$ se descompune în viteza lui B de pe rolă, $\bar{V}_{B3}$, și o componentă $\Delta\bar{V}_B$ care se determină prin relația vectorială :

$$\Delta\bar{V}_B = \bar{V}_{B1} - \bar{V}_{B3} = -r\omega_3 \cos\gamma \cos\alpha\, \bar{i} + [\omega_1 (R - r \sin\alpha) - r\omega_3 \cos\gamma]\, \bar{j} - r\omega_3 \sin\alpha \sin\gamma\, \bar{K}, \tag{13}$$

dacă se neglijează alunecarea din punctul de contact.

De la rolă mișcarea se transmite la discul condus, iar viteza punctului A de pe rolă are două componente :

$$\bar{V}_{A3} = -\bar{V}_{B3}, \quad \Delta\bar{V}_A = -\Delta\bar{V}_B, \tag{14}$$

care rezultă din simetria mișcării.

Componentele ΔV_A și ΔV_B sînt perpendiculare pe planul rolei și determină rotirea acesteia în jurul axei (Δ^{vr}). Pentru a determina viteza unghiulară de variație a unghiului α, ω_3^{vr}, a rotației în jurul axei (Δ^{vr}) se determină modulul uneia dintre vitezele $\Delta\bar{V}_A$ sau $\Delta\bar{V}_B$ prin înmulțirea scalară cu versorul $\bar{u}$, sau scriind proiecția vitezei $\bar{V}_{A2}$ sau $\bar{V}_{B1}$ pe direcția perpendiculară pe planul rolei (fig. 4).

$$\Delta V_A = \Delta V_B = \omega_2 (R + r \sin\alpha) \sin\gamma = \omega_1 (R - r \sin\alpha) \sin\gamma, \tag{15}$$

rezultă

$$\omega_3^{vr} = \frac{\omega_1}{r} (R - r \sin\alpha) \sin\gamma. \tag{16}$$

CINEMATICA ROLEI INTERMEDIARE TRANSLATE

Rolei i se imprimă o mișcare de translație circulară pe un cerc de rază a astfel încît centrul rolei se deplasează în M' (fig. 5), descriind un arc de elice cilindrică cu un unghi la centru β, măsurat în planul XOY. În același timp se produce o variație foarte mică a unghiului α, obținîndu-se $\alpha'(\alpha \approx \alpha')$.

Deoarece centrul rolei nu se deplasează pe axul canalului toroidal, considerînd discul de intrare 1, cu posibilităţi de deplasare axială, rezultă că acesta se deplasează cu cantitatea Z după axa OZ, iar centrul rolei cu cantitatea Z'.

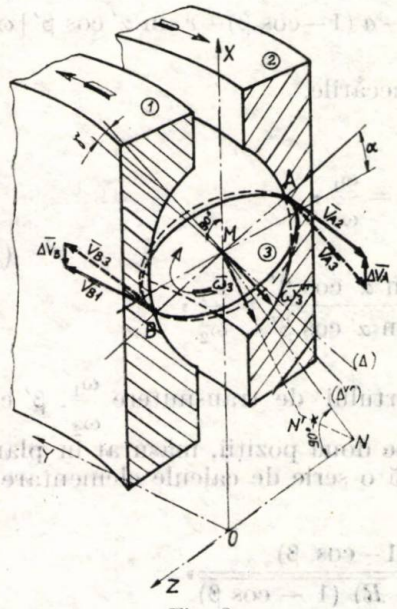


Fig. 2

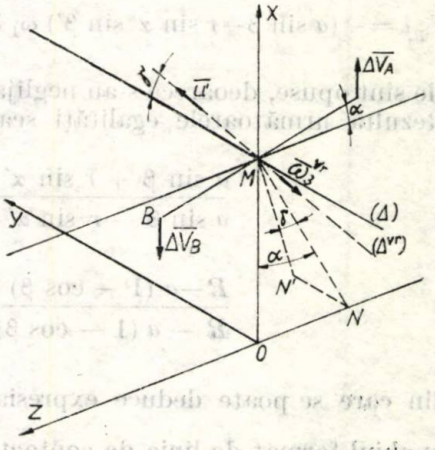


Fig. 3

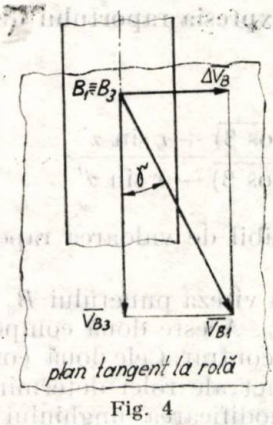


Fig. 4

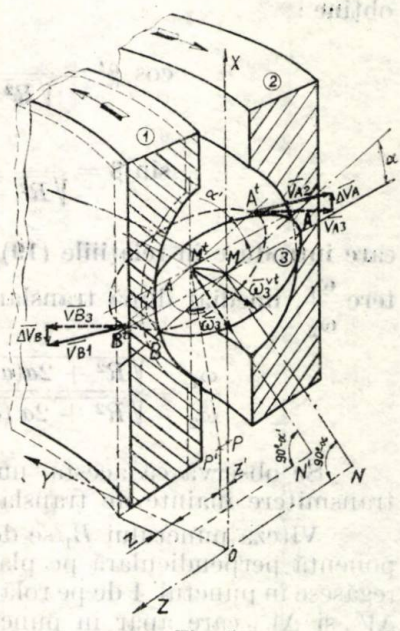


Fig. 5

Noile coordonate ale punctelor de interes sînt conform figurii 6.

$$M^t(R-a+a\cos\beta;\ a\sin\beta,\ Z),$$

$$A^t(R-a+a\cos\beta+r\sin\alpha'\cos\beta';\ a\sin\beta+r\sin\alpha'\sin\beta',\ Z'-r\cos\alpha'), \quad (17)$$

$$B^t(R-a+a\cos\beta-r\sin\alpha'\cos\beta';\ a\sin\beta-r\sin\alpha'\sin\beta';\ Z+r\cos\alpha).$$

Vitezele punctelor A_2' și B_1' au expresiile :

$$\bar{V}_{A_2'} = (a \sin \beta + r \sin \alpha' \sin \beta')\,\omega_2\,\bar{i} - [R - a\,(1 - \cos \beta) + r \sin \alpha' \cos \beta']\,\omega_3\,\bar{j},$$

$$\bar{V}_{B_1'} = -(a \sin \beta - r \sin \alpha' \sin \beta')\,\omega_1\,\bar{i} - [R - a\,(1 - \cos \beta) - r \sin \alpha' \cos \beta']\,\omega_3\,\bar{j}, \tag{18}$$

ele sînt opuse, deoarece s-au neglijat alunecările.
Rezultă următoarele egalități scalare :

$$\frac{a \sin \beta + r \sin \alpha' \sin \beta'}{a \sin \beta - r \sin \alpha' \sin \beta'} = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

$$\frac{R - a\,(1 - \cos \beta) + r \sin \alpha' \cos \beta'}{R - a\,(1 - \cos \beta) - r \sin \alpha' \cos \beta'} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \tag{19}$$

din care se poate deduce expresia raportului de transmitere $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. β' este unghiul format de linia de contact în cele două poziții, măsurat în planul XOY. Ținînd seama de figura 6 și după o serie de calcule elementare se obține :

$$\cos \beta' = \frac{R - a\,(1 - \cos \beta)}{\sqrt{R^2 + 2a(a - R)\,(1 - \cos \beta)}},$$

$$\sin \beta = \frac{a \sin \beta}{\sqrt{R^2 + 2a\,(a - R)\,(1 - \cos \beta)}}, \tag{20}$$

care introduse în relațiile (19) determină expresia raportului de transmitere $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, imediat după translare.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{R^2 + 2a(a - R)\,(1 - \cos \beta)} + r \sin \alpha'}{\sqrt{R^2 + 2a\,(a - r)\,(1 - \cos \beta)} - r \sin \alpha'}. \tag{21}$$

Se observă că acesta nu diferă sensibil de valoarea raportului de transmitere înainte de translare.

Viteza punctului B_1 se descompune în viteza punctului B_3 și o componentă perpendiculară pe planul rolei $\Delta\bar{V}_B$. Aceste două componente se regăsesc în punctul A de pe rolă, însă de sens contrar. Cele două componente $\Delta\bar{V}_A$ și $\Delta\bar{V}_B$ care apar în punctele de contact ale rolei determină rotirea rolei cu viteza unghiulară ω_3^{rt}, producînd modificarea unghiului α' și deci a raportului de transmitere.

Utilizînd o schemă similară celei din figura 4, se determină modulul vitezei $\Delta\bar{V}_B$,

$$\Delta V_B = |\bar{V}_{B_1}| \sin \beta = \omega_1 [\sqrt{(R - a)^2 + a^2 + 2a\,(R - a) \cos \beta} - r \sin \alpha'] \sin \beta$$

și rezultă

$$\omega_3^{rt} = \frac{\omega_1}{r}\left[\sqrt{(R-a)^2 + a^2 + 2a\,(R-a)\cos\beta} - r\sin\alpha'\right]\sin\beta, \qquad (23)$$

relație care reperzintă expresia vitezei unghiulare a rolei în mișcarea de variere a unghiului α.

Atunci cînd se alege $a = R$, se obține

$$\omega_3^{rt} = \frac{\omega_1}{r}(R - r\sin\alpha)\sin\beta, \qquad (24)$$

iar deplasările $Z = Z' = 0$.

POSIBILITĂȚI DE SINCRONIZARE

Deoarece relațiile care determină variația unghiului α sînt asemănătoare pentru cele două cazuri prezentate, se va analiza posibilitatea de sincronizare pentru rola rotită.

Se consideră două role desincronizate inițial, poziționate unghiular față de axa OZ prin unghiurile α și $(\alpha+\Delta\alpha)$. Ele au următoarele module ale vitezelor unghiulare ale mișcării de rotație, care produce variația unghiului α.

$$(\alpha_3^v)' = \frac{\omega_1}{r}(R - r\sin\alpha)\sin\gamma,$$
$$(\alpha_3^v)'' = \frac{\omega_1}{r}[R - r\sin(\alpha + \Delta\alpha)]\sin\gamma. \qquad (25)$$

După un interval de timp scurt, t, unghiul de desincronizare devine :

$$\Delta\alpha_{(t)} = \Delta\alpha + [(\omega_3^v)' - (\omega_3^v)'']\,t \approx \Delta\alpha\,(1 - \omega_1 t\sin\gamma\cos\alpha). \qquad (26)$$

Analizînd relația (26) se constată că diferența unghiulară $\Delta\alpha_{(t)}$, care dă măsura desincronizării, devine „zero" pentru valori de ordinul sutimilor de secundă ale timpului. Rezultă că pentru sensul unghiului γ reprezentat în figura 2 și considerat pozitiv, sens care determină mărirea raportului de transmitere, rolele își asigură automat sincronizarea.

Dacă rolelor li se imprimă o rotire de unghi γ în sens contrar celui figurat în figura 2, ceea ce din punct de vedere matematic înseamnă înlocuirea lui γ cu $-\gamma$, iar din punct de vedere cinematic determină micșorarea raportului de transmitere relația (26) devine :.

$$\Delta\alpha_{(t)} = \Delta\alpha(1 + \omega_1 t\cos\alpha\cos\gamma), \qquad (27)$$

și indică o creștere a desincronizării cu timpul.

Rezultă că pentru anumite condiții cinematice se obține sincronizarea liberă a rolelor intermediare, reieșind că variatoarele trebuie să funcționeze în acele condiții cinematice.

MECANISME PENTRU SUSȚINEREA ROLELOR

Se găsesc puține variatoare care să folosească modul de sincronizare liberă. Se prezintă mecanismul folosit la un variator de mare putere de către firma Perbury (fig. 7). Rolele R_1, R_2 și R_3 se pot roti în jurul unor pîrghii, *1*, *2*, și *3* , articulate sferic în A_1, B_1 ; A_2, B_2 și, respectiv, A_3, B_3, la cîte un element triunghiular *4*, *5* și, respectiv *6*, articulate la rîndul lor prin cuplele de rotație C_1, D_1, E_1 și cuplele de translație C_2, D_2 și E_2 la batiu.

Elementele *4*, *5* și *6* pot fi rotite simultan de la tamburul *7* și cuplele superioare F, G și H. Tamburul *7* poate fi rotit printr-un mecanism format din elementele *8*, *7* și batiul.

Lanțurile cinematice C_1, A_1, B_1, E_1 ; E_1, A_2, B_2, D_1 și D_1, A_3, B_3, C_1, sînt paralelograme, motiv pentru care rolele R_1, R_2 și R_3 vor executa mișcări de translație circulare.

Mecanismul prezentat, prin faptul că nu asigură deplasarea centrului rolelor după axul canalului toroidal, trebuie să compenseze deplasările pe direcția axială, necesitînd forțe de comandă mari.

Pentru eliminarea acestui neajuns se propune un mecanism care să asigure deplasarea centrului rolei după axa canalului toroidal (fig. 8).

Rolele R_1, R_2 și R_3 se pot roti în jurul unor pîrghii *1*, *2* și *3* care constituie biele articulate sferic la mecanismele paralelograme D_i ; A_i ; B_i ; C_i. Distanțele A_i D_i. și B_i C_i (i = 1, 2, 3) sînt astfel luate încît centrele rolelor R_1, R_2 și R_3 se vor deplasa pe axul canalului toroidal.

Pîrghiile *4—9* intră cu unul din capete în canalele longitudinale ale ale unui tambur *10* formînd cuplele superioare E_i, F_i, (i=1, 2, 3). Rotirea tamburului *10* printr-un mecanism cu bare articulate format din elementele mobile *1* și *2*, produc translarea circulară a celor trei role într-o direcție sau alta.

Mecanismele prezentate folosesc, pentru varierea raportului de transmitere, translarea rolelor față de poziția nominală. Pentru obținerea unei sensibilități mai mari a sincronizării și a unei viteze superioare de schimbare a raportului de transmitere, în condițiile unor forțe de comandă mici, aplicate pe curse de comandă mici, se propune un nou tip de mecanism (fig. 9). Rolele R_1, R_2 și R_3 se pot roti în jurul unor furci interioare *1*, *2* și *3* articulate la furcile exterioare *4*, *5* și *6* prin cuplele de rotație A_i, B_i (i = 1, 2, 3).

Furcile exterioare sînt la rîndul lor articulate la elementul fix prin alte cuple de rotație C_i(i=1, 2, 3). Axul furcilor interioare intră într-un tambur *7* cu care formează niște cuple suprioare D_i (i = 1, 2, 3). Prin rotirea tamburului de către un mecanism cu bare articulate format din elementele mobile *8* și *9* se produce rototranslația celor trei role.

CONCLUZII

Din analiza efectuată rezultă că desincronizarea pozițiilor elementelor intermediare cauzată de abaterea de la poziție a centului elementului intermediar este mai redusă decît desincronizarea datorată abaterii de la

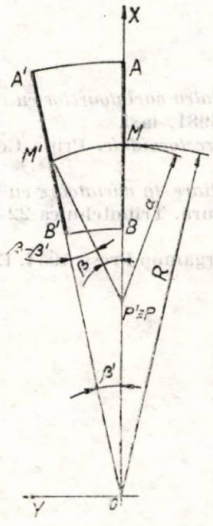


Fig. 6

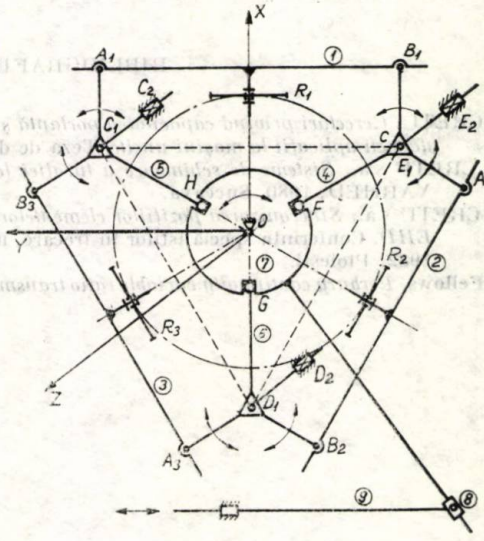


Fig. 7

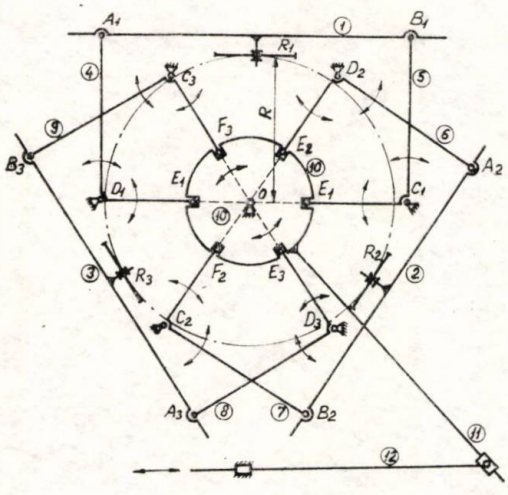


Fig. 8

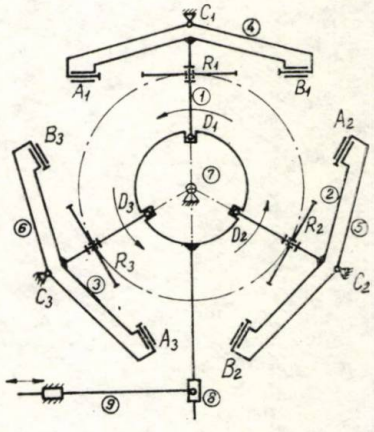


Fig. 9

poziția unghiulară nominală a liniei ce unește contactele elementului intermediar cu cele două discuri.

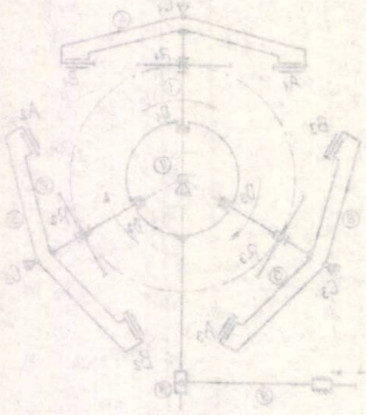
În urma unui studiu cinematic al mișcării rolei intermediare, se constată că există posibilitatea sincronizării libere, rezultînd că prin pro-

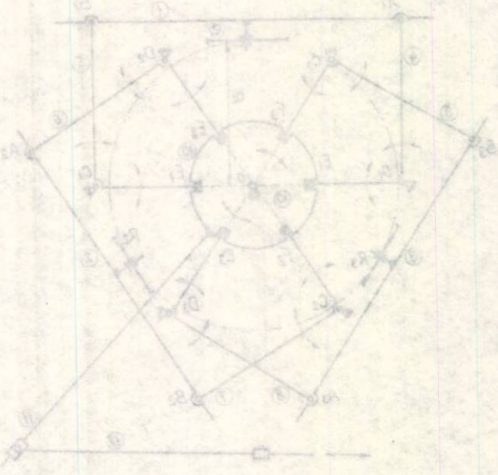
iectarea unor sisteme simple, să se realizeze evitarea desincronizării. S-au propus două mecanisme noi de susținerea rolelor intermediare, mecanisme care să ofere o funcționalitate mai bună a variatorului, să permită sincronizarea liberă a rolelor intermediare.

Primită la redacție la 20 noiembrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. O. S. CREȚU, *Cercetări privind capacitatea portantă și durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicații la mașini-unelte*, Teza de doctorat, 1981, Iași.
2. O. S. CREȚU ș.a., *Sisteme de schimbare a turației la variatoare toroidale*, Prima Conferință VARHED, 1980, Suceava.
3. O. S. CREȚU ș.a., *Sincronizarea pozițiilor elementelor intermediare la variatoare cu tracțiune EHD*, Conferința specialiștilor în frecare, ungere, uzură, Tribotehnica 22—24 oct. 1982, Ploiești.
4. T. G. Fellows, *Perbury continually variable ratio transmission*, Pergamon Press, 1964, 123—142.





W. BACHMANN, R. HAACKE, *Matrizenrechnung für Ingenieure, Anwendungen und Programme* (Calculul matriceal pentru ingineri. Aplicații și programe), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, 307 p., 54 fig.

Importanța calculului matriceal în tehnică nu mai necesită o subliniere specială și prin urmare o lucrare care își propune un astfel de obiectiv nu poate fi decît bine venită.

Autorii au urmărit să prezinte un număr cît mai mare de aplicații ale calculului matriceal, expunînd bazele teoretice la un nivel elementar, accesibil unor cercuri largi de cititori.

Posibilitățile de aplicare ale calculului matriceal au sporit considerabil în ultimele decenii, datorită dezvoltării mijloacelor automate de calcul. Ca urmare, autorii prezintă în lucrare și un număr destul de mare de programe, elaborate în limbajul BASIC, preferat datorită simplității sale.

Lucrarea conține 12 capitole în care se prezintă atît elementele teoretice de bază, cît și numeroase aplicații. Atrag atenția în mod special capitolele consacrate rezolvării sistemelor de ecuații liniare, aplicațiilor la calculul diferențial și la integrarea numerică. O tratare corespunzătoare au și problemele de valori proprii și vectori proprii în capitolul ce le este rezervat. Aplicațiile din ultimul capitol sînt de asemenea utile și interesante.

Lucrarea cuprinde și o bibliografie în care sînt indicate lucrări ce îi permit cititorului să aprofundeze unul sau altul dintre capitole, respectiv bazele teoretice ale calculului matriceal sau aplicațiile acestuia.

Scrisă cu vădite intenții de utilizare în scopuri practice, această lucrare poate fi consultată cu folos de inginerii care activează în domenii variate ale tehnicii.

T. Oroveanu

R. DE BOER, *Vektor und Tensorrechnung für Ingenieure*. (Calculul vectorial și tensorial pentru ingineri), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, 260 p., 25 fig.

Calculul vectorial și tensorial, cu multiplele sale aplicații, a pătruns în ultimele decenii și în tehnică, în special în tratarea bazelor teoretice ale unor probleme din diverse domenii. Această lucrare este scrisă în special în vederea aplicării calculului vectorial și tensorial în mecanica mediilor continui, aplicația cu caracter ingineresc fiind teoria liniară a învelitorilor. Tratarea bazelor teoretice este însă astfel realizată încît lucrarea poate fi utilizată și de inginerii de alte specialități, interesați în aplicarea metodelor calculului vectorial și tensorial.

După o scurtă introducere, urmează șase capitole dintre care primele patru sînt consacrate elementelor de calcul vectorial și tensorial (algebra și analiza vectorială sau tensorială). Caracterul ingineresc se reflectă și în faptul că autorul privește calculul vectorial și tensorial ca pe un instrument de lucru, renunțînd deci la aspectele care nu sînt utile din acest punct de vedere.

Dintre diversele posibilități de a se defini un tensor, autorul preferă pe aceea de transformare liniară, pe care o consideră ca fiind cea mai adecvată pentru aplicațiile în mecanică și în științele tehnice în general. Un alt avantaj este acela al unei scrieri compacte și al unei reprezentări independente de sistemele de coordonate. Notația cu indici nu poate fi însă complet evitată și apare ori de cîte ori este strict necesară.

În capitolele consacrate algebrei și analizei vectoriale și tensoriale pot fi găsite, într-o prezentare clară, toate formulele necesare pentru aplicații.

Dintre cele două capitole care conțin aplicații, primul reprezintă, așa cum am amintit mai înainte, o introducere în mecanica mediilor continui. Aspectele generale se referă la bazele cinematice ale teoriei și la teoremele de conservare. În ceea ce privește legile constitutive, în încheierea capitolului sînt prezentate numai materialele elastice și fluidele viscoase compresibile, fără a se particulariza în aceste cazuri rezultatele precedente.

Ultimul capitol cuprinde o prezentare a bazelor teoriei liniare a învelitorilor, cu aplicații la cîteva cazuri particulare.

Carta conține și un număr destul de mare de exerciții, ale căror soluții sînt date la sfîrșit. O bibliografie selectivă completează lucrarea.

Scrisă clar, deși concis, această carte se citește cu ușurință și apare ca foarte utilă pentru cei ce doresc să capete cunoștințele de calcul vectorial și tensorial necesare în aplicații, sau să-și completeze aceste cunoștințe.

T. Oroveanu

E. KRÄMER, *Maschinendynamik* (Dinamica mașinilor, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984, 203 p., 272 fig., 20 tab.

Cartea tratează despre vibrațiile mașinilor a căror cunoaștere și stăpînire a devenit din ce în ce mai importantă, odată cu dezvoltarea construcției de mașini.

Manualul se adresează în primul rînd celor care proiectează mașini, presupunînd că dispun așa cum se predau în institutele de învățămînt superior tehnic.

Faptul că inginerul proiectant are la dispoziție calculatoare electronice puternice și diferite programe de calcul ridică în fața lui o nouă problemă: programele pot fi utilizate convenabil numai atunci cînd se cunoaște în detaliu mecanica și matematica ce stau la baza acestor programe. Pe de altă parte, este necesar ca specialistul să poată face evaluări în care scop trebuie să fie capabil să reducă sisteme complicate la modele simple. Cartea a fost scrisă cu scopul de a ajuta pe specialiști să rezolve aceste probleme.

Cartea cuprinde capitolele: introducere; cinematica; elemente de modele de calcul; amortizarea; geometria maselor: legile de bază ale cinematicii; oscilatoare cu un singur grad de libertate; statica structurilor; oscilatoare cu mai multe grade de libertate; dinamica structurilor; conținutul unidimensional; vibrații aleatoare; o anexă cu opt secțiuni.

G. Winter

FRANZ G. KOLLMANN, *Welle Nabe-Verbindungen* (Îmbinări de axe cu caneluri), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, XV, 228 p.

Formele de bază ale acestor organe de mașini sînt cunoscute de multe decenii dar în ultimii 20 de ani, datorită introducerii calculului automat, s-a realizat o lărgire extraordinară a cunoașterii tehnice, care se reflectă și în proiectarea și realizarea îmbinărilor de axe cu caneluri. Prezenta carte urmărește atingerea următoarelor două obiective: să pună la dispoziția proiectantului rezultate importante ale cercetării care se găsesc într-un volum mare în literatura de specialitate, deseori greu accesibile proiectantului solicitat de sarcinile imediate și să constituie o sursă a bazelor procedeelor de calcul și de dimensionare care să stea la dispoziția cercetătorului din domeniul organelor de mașini.

Originile prezentei monografii le constituie lucrările autorului privind îmbinările presate solicitate elasto-plastic.

Cartea cuprinde următoatele capitole:

1. Introducere; 2. Îmbinări de axe cu caneluri prin frecare; 3. Îmbinări de axe cu caneluri prin formă; 4. Îmbinări de axe cu came prin aderență; 5. Rezistența la oboseală a îmbinărilor de axe cu caneluri; 6. Alegerea îmbinărilor de axe cu caneluri.

Toate capitolele sînt prevăzute cu referințe de literatură de specialitate.

Cartea oferă o privire de ansamblu asupra tuturor îmbinărilor de axe cu came utilizate, iar diagrame logice ușurează urmărirea unor algoritmuri de calcul complicați, dînd posibilitatea proiectantului să aleagă, să calculeze și să dimensioneze îmbinarea de axe cu caneluri optimă.

C. Winter

A. GOMERSALL, P. FARMER, *Robotics. An International Bibliography with* Abstracts (Inteligența mașinilor. O bibliografie internațională cu rezumate), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984, 200 p., 100 fig.

Cartea lui Alan Gomersall, inginer mecanic specializat și în informatică, intitulată *„Inteligența mașinilor"* este publicată în seria engleză de publicații de catalog, în 1984 de editura IFS — Anglia, cu filiale la Berlin (occ.), Heidelberg, New York, Tokyo.

Publicația reprezintă o foarte prețioasă colecție de referințe bibliografice cu rezumate asupra senzorilor folosiți în construcția roboților pentru automatizarea producției, începînd cu anul 1972 și pînă la zi, cele mai recente referințe datînd din 1983.

Materialul este clasificat în cadrul a cinci secțiuni.

Fără a avea pretenția de a epuiza subiectul, colecția cuprinde realizările semnificative publicate ale diferitelor companii, universități și laboratoare naționale din S.U.A., Marea Britanie, Italia, Germania și Japonia, din care multe sînt deja aplicate în industrie.

Colecția bibliografică de față prezintă o documentație a cercetării și aplicațiilor în domeniul senzorilor robotici realizată la cel mai înalt nivel de tehnicitate.

Ca observație menționăm că pentru omogenizarea prezentării lucrărilor în cazul unei descrieri dificile, s-a preferat schema sau fotografia senzorului respectiv.

Secțiunea A, cuprinde literatură generală, asupra senzorilor (17 referințe), programe, proiecte de viitor (25 referințe), conferințe tematice (20 referințe), monografii, cărți, rapoarte (în total 51 ref.).

Secțiunea B, intitulată „Senzori fără contact", este împărțită pe mai multe subsecțiuni:

— Subsecțiunea B1, intitulată „Senzori vizuali", prezintă problemele generale ale lor (21 ref.), studii și cercetări asupra senzorilor vizuali (24 ref.), probleme de control și programare a „vederii" senzoriale (53 ref.), reacția inversă a senzorilor vizuali (22 ref.), echipamente auxiliare (57 ref.).

— Subsecțiunea B2, intitulată „Teoria vederii", prezintă problemele generale teoretice (36 ref.), inteligența artificială (46 ref.), recunoașterea formelor (28 ref.), automatizarea detectării imaginilor (47 ref.), vizualizarea binară (16 ref.), vederea tridimensională (37 ref.), vederea color (10 ref), detecția colțurilor (7 ref.) și analiza de ansamblu (5 ref.).

— Subsecțiunea B3, intitulată „Senzori domenali", prezintă generalități (5 ref.), senzori cu laser (22 ref.), senzori ultrasonici și acustici (11 ref.).

— Subsecțiunea B4, intitulată „Senzori de proximitate", prezintă generalități în problemă (7 ref.), senzori electromagnetici și în infraroșu (13 ref.), senzori cu fibre optice (10 ref.), senzori hidraulici și pneumatici (25 ref.).

— Subsecțiunea B5, intitulată „Control vocal", (14 ref.).

Secțiunea C, intitulată „Senzori cu contact", este de asemenea împărțită pe mai multe subsecțiuni:

— Subsecțiunea C1, Senzori tactili, prezintă probleme generale (40 ref.), senzori pe bază de fibre de carbon (3 ref.), senzori de forță și cu torsiune (28 ref.), senzori cu piele artificială (4 ref)

— Subsecțiunea C2, inițială „Controlul senzorilor tactili", prezintă generalități în problemă (15 refl.), despre complianță (13 ref.), bucla de reacție în forță (27 ref.).

Secțiunea D, intitulată „Tehnologii generale pentru senzori vizuali și tactili", este împărțită în următoarele secțiuni:

— Subsecțiunea D1, intitulată „Linii combinate vizual/tactil", prezintă 44 referințe;

— Subsecțiunea D2, „Control și probleme", conține 35 referințe;

Secțiunea E, intitulată „Aplicații ale senzorilor", este împărțită în următoarele subsecțiuni:

— Subsecțiunea E1, „Aplicații generale", (38 ref.);

— Subsecțiunea E2, „Aplicații industriale", prezintă industria aerospațială (15 ref.), industria automobilistică (17 ref.), industria electronică (19 ref.), circuite imprimate și integrate (22 ref.), industria metalurgică (24 ref.), tehnologii marine și submarine (10 ref.), industria nucleară (7 ref.), industria ușoară (36 ref.)

— Subsecțiunea E3, „Aplicații în procesele tehnologice", cuprinde următoarele probleme: asamblări cu senzori în general (8 ref.), cu senzori vizuali (21 ref.), cu sensori cu contact (10 ref.), recunoaștere de componente (19 ref.), poziționare, localizare și orientarea componentelor (34 ref.), senzori vizuali pentru transfer de piese (11 ref.), senzori de contact pentru transfer de piese (27 ref.), controlul asamblării prin microprocesoare (19 ref.), măsurători și etalonări (26 ref.), control de calitate (16 ref.), direcții defectelor (25 ref.), testări (10 ref.), roboți programabili (8 ref.), diferite alte aplicații ale senzorilor vizuali (13 ref.), cu contact (5 ref.), aplicații în procese de fabricație (48 ref.), finisări (6 ref.).

Cartea cuprinde în anexă un index alfabetic de autori, cu circa 1300 de nume.

Vlad Grigore Lașcu

ANDREI RIPIANU, IOAN CRĂCIUN, *Calculul dinamic și de rezistență al arborilor cotiți*, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1984.

Recent a văzut lumina tiparului, în prestigioasa Editură „DACIA", din municipiul Cluj-Napoca, lucrarea : „Calculul dinamic și de rezistență al arborilor drepți și cotiți", sub semnătura a doi reputați specialiști, în persoana profesorului universitar dr. doc. șt. Andrei Ripianu și a conferențiarului dr. ing. Ioan Crăciun, care se constituie ca o încoronare a activității de investigație științifică a autorilor, care au dat literaturii consacrată multiplelor și variatelor probleme de Mecanică aplicată, prețioase asemănătoare cărți, contribuind astfel la adîncirea tematicilor abordate, precum și la lărgirea ariei cercetării științifice, din cîmpul acestei captivante științe. Lucrarea reprezintă o continuare armonioasă a cercetărilor teoretice și experimentale, pe ogorul Mecanicii teoretice și experimentale, efectuate de către primul dintre autori în intervalul de timp 1955—1968 în domeniul studiului dinamic și de rezistență al arborilor drepți și cotiți, ale căror concluzii au fost expuse în cartea apărută sub titlul „Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți", în Editura Academiei Republicii Socialiste România, în anul 1969.

Această nouă lucrare conține numai o parte din contribuțiile strict originale aduse de către cei doi cunoscuți specialiști în anii 1968—1982 în domeniul calculului dinamic și de rezistență al arborilor drepți și cotiți,și care au fost aplicate cu multă eficiență în practica inginerească, prin elaborarea unor lucrări tehnico-științifice efectuare pe bază de contracte încheiate cu institute de cercetare și proiectare sau cu diferite întreprinderi industriale, constructoare de mașini și utilaje din țara noastră.

Ca structură, lucrarea conține trei părți distincte : studiul dinamic și de rezistență al arborilor drepți, studiul dinamic și de rezistență al arborilor cotiți și studiul aplicării grafelor de fluență la analiza și sinteza sistemelor ce execută vibrații de torsiune, cu exemplificări multiple la cazul vibrațiilor de torsiune ale arborilor cotiți.

Prin profilul său, cartea se încadrează în înalta știință care este Mecanica aplicată, caracterizîndu-se printr-o elegantă ținută academică, în care acuratețea își dă mîna cu competența profesională, și cu spiritul fanteziei strălucitoare, și de exigența de sine. Stilul în care a fost redactată lucrarea este ușor accesibil, aceasta fiind pigmentată atractiv prin numeroase exemple numerice, de mare utilitate pentru inginerii care își dezvoltă activitatea în sectorul de cercetare științifică și proiectare al arborilor drepți și cotiți aparținînd mașinilor și utilajelor, cît și cadrelor didactice universitare și studenților din învățămîntul tehnic superior.

Faptul că trasarea curbelor traiectorii absolute și relative conținute de figurile 1.69—1.126 s-a efectuat de către calculatoarele electronice de la centrul de calcul al Universității Libere din Bruxelles, îi conferă cărții o valoare aparte.

Deoarece mi s-a acordat onoarea de a fi unul din referenții științifici ai lucrării, am avut posibilitatea să efectuez un studiu aprofundat al acesteia, pe care o caracterizez ca pe o carte de știință de mare preț, ce face cinste autorilor săi, și pe care o recomand cu căldură spre a fi utilizată de către toți specialiștii avizați.

Încheind recenzia lucrării, doresc să subliniez faptul că ar fi fost păcat ca o astfel de carte să nu vadă lumina tiparului, și care nu trebuie să lipsească din biblioteca nici unui mecanician, cercetător, inginer, tehnician sau cadru didactic universitar.

Petre Sima

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor, solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilirea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 6.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DAN CONSTANTINESCU, **Efectele structurale ale curgerii lente a betonului**, 1985, 208 p., 19,50 lei.
GHEORGHE MĂRMUREANU, **Rezistența posteritică**, 1985, 302 p, 31 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor compresibile**, 1984, 886 p., 68 lei.
IOAN ANTON, **Cavitația**, Vol. 1, 1984, 338 p., 46 lei.
C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, **Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor**, 1984, 446 p., 47 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, Vol. II, 1984, 244 p., 22 lei.
SERGIU T. CHIRIACESCU, **Stabilitatea în dinamica aşchierii metalelor**. 1984, 188 p. 16,50 lei.
D. F. SIMIONESCU, **Difuzia cimpului electromagnetic și aplicații**, 1983, 238 p., 20 lei.
A. PAVEL, **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983 , 310 p., 26 lei.
V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, Vol. I, 1983, 198 p., 18 lei.
ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU, ION CORNEA (sub redacția), **Cutremurul de pămînt din România de la 4 martie 1977**, 1983, 516 p., 10 lei.
ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**, 1982, 253 p., 20 lei.
GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurală și informatica**, 1982, 192 p., 14,50 lei.
VOICU DOLOCAN, **Fizica joncțiunilor cu semiconductoare**, 1982, 330 p., 30 lei.
A. CARABULEA, I.GH. CARABOGDAN, **Metodele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 30 lei.
DAN TEODORESCU, **Modele stohastice optimizate**, 1982, 246 p., 20 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 639 p., 44 lei.
VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1982, 236 p., 12 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România. Matematica. Mecanica. Astronomia**, 1981, 168 p., 9 lei.
LIVIU DUMITRESCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programului cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.
TITUS PETRILĂ, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.
ION BOLDEA, **Vehicule pe pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.
MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.
DAN MATEESCU, IOSIF APPELTAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**, 1981, 327 p., 26 lei

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE,
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

RM — ISSN 0039—4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 5, 1985, P. 411—502

$ 69 pour un abonnement annuel

Lei 55

I.P. Informația c. 1388

R
F2557

6
TOMUL 44
nov.—dec.
1985

8 7 APR 1986

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste Româ
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Sociali România
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. D. PAVELESCU,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN
Prof. CR. PELECUDI
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. I. ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. C. TEODORESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ROMPRESFILATELIA — sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex 10376 prsfir, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, R—79717, Bucureşti, Calea Victoriei nr. 125

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNI
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 44, nr. 6 **noiembrie-decembrie 1985**

SUMAR

STUDII

IOANA LUCA, EUGEN SOÓS, Termostatica fluidelor termoelastice. I. Echilibrul termic local 505

ELENA UNGUREANU-DAVID, Mişcarea cu suprafaţă liberă a apei subterane într-un mediu poros bistratificat 524

I. SETEANU, M. ERHAN, Contribuţii noi la studiul mişcării laminare a fluidului vîscos. I. Vîrtejul fizic pe frontierele solide 530

V. N. CONSTANTINESCU, I. JADIC, Consideraţii asupra metodelor cu panouri din aerodinamică 536

SORIN VLASE, O metodă de eliminare a forţelor de legătură din ecuaţiile de mişcare ale sistemelor mecanice cu legături 547

I. STROE, Perturbaţiile mişcării centrului de masă al vehiculului spaţial date de mişcarea în jurul centrului de masă 555

MIRCEA IEREMIA, Încărcarea transversală limită pentru o placă dreptunghiulară cu diferite rezemări pe contur 569

G. ONU, Linii, suprafeţe şi spaţii de influenţă prin metoda elementelor finite 574

A. PAVEL, Studiul tensometric al abaterilor de ansamblu, de tipul fringerilor sau ingenuncherilor, la sistemele tubulare presurizate la interior 585

INDEX ALFABETIC 611

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICA APLICATĂ

TERMOSTATICA FLUIDELOR TERMOELASTICE

I. Echilibrul termic local

de Ioana Luca, ICECHIM
Eugen Soós, INCREST

Termostatica este privită ca o teorie autonomă. Se dau caracterizări echivalente ale stărilor de echilibru termic local și se determină consecințele ce decurg din definițiile și axiomele adoptate.

1. INTRODUCERE

Conceptele, principiile și metodele fundamentale ale termostaticii fluidelor au fost elaborate de Gibbs între anii 1873—76 (vezi [1]—[3]). Rezultatele de bază ale lui Gibbs constituie conținutul principal al majorității tratatelor de termodinamică elaborate ulterior (vezi pentru exemplificare [4], [5] și/sau [6], alese la întîmplare, dar tipice). Analiza atentă a raționamentelor lui Gibbs arată că în considerațiile sale,fondatorul termostaticii operează adesea cu noțiuni ce nu sînt nici axiomatic caracterizate, nici clar definite, cu ipoteze ce nu sînt precis enunțate sau axiomatic formulate, cu afirmații despre care nu putem stabili dacă reprezintă definiția unei noțiuni, postularea unui fapt sau concluzia unei teoreme. Acest limbaj ambiguu este perpetuat pînă astăzi în majoritatea lucrărilor dedicate termo*dinamicii* celor mai generale sisteme, dar care în realitate, cu puține excepții, au ca obiect termo*statica* unei clase *particulare* de fluide termoelastice (vezi de exp. [4]—[6]). Analiza raționamentelor lui Gibbs relevă existența a două modalități complet diferite de abordare a problemelor : termostatica, deci teoria echilibrului termic, este tratată *matematic* ; termodinamica, deci teoria proceselor termice care se desfășoară în *timp*, este tratată verbal (în legătură cu această „bifurcare" vezi de exp. Truesdell, Toupin [7], Secț. 245—247, 260, 263—265,Truesdell [8]). Este relevant faptul că temperatura absolută este notată de Gibbs prin simbolul t, lucru posibil, deoarece în nici o relație *matematică* scrisă de Gibbs variabila temporală nu apare explicit. Tocmai din acest motiv, proprietățile stărilor de echilibru termic „deduse" de Gibbs din proprietățile neformalizate (matematic) ale proceselor termice *nu* reprezintă concluziile unor teoreme, ci *conjecturi* de maximă importanță. În acest mod studiile lui Gibbs, în loc să închidă un drum, deschid în fața cercetării actuale două căi de abordare — pe cale matematică — a termostaticii : într-o teorie autonomă a echilibrului termic unele din conjecturile lui Gibbs pot constitui axiome și/sau definiții (vezi în acest sens Coleman și Noll [9], [10]) ; într-o teorie a termodinamicii, în care stările de echilibru sînt tratate ca procese particulare, conjecturile lui Gibbs constituie obiect de studiu, iar unele cazuri particulare reprezintă deja concluziile unor teoreme (semnificative ni se par în acest sens lucrările lui Coleman și Mizel [11], Coleman și Greenberg [12], ca și multe din rezultatele expuse în lucrarea de sinteză a lui Truesdell [13] sau în tratatele lui Truesdell [14], Cap. XIV—XV și Müller [16], Cap. I—VII).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 6 1985, P. 505—523

Lucrarea noastră are un obiect restrîns în comparație cu imensitatea domeniului abordat de Gibbs : termostatica unui fluid termoelastic *izolat*, format dintr-o componentă și aflat într-o fază dată. Termostatica este privită ca o teorie de sine stătătoare ; în consecință, cele două concepte fundamentale cu care operăm — starea locală de echilibru termic, respectiv stabilitatea unei stări globale de echilibru — sînt introduse prin definiție, iar proprietățile fluidului și ale stărilor locale de echilibru sînt stipulate axiomatic, prin utilizarea conceptelor primare specifice termostaticii fluidelor (vezi §§ 3, 4, 12).

La baza lucrării stau ideile lui Coleman și Noll privind termostatica mediilor continue (vezi în special [9], §§ 6—9, 11, 13, 14, 16) preluate în mod adecvat, avînd în vedere caracterul particular al corpului (materialului) studiat. Tocmai această restrîngere a clasei de materiale a permis să extindem analiza lui Coleman și Noll dincolo de limitele domeniului cercetat de cei doi autori și să facem un studiu detaliat al modului în care stările locale de echilibru și stabilitatea lor globală pot fi caracterizate prin utilizarea diferitelor ecuații caracteristice (potențiale termostatice) corespunzătoare reprezentării energetice, respectiv entropice : energia internă, energia liberă, entalpia, funcția lui Gibbs, respectiv entropia, funcția lui Massieu, funcția lui Planck.

Analiza atentă a lucrării lui Coleman și Noll ([9]) relevă faptul că ideile și rezultatele de bază ale celor doi autori au ca fundament, la rîndul lor, conjecturile lui Gibbs privind proprietățile și relațiile ce trebuie să existe în stările de echilibru și condițiile ce trebuie să fie satisfăcute pentru asigurarea permanenței (stabilității) acestor stări (vezi în special [1] § 1, [2] §§ 1—3, [3], §§ 1—3, 6).

Paragraful 2, cu caracter introductiv, are ca scop analiza și dezvăluirea legăturii ce există între rezultatele lui Gibbs, pe de o parte, și rezultatele lui Coleman și Noll, pe de altă parte. Pornind de la principiile de bază ale termodinamicii și utilizînd conceptul de proces termomecanic pasiv (ultrapasiv), respectiv de corp termomecanic izolat (vezi în legătură cu semnificația acestor noțiuni de exp. Gurtin [17], § 7, [18], [19], Dunn și Fosdick [20], §§ 1, 2, Fosdick [21], §§ 1, 2), vom prezenta un cadru formalizat (matematic) în care conjecturile lui Gibbs devin plauzibile, fără să fie — deocamdată cel puțin — demonstrabile. În acest mod se va dezvălui sursa gibbsiană a punctului de pornire al lui Coleman și Noll și totodată se va justifica modul în care cei doi autori au abordat problema : conjecturile gibbsiene în parte se transformă în definiții, în parte devin postulate și în parte constituie concluzii ale unor teoreme deduse pe baza definițiilor și postulatelor adoptate și *matematic* clar formulate.

În prima parte a lucrării studiem modalitățile diferite în care poate fi caracterizată *starea de echilibru termic local*.

În paragraful 3 sînt introduse conceptele fundamentale specifice termostaticii fluidelor : densitatea de masă, volumul specific, presiunea, temperatura absolută, energia internă specifică, entropia specifică, starea termomecanică locală și globală, ecuația calorică și ecuațiile termice de stare corespunzătoare reprezentării energetice. Termostatica fiind concepută ca o teorie de sine stătătoare, în considerațiile noastre începînd cu acest paragraf nu apare nici variabila temporală, nici conceptul de proces termic, noțiune a cărei introducere corectă ar face inevitabilă utilizarea

dimensiunii temporale. Accentuăm faptul tocmai menționat, desemnînd, ca și Gibbs, temperatura absolută prin simbolul t. Pentru completitudine, în paragraful 3 am inclus prezentarea unor proprietăți fundamentale ale funcțiilor convexe și concave dependente de două variabile reale.

În paragraful 4, prin introducerea unei funcții de tip Gibbs și urmînd calea lui Coleman-Noll, dăm *definiția* stării locale de echilibru termic, corespunzătoare unei perechi presiune-temperatură dată și determinăm consecințele ce decurg din definiția dată. Într-un astfel de studiu sînt posibile două strategii diferite : cea adoptată de Gibbs, în care nu se admite axiomatic că orice stare locală este de echilibru termic corespunzătoare unei anumite perechi de presiune-temperatură, respectiv cea adoptată de Coleman-Noll, în care se admite, printr-un postulat, existența proprietății menționate. Desigur, al doilea drum este mai bogat în consecințe și impune restricții severe asupra proprietăților admisibile ale potențialelor termostatice, dar restrînge drastic domeniul faptic pentru care se aplică teoria. Prima cale, evident, conduce la mai puține consecințe și restricții, dar lărgește considerabil clasa fenomenelor pentru care teoria este aplicabilă. În această lucrare am optat pentru strategia de tip Coleman-Noll (vezi postulatul **P**), fiind însă conștienți de faptul că în acest mod am eliminat din considerații situații fizice cu aplicații importante (de ex. legea de tip Van der Waals ce descrie comportarea gazelor reale în anumite plaje de presiune și/sau de temperatură).

În paragraful 5 reluăm tema cercetată în paragraful precedent, dar utilizăm — de data aceasta — reprezentarea entropică și studiem relația ce există între cele două moduri diferite de caracterizare a stărilor locale de echilibru termic. Într-un astfel de studiu se poate avansa pe două căi diferite : fie că se admite axiomatic faptul că energia internă specifică, pentru orice valoare fixată a densității de masă, este o funcție strict crescătoare de entropia specifică, fie că se postulează stricta pozitivitate a temperaturii absolute. Cele două ipoteze în general *nu* sînt echivalente : în timp ce în cazul fluidelor termoelastice a doua ipoteză implică valabilitatea proprietății stipulate în prima presupunere, reciproca acestei afirmații nu este adevărată și, în general, temperatura absolută poate să se anuleze pe o mulțime rară (deci într-o infinitate de puncte !) din domeniul constitutiv, chiar dacă funcția calorică de stare are proprietatea de strictă monotonie formulată într-o ipoteză de primul tip. Coleman și Noll au construit teoria pe baza primei alternative ; noi, urmînd pe Gibbs și avînd în vedere rezultatul menționat mai sus, am optat pentru a doua alternativă (vezi postulatul **II**), considerînd că admiterea axiomatică a strictei pozitivități a temperaturii absolute este în acord cu toate faptele teoretice și experimentele ale termostaticii și termodinamicii corpurilor continue deformabile (vezi în acest sens de exp. Truesdell, Baratha [22], Cap. I.) Teorema 5.6 precizează condițiile în care cele două definiții ale echilibrului termic local sînt echivalente între ele.

În paragrafele 6—10 am prezentat modalitățile în care stările locale de echilibru termic pot fi caracterizate prin intermediul energiei libere, al entalpiei, al funcției lui Gibbs, Massieu, respectiv Planck și am stabilit principalele restricții și consecințe ce decurg din definițiile și postulatele admise, privind natura ecuațiilor constitutive și a potențialelor termostatice.

În paragraful 11, ultimul din prima parte a lucrării, am determinat acele proprietăți ale unor coeficienți de material (căldura specifică la volum, respectiv la presiune constantă, modulul de elasticitate izoterm, respectiv adiabatic, coeficientul de dilatare termică, coeficientul termic al presiunii) ce decurg, în cadrul teoriei construite, din ipotezele admise. Am analizat de asemenea, comparativ cu rezultatele similare ale lui Coleman și Noll, modul în care presiunea depinde de densitatea de masă, la o valoare fixată a temperaturii, acordînd o atenție specială valorilor (pozitive, nule sau negative) pe care le poate avea presiunea conform teoriei construite.

În partea a treia a lucrării studiem modalitățile diferite prin care poate fi caracterizată *stabilitatea stărilor globale de echilibru termic*.

În paragraful 12, urmînd calea lui Gibbs (vezi [3], § 6) și Coleman-Noll (vezi [9], § 16) introducem — prin definiție — conceptele de $\hat{\mathbf{G}}$, respectiv de $\check{\mathbf{G}}$ stabilitate, ce corespund reprezentării energetice, respectiv entropice și stabilim atît echivalența celor două definiții (*și* în cazul fluidelor neomogene), cît și condiția necesară și suficientă ce trebuie să fie satisfăcută de distribuția de presiune și de temperatură (uniformitatea lor) pentru ca stările globale de echilibru să fie stabile. Precizăm că, în esență, rezultatele noastre din acest paragraf le reproduc pe cele ale lui Coleman și Noll, includerea lor în lucrare fiind impusă de dorința de a conferi un caracter cît mai complet studiului efectuat.

În paragrafele 13 și 14 dăm o caracterizare a stabilității globale prin intermediul energiei libere și respectiv al entalpiei, specifice reprezentării energetice, iar în paragraful 15 prezentăm o caracterizare prin intermediul funcției lui Massieu, adecvată în cazul utilizării reprezentării entropice.

În paragrafele 16 și 17 introducem conceptele de $\acute{\mathbf{G}}$, respectiv de $\grave{\mathbf{G}}$ stabilitatea și determinăm condițiile necesare și suficiente ce trebuie să fie satisfăcute de distribuția de masă și de entropie, respectiv de masă și de energie internă (uniformitatea lor), pentru ca stările globale de echilibru să fie stabile conform celor două definiții admise.

Paragraful 18, și ultimul, este destinat studiului relației ce există între stabilitățile de tip $\hat{\mathbf{G}}$, respectiv $\acute{\mathbf{G}}$. Prin analiza cazului particular al unui gaz ideal, *neomogen*, arătăm că cele două concepte *nu* sînt echivalente, rezultat pe baza căruia conchidem că pentru echivalența celor două tipuri de stabilitate globală este *necesar* ca fluidul termoelastic să fie *omogen*. În cadrul teoriei construite și pe baza analizei efectuate *nu* am reușit să arătăm că omogenitatea fluidului reprezintă și o condiție suficientă pentru echivalența celor două caracterizări ale stabilității.

Considerăm că găsirea răspunsului la această întrebare este deocamdată o problemă deschisă a cercetării în ciuda faptului că în majoritatea tratatelor uzuale se acceptă — evident, fără o demonstrație riguroasă — echivalența completă a celor două modalități diferite de caracterizare a stabilității stărilor globale de echilibru, cel puțin în cazul fluidelor omogene, aflate în stări de echilibru uniforme (vezi de exp. Münster [4], Cap. VI, §§ 39—41).

În fine, mai precizăm că într-o anexă am inclus — pentru completitudine — atît enunțurile și/sau demonstrațiile unor teoreme ce se referă la anumite proprietăți esențiale ale funcțiilor convexe (concave) sau strict

convexe (strict concave), cît și un rezultat ce precizează natura mulțimii pe care se poate anula derivata unei funcții reale de o variabilă reală de clasă C^1, strict monotonă pe domeniul său de definiție.

2. CORPURI IZOLATE; IMPLICAȚII TERMODINAMICE

Fie B un corp continuu; valorile *curente* ale mărimilor termomecanice specifice termodinamicii fluidelor vor fi notate astfel: V — volumul ocupat de B; K — energia cinetică a lui B; W — puterea mecanică a forțelor exterioare ce acționează asupra lui B; E — energia internă a lui B; Q — fluxul total de căldură transmis lui B; H — entropia lui B; S — fluxul total de entropie transmis lui B; V, K, W, E, Q și S sînt funcții reale, dependente de timp; vom presupune că V, K, E și H sînt derivabile și notăm cu un punct suprapus derivatele lor temporale evaluate la momentul curent.

Presupunem că este satisfăcut *principiul de bilanț al energiei* („prima lege a termodinamicii"):

$$\dot{K} + \dot{E} = W + Q \tag{2.1}$$

și *admitem* că are loc *inegalitatea producției de entropie* („a doua lege a termodinamicii")

$$\dot{H} \geqslant S. \tag{2.2}$$

Definiția 2.1. Un set de funcții $[V, K, E, W, Q, H, S]$ definite pe un interval al axei reale și satisfăcînd relațiile (2.1), (2.2) se numește *proces termodinamic* (ce se petrece în corpul B sau la care este supus corpul B).

Definiția 2.2. Dacă într-un proces termodinamic există o constantă nenegativă P așa încît este satisfăcută inegalitatea

$$W \leqslant -P\dot{V}, \tag{2.3}$$

procesul se numește *mecanic pasiv corespunzător lui* P, interpretat ca *presiunea mediului ambiant* (a „termostatului"). Dacă într-un proces termodinamic există o constantă strict pozitivă T așa încît este satisfăcută inegalitatea

$$S \geqslant \frac{1}{T} Q, \tag{2.4}$$

procesul se numește *termic pasiv corespunzător lui* T, interpretat ca *temperatura mediului ambiant* (a „termostatului"). Dacă procesul satisface simultan relațiile (2.3) și (2.4), el se numește *termomecanic pasiv corespunzător presiunii* P *și temperaturii absolute* T ale mediului ambiant (ale „termostatului").

Observația 2.1. Din (2.2) și (2.4) urmează că, într-un proces termic pasiv, are loc inegalitatea

$$\dot{H} \geqslant \frac{1}{T} Q. \tag{2.5}$$

Observația 2.2. Din (2.1), (2.3) și (2.5) rezultă că, într-un proces mecanic pasiv, este satisfăcută restricția

$$\dot{K} + \dot{E} \leqslant -P\dot{V} + T\dot{H}. \tag{2.6}$$

Observația 2.3. Din (2.6) deducem că, într-un proces termomecanic pasiv, *funcția de tip Gibbs*,

$$Z = K + E + PV - TH, \tag{2.7}$$

corespunzătoare presiunii P și temperaturii absolute T ale mediului ambiant, satisface relația

$$\dot{Z} \leqslant 0, \tag{2.8}$$

deci valoarea ei *nu* crește în timp.

Observația 2.4. După cum rezultă din definițiile anterioare, admiterea caracterului pasiv (mecanic, termic sau termomecanic) al unui proces este o ipoteză care se referă *simultan* la *materialul* ce formează corpul, la *procesul* care se desfășoară în corp și la proprietățile sistemelor termomecanice „*exterioare*" ce acționează asupra corpului („termostat" la presiune și/sau temperatură fixată, constantă).

În consecință, admiterea unui postulat $\mathfrak{P}$, care afirmă că orice proces ce se poate petrece în corp este termomecanic pasiv corespunzător presiuni P și temperaturii absolute T ale mediului ambiant, este o restricție severă (tacit admisă, dar niciodată clar formulată în majoritatea tratatelor de termodinamică; vezi din nou [4]—[6]), dar care este respectată în multe situații concrete (vezi în acest sens Gurtin [19]).

Din observațiile precedente decurge nemijlocit

Teorema 2.1. Dacă postulatul $\mathfrak{P}$ are loc, funcția de tip Gibbs Z nu crește în timp.

Definiția 2.4. Un proces se numește *mecanic ultrapasiv* dacă (2.3) are loc *oricare* ar fi numărul nenegativ P; procesul se numește *termic ultrapasiv* dacă (2.4) are loc *oricare* ar fi numărul strict pozitiv T; un proces mecanic și termic ultrapasiv se numește *termomecanic ultrapasiv*.

Observația 2.5. Admiterea unui postulat $\mathfrak{P}_1$, conform căruia orice proces care poate avea loc în corp este ultrapasiv, restrînge și mai mult clasa materialelor, proceselor și sistemelor exterioare, fără ca prin aceasta clasa respectivă să se transforme în mulțimea vidă.

Teorema 2.2. Dacă postulatul $\mathfrak{P}_1$ are loc, atunci

$$W \leqslant 0, \quad \dot{V} \leqslant 0, \quad Q \leqslant 0, \quad \dot{E} + \dot{K} \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \dot{H} \tag{2.9}$$

și

$$\dot{Z} \leqslant 0 \quad \forall\, P \geqslant 0,\ T > 0. \tag{2.10}$$

Observația 2.6. Teorema precedentă arată că, într-un proces termomecanic ultrapasiv, volumul corpului, energia sa totală și *funcția de tip Gibbs* corespunzătoare nu pot crește în timp, iar entropia sa totală nu poate să scadă în timp, *oricare* ar fi presiunea și temperatura absolută ale mediului ambiant.

Observația 2.7. Din proprietățile precedente urmează că noțiunea de proces ultrapasiv reprezintă o posibilă formalizare a ideilor și conjecturilor

lui Gibbs privind natura acelor procese ce se pot petrece într-un corp „scufundat" într-un mediu cu presiune și temperatură constante și închis într-un „înveliș" puțin deformabil și slab conducător de căldură. Considerăm că următoarele extrase din cea de a doua lucrare a lui Gibbs sînt convingătoare în acest sens (vezii [2], § 3) :

„Presupunem că corpul este plasat într-un mediu cu presiune și temperatură constante (...). Deoarece considerăm că aceste două mărimi sînt date, presupunem că corpul este separat de mediu printr-un înveliș, care se poate deplasa sub acțiunea micii diferențe ce există între presiunea corpului și a mediului, dar care se poate mișca doar foarte lent și care conduce foarte prost căldura (...) Introducînd un astfel de înveliș avem dreptul să considerăm acțiunea corpului asupra mediului atît de încetinită, încît corpul nu poate influența sensibil omogeneitatea presiunii și a temperaturii mediului". În continuare Gibbs își concentrează atenția asupra procesului de interacțiune ce are loc între corp și mediul ambiant și scrie : „Dacă corpul nu se află în starea de echilibru termodinamic, atunci starea sa nu aparține mulțimii stărilor reprezentate de suprafața noastră (de ecuație $E = \hat{E}(V, H)$ n.n.). Totuși, corpul ca întreg posedă volum, entropie și energie determinate (...). Presupunem acum că, corpul avînd volumul V', entropia H' și energia $E' + K'$ se plasează (fiind inclus în învelișul descris) în mediul cu presiunea P și temperatura T constante și fie că, drept rezultat al acțiunii mediului și al interacțiunii părților sale proprii, corpul *ajunge* (subl. noastră) în starea finală de *repaus* (subl. noastră) în care volumul, entropia și energia sa sînt egale cu V'', H'' și E'' ($K'' = 0$ n.n). Vrem să aflăm relația între aceste mărimi". *Conjecturînd* că „...energia corpului și a mediului înconjurător poate deveni mai mică, dar nu poate să crească (ceea ce decurge din ipotezele noastre privind proprietățile învelișului...)", iar „...entropia corpului și a mediului ambiant poate doar să crească, dar nu poate să scadă...", în timp ce „...volumul corpului și al mediului ambiant evident rămîne constant. ...", după cîteva calcule simple Gibbs obține (vezi [2], relația (*e*))

$$E'' + PV'' - TH'' \leqslant E' + PV' - TH', \tag{2.11}$$

relație la scrierea căreia noi am presupus că fluidul este în repaus, deci $K' = 0$.

Este evident, din (2.7), că inegalitatea *dedusă* (2.10) nu este în contradicție cu inegalitatea *conjecturată* (2.11), dar este totodată clar că proprietatea (2.10) a funcției de tip Gibbs (2.7) *nu* implică, nici în cazul valabilității postulatului $\mathfrak{P}_1$, existența relației (2.11). *Atingerea* stării de echilibru termic într-un timp *finit* sau chiar nemărginit este un fapt a cărui valabilitate încă *nu* a fost demonstrată matematic în acele cercetări de termodinamică în cadrul cărora stările de echilibru sînt tratate ca procese particulare, cu proprietăți specifice ; deducerea riguroasă a existenței unei astfel de proprietăți, conjecturată de Gibbs, este o sarcină de maximă importanță a cercetărilor viitoare (în legătură cu acest subiect, privind semnificația dinamică a echilibrului și stabilității termostatice de tip Gibbs vezi în special discuția din lucrarea lui Coleman și Greenberg [12]).

Observația 2.8. Dacă presupunem că fluidul este *omogen* și admitem în plus că starea de echilibru global este de asemenea *omogenă*, conchidem că, ori de cîte ori (2.11) are loc, este satisfăcută și inegalitatea

$$\varepsilon'' + Pv'' - T\eta'' \leqslant \varepsilon' + Pv' - T\eta', \tag{2.12}$$

unde cu v, η, ε am notat volumul specific, entropia specifică și entropia internă specifică, ce corespund „unității de masă" și sînt legate prin ecuația $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(v, \eta)$. Deoarece (2. 11) deocamdată reprezintă o proprietate *nedemonstrată*, evident și (2. 12) are același caracter conjectural.

Observația 2. 9. Considerăm că la baza raționamentelor lui Coleman și Noll stă conjectura de tip Gibbs (2. 12) *împreună cu transformarea ei* adecvată dintr-o proprietate deocamdată *nedemonstrată*, într-o *definiție*, ce caracterizează o stare locală de echilibru termic corespunzătoare unei perechi presiune-temperatură date, indiferent de faptul că fluidul este omogen sau nu și că se află într-o stare globală de echilibru uniformă sau nu. (Vezi în acest sens Coleman și Noll [9] § 6, respectiv § 4 din lucrarea noastră).

Definiția 2.5. Un proces termodinamic se numește

(*a*) *mecanic izolat* dacă

$$\dot{V} = 0, \quad W = 0; \tag{2.13}$$

(*b*) *termic izolat*, dacă

$$Q = 0; \quad S = 0; \tag{2.14}$$

(*c*) *termomecanic izolat*, dacă este mecanic și termic izolat.

Un corp în care se pot desfășura numai procese termomecanic izolate se numește *corp termomecanic izolat* sau, pe scurt, *corp izolat.*

Din (2.3), (2.11), (2.4) și (2.12) rezultă

Teorema 2.3. Dacă B este un corp izolat, are loc proprietatea formulată în postulatul $\mathfrak{L}_1$, adică orice proces care poate avea loc în corp este termomecanic ultrapasiv.

Analog, din (2.1), (2.2), (2.7), (2.11) și (2.12) urmează imediat

Teorema 2.4. Dacă B este un corp izolat, atunci

$$\dot{E} + \dot{K} = 0, \; \dot{H} \geqslant 0 \tag{2.15}$$

și

$$\dot{Z} \leqslant 0 \quad \forall P \geqslant 0, \; T > 0. \tag{2.16}$$

Observația 2.10. Din teorema precedentă urmează că, ori de cîte ori corpul este izolat, energia sa totală este constantă în timp, entropia sa nu poate să scadă în timp, iar funcția de tip Gibbs corespunzătoare nu crește în timp, *oricare* ar fi presiunea și temperatura mediului ambiant.

Observația 2.11. Pe baza proprietăților de mai sus considerăm că noțiunea de proces (corp) izolat constituie o posibilă formalizare a ideilor și conjecturilor lui Gibbs privind, pe de o parte, proprietățile proceselor ce se pot petrece într-un fluid închis într-un înveliș rigid și neconducător de căldură, pe de altă parte, condițiile ce trebuie să fie îndeplinite pentru asigurarea permanenței (stabilității) stărilor globale de echilibru termic ale

corpurilor fluide izolate. Extrasele următoare din cea de a treia lucrare a lui Gibbs sînt edificatoare în acest sens (vezi [3], §6, respectiv §1): „Cercetăm acum stabilitatea fluidului inclus într-un înveliș rigid, neconducător de căldură și impenetrabil pentru toate componentele fluidului (...). Pentru echilibrul oricărui sistem izolat este necesar și suficient ca, pentru toate schimbările posibile ale stării sistemului, ce se petrec fără variația energiei sale, variația entropiei sistemului să fie *nulă* sau *negativă* (subl. noastră) (...). Pentru echilibrul oricărui sistem izolat este necesar și suficient ca, pentru toate schimbările posibile ale stării sistemului ce se petrec fără variația entropiei sale, variația energiei sistemului să fie *nulă* sau *pozitivă* (...). Echivalența *teoremelor* I și II (subl. noastră) este evidentă pe baza faptului că, transmițînd căldură oricărei părți a corpului sau extrăgînd căldură din orice parte a corpului, totdeauna se pot mări, respectiv micșora *simultan* atît energia, cît și entropia corpului".

În legătură cu precedentele afirmații gibbsiene se pot face observații similare cu cele legate de textele anterior citate. Este *imposibil* de stabilit dacă avem de a face cu definiții, axiome sau teoreme, în consecință le considerăm ca fiind *conjecturi geniale*, dar conjecturi. Modul în care unele din aceste conjecturi *se transformă* în definiții, altele în postulate, respectiv în teoreme poate fi urmărit atît în lucrarea lui Coleman și Noll (vezi [9], §16), cît și în partea a treia a lucrării noastre.

3. FLUIDE TERMOELASTICE; FUNCȚII CONVEXE ȘI CONCAVE

Din punct de vedere geometric, un corp continuu B, avînd drept elemente particulele X, este o varietate tridimensională simplă, scufundată într-un spațiu euclidian tridimensional (pentru detalii vezi de exp. Truesdell, Noll [23], Secț. 15).

Setul *complet* al conceptelor *primare* specifice termostaticii fluidelor termoelastice este format din următoarele cîmpuri scalare definite pe B: ρ — densitatea de masă sau, echivalent, $v = 1/\rho$ — volumul specific; p — presiunea; t — temperatura absolută; ε — energia internă specifică; η — entropia specifică, specific însemnînd „pe unitate de masă".

Densitatea de masă generează pe B o măsură *masică* $\mathfrak{M}$; integrarea pe B în raport cu $\mathfrak{M}$ va fi notată prin $\int \ldots \mathrm{d}m$, $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}v$ fiind „elementul de masă", iar $\mathrm{d}v$ „elementul de volum".

În cele ce urmează simbolurile incluse în paranteze de tip (...) vor semnifica numere reale, specificînd proprietăți *locale* ale lui B, iar simbolurile cuprinse între paranteze de tip $\{\ldots\}$ vor desemna cîmpuri definite pe B, ce caracterizează proprietăți *globale* ale corpului; astfel, același simbol η în (η) reprezintă un număr, iar în $\{\eta\}$ desemnează un cîmp. De asemenea, vom utiliza simboluri diferite pentru funcții, respectiv pentru valorile lor; astfel, $\hat{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}$ ... vor desemna funcții cu valori reale ce au drept valoare numărul ε.

Definiția 3.1. O stare termomecanică locală sau, pe scurt, o *stare locală* (în *reprezentarea energetică*) a unei particule X este o pereche (v, η) formată dintr-un număr *strict pozitiv* v, reprezentînd volumul specific al

stării locale și dintr-un număr real η, reprezentînd entropia specifică a stării locale.

Definiția 3.2. O stare termomecanică globală sau, pe scurt, o *stare globală* (în *reprezentarea energetică*) a corpului B este o pereche $\{v, \eta\}$, formată dintr-o funcție reală *strict pozitivă* v, definită pe B, reprezentînd distribuția de volum specific a stării globale și dintr-o funcție reală η, definită pe B, reprezentînd distribuția de entropie specifică a stării globale.

Materialul din care este format corpul B este specificat prin ecuații constitutive:

Definiția 3.3. Corpul continuu B este un *fluid* (lichid sau gaz) *termoelastic* dacă în orice particulă X a corpului energia internă specifică ε, presiunea p și temperatura absolută t sînt complet determinate de îndată ce starea locală a lui X este dată; adică există *funcțiile constitutive*

$$\hat{\varepsilon} : \hat{D} \times B \to R, \quad \hat{p} : \hat{D} \times B \to R, \quad \hat{t} : D \times B \to R \tag{3.1}$$

așa încît energia internă ε, presiunea p și temperatura absolută t în particula X sînt date de relațiile

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(v, \eta, X), \quad p = \hat{p}(v, \eta, X), \quad t = \hat{t}(v, \eta, X). \tag{3.2}$$

În (3.1) $\hat{D} \subset (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ reprezintă *domeniul constitutiv*; presupunem că $\hat{D}$ este o mulțime *nevidă*, *deschisă* și *convexă*. Numerele reale ε, p, t, date de ecuațiile constitutive (3.2), reprezintă energia internă specifică, presiunea și temperatura absolută în particula X, corespunzătoare stării locale (v, η) a acestei particule.

Tripletul de cîmpuri $\{\varepsilon, p, t\}$, generat de (3.2) cînd X parcurge corpul B, reprezintă *distribuția* de energie internă specifică, de presiune, respectiv de temperatură absolută în B, corespunzătoare stării globale date $\{v, \eta\}$ a fluidului termoelastic.

Relația $(3.2)_1$ este numită *ecuația calorică de stare*, iar relațiile $(3.2)_{2,3}$ se numesc *ecuațiile termice de stare* în reprezentarea energetică.

Unul din scopurile principale ale termostaticii constă în *stabilirea legăturii* ce există între ecuația calorică și ecuațiile termice de stare în cazul existenței echilibrului termic, precis caracterizat matematic (vezi în acest sens paragraful următor).

Funcțiile constitutive $\hat{\varepsilon}$, $\hat{p}$, $\hat{t}$ depind de configurația de referință a corpului; în cazul în care există o configurație de referință a lui B, așa încît funcțiile constitutive ce îi corespund nu depind explicit de particula X, fluidul termoelastic se numește *omogen*; în caz contrar el este numit *neomogen*.

Admitem că toate cîmpurile implicate în cele ce urmează sînt integrabile pe B în raport cu măsura masică $\mathfrak{M}$ generată de distribuția de masă $\{\rho\}$.

De asemenea, în tot ce urmează *presupunem* că este satisfăcută următoarea ipoteză.

$\hat{\mathbf{I}}$: Funcția constitutivă $\hat{\varepsilon}$ este de clasă C^1 pe $\hat{D}$.

Printre scopurile principale ale termostaticii se află și cel care are ca deziderat determinarea acelor proprietăți fundamentale ale funcțiilor constitutive ce trebuie să aibă loc în cazul existenței echilibrului termic

(în acest sens vezi paragraful următor). În descrierea matematică a acestor proprietăți funcțiile convexe și concave joacă un rol esențial; în consecință, am inclus în acest paragraf două teoreme legate de caracterizarea acestor funcții; D este o mulțime deschisă și convexă din R^2.

Definiția 3.4. Funcția $f : D \to R$ se numește *convexă* pe D, dacă satisface inegalitatea

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2) \leqslant \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2),\ \forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ din } D, \tag{3.3}$$

unde α și β sînt numere reale arbitrare ce satisfac restricțiile $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Teorema 3.1. Dacă funcția convexă $f : D \to R$ este de clasă C^1 pe D, următoarele afirmații sînt echivalente:

(α) f este *strict convexă* pe D, adică

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2) < \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2),\ \forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ din } D \tag{3.4}$$

α și β fiind numere reale arbitrare, satisfăcînd restricțiile din definiția 3.4.

(β) Suprafața $z = f(x, y)$, în orice punct al său se află *peste* planul său tangent din acel punct, avînd cu planul respectiv un singur punct comun: cel de tangență; mai precis

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - (x_2 - x_1) f_x(x_1, y_1) - (y_2 - y_1) f_y(x_1, y_1) > 0, \tag{3.5}$$
$$\forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ din } D.$$

(γ) gradientul lui f este *strict monoton* pe D; deci

$$(x_2 - x_1)[f_x(x_2, y_2) - f_x(x_1, y_1)] + (y_2 - y_1)[f_y(x_2, y_2) - f_y(x_1, y_1)] > 0, \tag{3.6}$$
$$\forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ din } D.$$

(δ) gradientul lui f este *injectiv* pe D; prin urmare sistemul de ecuații

$$u = f_x(x, y),\ v = f_y(x, y) \tag{3.7}$$

poate fi rezolvat în mod unic pe D în raport cu (x, y).

Observația 3.1. Funcția $f : D \to R$ se numește *concavă* pe D, dacă satisface relația obținută din (3.3) prin înlocuirea lui $\leqslant$ cu $\geqslant$.

Observația 3.2. Cu modificările evidente, teorema 3.1. rămîne valabilă și în cazul funcțiilor concave.

Teorema 3.2. Condiția necesată și suficientă ca o funcție $f : D \to R$, de clasă C^2 pe D, să fie strict convexă (concavă) pe D, este ca matricea

$$\begin{Vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{Vmatrix} \tag{3.8}$$

să fie *pozitiv* (*negativ*) *semidefinită* pe D.

---

* Vezi demonstrația în Anexă.

Matricea (3.8) este pozitiv semidefinită pe D dacă și numai dacă

$$f_{xx}(x, y) \geqslant 0 \text{ sau } f_{yy}(x, y) \geqslant 0 \text{ și } \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ pe } D. \quad (3.9)$$

Matricea (3.8) este negativ semidefinită pe D dacă și numai dacă

$$f_{xx}(x, y) \leqslant 0 \text{ sau } f_{yy}(x, y) \leqslant 0 \text{ și } \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ pe } D. \quad (3.10)$$

Observația 3.3. Pozitiv (negativ) definirea matricei (3.8) pe D este o condiție suficientă, *nu* și necesară pentru ca funcția f să fie strict convexă (concavă) pe D.

Observația 3.4. Cu modificările evidente, definiții, teoreme și proprietăți analoage sînt valabile și în cazul unei funcții reale de o variabilă reală definită pe un interval deschis al axei reale.

4. ECHILIBRUL TERMIC LOCAL; REPREZENTAREA ENERGETICĂ

Fie *dată* o pereche presiune-temperatură (p, t) și fie funcția $\hat{\zeta} : \hat{D} \times B \to R$ *definită* prin relația

$$\hat{\zeta}(v, \eta, X) = \hat{\varepsilon}(v, \eta, X) + pv - t\eta. \quad (4.1)$$

Analogia dintre această funcție și funcția de tip Gibbs Z (2.7) este evidentă.

Accentuăm faptul că $\hat{\zeta}$ *depinde* de (p, t), doi parametrii arbitrari dar fixați; pentru simplificarea notației această dependență nu este menționată explicit.

De asemenea, pentru conciziune, cînd nu este esențială, dependența de X nu va fi menționată.

Definiția 4.1. Starea locală (v, η) se numește o *stare de echilibru termic corespunzătoare perechii presiune-temperatură* (p, t) dacă

$$\hat{\zeta}(v, \eta) < \hat{\zeta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}), \quad \forall (\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) \neq (v, \eta) \text{ din } \hat{D}. \quad (4.2)$$

Analogia restricției (4.2) cu cea de tip Gibbs (2.11) este tot atît de evidentă, ca și *deosebirea* fundamentală între cele două relații: (2.11) reprezintă o conjectură, (4.2) constituie o relație ce face parte dintr-o definiție.

În continuare vom cerceta *consecințele* care decurg din precedenta caracterizare a stărilor locale de echilibru termic, deci urmărim realizarea acelor deziderate ce decurg din scopurile fundamentale ale termostaticii constituită ca teorie autonomă.

Teorema 4.1. Pentru ca starea locală (v, η) să fie o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (p, t) este necesar și suficient să fie satis-

făcute relațiile

$$p = -\hat{\varepsilon}_v(v, \eta), \quad t = \hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta), \tag{4.3}$$

$$\hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta) - (\overset{*}{v} - v)\hat{\varepsilon}_v(v, \eta) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta) > 0, \tag{4.4}$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) \neq (v, \eta) \text{ din } \hat{D}.$$

Demonstrație. Presupunem că (4.2) are loc; în acest caz $\hat{\zeta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta})$ are un *minim* în (v, η) și deci derivatele sale parțiale în raport cu $\overset{*}{v}$ și $\overset{*}{\eta}$ trebuie să se anuleze pentru $(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) = (v, \eta)$. De aici, cu (4.1), rezultă (4.3). Înlocuind (4.3) în (4.2), deducem (4.4). Reciproc: dacă (4.3), (4,4) au loc, prin înlocuirea lui (4.3) în (4.4) rezultă (4.2).

În acord cu strategia adoptată, pentru tot ce urmează, vom admite valabilitatea următorului *postulat*:

P. Pentru orice stare locală (v, η) pentru care funcția $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$ este definită, *există* o pereche presiune-temperatură (p, t) așa încît (v, η) este o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (p, t).

Postulatul admis *restrînge* domeniul de aplicabilitate al teoriei, în schimb este bogat în *consecințe*.

Astfel, din teorema 4.1 și din postulatul **P** rezultă

Teorema 4.2. Perechea presiune-temperatură (p, t) căreia îi corespunde starea locală de echilibru termic (v, η) este dată de *ecuațiile termice de stare*

$$p = \hat{p}(v, \eta) = -\hat{\varepsilon}_v(v, \eta), \quad t = \hat{t}(v, \eta) = \hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta); \tag{4.5}$$

cu alte cuvinte, funcția constitutivă ε este un *potențial termostatic*, adică ecuația calorică de stare este o *ecuație fundamentală* în sensul lui Gibbs (vezi [1] § 1).

În sensul precizat de teorema precedentă, în cazul stărilor locale de echilibru termic ale fluidelor termoelatice este satisfăcută *ecuația lui Gibbs*:

$$\mathrm{d}\varepsilon = -p\mathrm{d}v + t\mathrm{d}\eta. \tag{4.6}$$

Teorema 4.3. Funcția constitutivă $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$ este *strict convexă* în $\hat{D}$, adică satisface inegalitatea (4.4).

Legătura ce există între convexitatea strictă a funcției calorice de stare și postulatul **P** este clarificată de

Teorema 4.4. Teorema 4.3 este *echivalentă* cu postulatul **P**.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă starea locală (v, η) este dată, *definim* perechea presiune-temperatură (p, t) prin relațiile (4.3) și folosim inegalitatea (4.4) pentru a conchide valabilitatea relației (4.2), deci a faptului că (v, η) este o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (p, t).

Următoarele corolarii și observații vor dezvălui principalele *consecințe* ce decurg din definiția stării de echilibru și din postulatul admis.

Corolarul 4.1. Din teoremele 4.3 și 3.1 urmează că funcția $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$ satisface inegalitatea

$$(\overset{*}{v} - v)[\hat{\varepsilon}_v(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}_v(v, \eta)] + (\overset{*}{\eta} - \eta)[\hat{\varepsilon}_\eta(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta)] > 0, \tag{4.7}$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) \neq (v, \eta) \text{ din } \hat{D}.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁRA

Corolarul 4.2. Din (4.7), cu $\eta = \eta$, rezultă

$$(\overset{*}{v} - v)[\hat{\varepsilon}_v(\overset{*}{v}, \eta) - \hat{\varepsilon}_v(v, \eta)] > 0, \quad \forall(\overset{*}{v}, \eta) \neq (v, \eta) \text{ din } \hat{D}; \quad (4.8)$$

deci $\hat{\varepsilon}_v(v, \eta)$ este o funcție *strict crescătoare* de v pentru orice η fixat.

Corolarul 4.3. Din ecuația constitutivă $(4.5)_1$ și din corolarul precedent urmează că presiunea p, pentru orice η fixat, este o funcție *strict descrescătoare* de volumul specific v, deci o funcție *strict crescătoare* de densitatea de masă ρ.

Corolarul 4.4. Din (4.7), cu $\overset{*}{v} = v$, rezultă

$$(\overset{*}{\eta} - \eta)[\hat{\varepsilon}_\eta(v, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta)] > 0, \quad \forall(v, \overset{*}{\eta}) \neq (v, \eta) \text{ din } \hat{D}; \quad (4.9)$$

deci $\hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta)$ este o funcție *strict crescătoare* de η pentru orice v fixat.

Corolarul 4.5. Din ecuația constitutivă $(4.5)_2$ și din corolarul precedent urmează că temperatura absolută t, pentru orice v fixat, este o funcție *strict crescătoare* de entropia specifică η.

Observația 4.1. Din analiza efectuată urmează că, în cadrul teoriei pînă aici elaborate, admiterea faptului că pentru orice valoare fixată a volumului specific energia internă specifică și entropia specifică cresc sau scad *simultan implică* (vezi $4.3)_2$ stricta pozitivitate a temperaturii absolute, cu excepția eventuală a unei mulțimi rare din domeniul constitutiv. În acest sens și *numai* în acest sens cele două proprietăți — cea privind relația de strictă monotonie între ε și η, respectiv cea privind stricta pozitivitate a lui t — sînt echivalente.

Corolarul 4.6. Din teoremele 4.3 și 3.2 urmează că, în cazul în care funcția calorică de stare $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$ este de clasă C^2 pe $\hat{D}$, matricea

$$\begin{Vmatrix} \hat{\varepsilon}_{vv} & \hat{\varepsilon}_{v\eta} \\ \hat{\varepsilon}_{\eta v} & \hat{\varepsilon}_{\eta\eta} \end{Vmatrix} \quad (4.10)$$

este *pozitiv semidefinită* pe domeniul constitutiv $\hat{D}$.

5. ECHILIBRUL TERMIC LOCAL; REPREZENTAREA ENTROPICĂ

Avînd la bază observațiile corespunzătoare făcute în paragraful introductiv, rezultatul (matematic) menționat în ultima observație a paragrafului precedent și ținînd seama de proprietatea fundamentală a temperaturii absolute, vom admite în cele ce urmează valabilitatea următorului *postulat*:

II: Orice stare de echilibru termic (v, η) din $\hat{D}$ corespunde unei perechi presiune-temperatură (p, t) cu temperatura absolută t *strict pozitivă*; adică (vezi $(4.3)_2$)

$$t = \hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta) > 0, \quad \forall(v, \eta) \text{ din } \hat{D}. \quad (5.1)$$

Cercetăm în continuare *implicațiile* ce decurg din postulatul admis.

Din relaţia (5.1), consecinţă a teoremei (4.1), şi din postulatul **II**, urmează

Teorema 5.1. Energia internă specifică $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(v, \eta)$ este o funcţie *strict crescătoare* de entropia specifică η, pentru orice valoare fixată a volumului specific v, iar derivata parţială în raport cu η a funcţiei calorice de stare $\hat{\varepsilon}$ este *strict pozitivă* pe domeniul constitutiv $\hat{D}$.

Legătura ce există între proprietăţile tocmai menţionate ale funcţiei caracteristice $\hat{\varepsilon}$ şi postulatul **II** este clarificată de

Teorema 5.2. Teorema 5.1 este *echivalentă* cu postulatul **II**.

De asemenea, din ipoteza **Î** şi teorema 5.1, combinate cu teorema funcţiilor implicite (vezi de exp. [24], Cap. VIII, 7), decurg nemijlocit proprietăţile formulate în

Teorema 5.3. Ecuaţia calorică de stare $(3.2)_1$, pentru orice v fixat, are o soluţie unică în η:

$$\eta = \check{\eta}(v, \varepsilon); \tag{5.2}$$

funcţia $\check{\eta}(v, \varepsilon)$ este *strict crescătoare* în ε pentru orice v fixat, este de clasă C^1 pe domeniul său de definiţie $\check{D}$, derivata sa parţială în raport cu ε fiind *strict pozitivă* pe această mulţime; deci

$$\check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon) > 0, \quad \forall (v, \varepsilon) \text{ din } \check{D}. \tag{5.3}$$

Pe baza rezultatelor cuprinse în teorema precedentă, apare ca virtual *posibilă* o expunere şi o axiomatizare *alternativă* a termostaticii fluidelor termoelastice, în care starea locală este definită prin perechea (v, ε), iar ecuaţia calorică de stare este dată prin funcţia $\check{\eta}$, introdusă pe baza relaţiei (5.2). Pentru a transforma această posibilitate într-o construcţie efectiv realizată, vom admite *ipoteza*

Ĭ: Domeniul $\check{D} \subset (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, introdus prin teorema 5.3, este o mulţime nevidă, deschisă şi convexă.

Accentuăm faptul că proprietatea stipulată în ipoteza precedentă *nu* decurge din acele proprietăţi ale funcţiei calorice de stare $\hat{\varepsilon}$, care stau la baza concluziilor formulate în teorema 5.3.

Definiţia 5.1.: O stare termomecanică locală sau, pe scurt o *stare locală* (în *reprezentarea entropică*) a unei particule X este o pereche (v, ε) formată dintr-un număr *strict pozitiv* v, reprezentînd volumul specific al stării locale şi dintr-un număr real ε, reprezentînd energia internă specifică a stării locale.

Definiţia 5.2. O stare termomecanică globală sau, pe scurt, o *stare globală* (în *reprezentarea entropică*) a corpului B este o pereche $\{v, \varepsilon\}$, formată dintr-o funcţie reală *strict pozitivă* v, definită pe B, reprezentînd distribuţia de volum specific a stării globale şi dintr-o funcţie reală ε, definită pe B, reprezentînd distribuţia de energie internă specifică a stării globale.

Definiţia 5.3. Corpul continuu B este un *fluid termoelastic* dacă în orice particulă X a corpului entropia specifică η, presiunea p şi tempera-

tura absolută t sînt determinate de îndată ce starea locală a lui X este dată; adică există *funcțiile constitutive*

$$\check{\eta} : \check{D}\times B \to R, \quad \check{p} : \check{D}\times B \to R, \quad \check{t} : \check{D}\times B \to R, \tag{5.4}$$

așa încît entropia specifică η, presiunea p și temperatura absolută t în particula X sînt date de relațiile

$$\eta = \check{\eta}(v, \varepsilon, X), \quad p = \check{p}(v, \varepsilon, X), \quad t = \check{t}(v, \varepsilon, X). \tag{5.5}$$

În (5.4) $\check{D} \subset (0, \infty)\times(-\infty, \infty)$ reprezintă *domeniul constitutiv*. Numerele η, p și t date de *ecuațiile constitutive* (5.5) reprezintă entropia specifică, presiunea și temperatura absolută în particula X, corespunzătoare stării locale (v, ε) a acestei particule.

Tripletul de cîmpuri $\{\eta, p, t\}$ generat de (5.5) cînd X parcurge corpul B, reprezintă *distribuția* de entropie specifică, de presiune, respectiv de temperatură absolută în B, corespunzătoare stării globale date $\{v, \varepsilon\}$ a fluidului termoelastic.

Relația $(5.5)_1$ se numește *ecuația calorică de stare*, iar relațiile $(5.5)_{2,3}$ se numesc *ecuațiile termice de stare* în reprezentare entropică.

Conceptul de fluid termoelastic *omogen*, respectiv *neomogen* este definit ca în cazul reprezentării energetice.

Legătura între definițiile unui fluid termoelastic, corespunzătoare reprezentării energetice, respectiv entropice este clarificată de teorema următoare care decurge din teorema 5.3 și din ipoteza $\check{\mathbf{I}}$:

Teorema 5.4. Definițiile 3.3 și 5.3 ale unui fluid termoelastic sînt *echivalente* între ele. În plus, dacă funcția constitutivă $\hat{\varepsilon}$ este de clasă C^1 pe $\hat{D}$, funcția constitutivă $\check{\eta}$ este de clasă C^1 pe $\check{D}$, iar derivata sa parțială $\check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon)$ este *strict pozitivă* pe $\check{D}$.

În continuare vom da o *definiție alternativă* a stării de echilibru termic, corespunzătoare reprezentării entropice.

Fie *dată* o pereche presiune-temperatură (p, t) și fie funcția $\check{\upsilon} : \check{D}\times$ $\times B \to R$ definită prin relația

$$\check{\upsilon}(v, \varepsilon) = \check{\eta}(v, \varepsilon) - \pi v - \tau\varepsilon, \tag{5.6}$$

unde

$$\pi = p/t, \quad \tau = 1/t \tag{5.7}$$

reprezintă *presiunea redusă*, respectiv *gradul de răcire* sau, pe scurt, *răcirea* corespunzătoare perechii (p, t).

Definiția 5.4. Starea locală (v, ε) se numește o *stare de echilibru termic* corespunzătoare perechii presiune-temperatură (p, t) sau, echivalent, perechii presiune redusă — grad de răcire (π, τ), dacă

$$\check{\upsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) < \check{\upsilon}(v, \varepsilon), \quad \forall(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) \neq (v, \varepsilon) \text{ din } \check{D}. \tag{5.8}$$

Teorema 5.5. Pentru ca starea locală (v, ε) să fie o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (p, t) sau, echivalent, perechii (π, τ), este

necesar și suficient să fie satisfăcute relațiile

$$\pi = \check{\eta}_v(v, \varepsilon), \quad \tau = \check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon) > 0, \tag{5.9}$$

$$\check{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}(v, \varepsilon) - (\overset{*}{v} - v)\check{\eta}_v(v, \varepsilon) - (\overset{*}{\varepsilon} - \varepsilon)\check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon) < 0, \tag{5.10}$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) \neq (v, \varepsilon) \text{ din } \check{D}.$$

Demonstrație. Presupunem că (5.8) are loc; în acest caz $\check{\nu}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon})$ are un *maxim* în (v, ε) și deci derivatele sale parțiale în raport cu $\overset{*}{v}$ și $\overset{*}{\varepsilon}$ trebuie să se anuleze pentru $(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) = (v, \varepsilon)$. De aici, cu (5.6), rezultă (5.9). Înlocuind (5.9) în (5.8) deducem (5.10). Reciproc : dacă (5.9), (5.10) au loc, prin înlocuirea lui (5.9) în (5.10) rezultă (5.8).

Legătura existentă între definiția stării de echilibru termic corespunzătoare reprezentării energetice, respectiv celei entropice este stabilită de

Teorema 5.6. Dacă postulatul **Π** este admis, definițiile 4.1 și 5.4 sînt *echivalente* între ele.

Demonstrație. Deoarece $t > 0$, inegalitatea (5.8) poate fi înmulțită cu t și prin utilizarea relațiilor (5.6), (5.7) poate fi scrisă în următoarea formă echivalentă :

$$\overset{*}{\varepsilon} + p\overset{*}{v} - t\check{\eta}(\overset{*}{v}, \varepsilon) > \varepsilon + pv - t\check{\eta}(v, \varepsilon). \tag{5.11}$$

Avînd în vedere relațiile

$$\overset{*}{\eta} = \check{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}), \quad \eta = \check{\eta}(v, \varepsilon), \quad \overset{*}{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}), \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon}(v, \eta), \tag{5.12}$$

care decurg din (5.2) și ținînd seama de (4.1), (4.2), conchidem că inegalitățile (4.2) și (5.8) sînt *simultan* îndeplinite, adică sînt echivalente.

Din teoremele 5.5, 5.6 și din postulatul **P** urmează

Teorema 5.7. Perechea presiune redusă — grad de răcire (π, τ) căreia îi corespunde starea locală de echilibru termic (v, ε) este dată de ecuațiile termice de stare

$$\pi = \check{\pi}(v, \varepsilon) = \check{\eta}_v(v, \varepsilon), \quad \tau = \check{\tau}(v, \varepsilon) = \check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon), \tag{5.13}$$

adică funcția constitutivă $\check{\eta}$ este un *potențial termostatic.*

În sensul precizat de această teoremă, în cazul stărilor locale de echilibru termic ale fluidelor termoelastice este satisfăcută *ecuația lui Gibbs* :

$$\mathrm{d}\eta = \pi \mathrm{d}v + \tau \mathrm{d}\varepsilon. \tag{5.14}$$

Teorema 5.8. Funcția constitutivă $\check{\eta}(v, \varepsilon)$ este *strict concavă* pe $\check{D}$, adică satisface inegalitatea (5.10).

Teorema 5.9. Dacă postulatul **Π** este admis, teorema 5.8 este echivalentă cu postulatul **P**.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă starea localpă (v, ε) este dată, definim perechea presiune redusă — grad de răcire (π, τ) prin relațiile (5.9) și utilizăm inegalitatea (5.10) pentru a conchide valabilitatea relației (5.8). Echivalența teoremei 5.8 cu postulatul **P** rezultă acum din teorema 5.6 combinată cu teorema 4.4.

Corolarul 5.1. Din teoremele 5.8 și 3.1 urmează că funcția $\check{\eta}(v, \varepsilon)$ satisface inegalitatea

$$(\overset{*}{v} - v)[\check{\eta}_v(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}_v(v, \varepsilon)] + (\overset{*}{\varepsilon} - \varepsilon)[\check{\eta}_\varepsilon(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon)] < 0, \quad (5.15)$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) \neq (v, \varepsilon) \text{ din } \check{D}.$$

Corolarul 5.2. Din (5.15), cu $\overset{*}{\varepsilon} = \varepsilon$, rezultă

$$(\overset{*}{v} - v)[\check{\eta}_v(\overset{*}{v}, \varepsilon) - \check{\eta}_v(v, \varepsilon)] < 0, \ \forall(\overset{*}{v}, \varepsilon) \neq (v, \varepsilon) \text{ din } \check{D}; \quad (5.16)$$

deci $\check{\eta}_v(v, \varepsilon)$ este o funcție *strict descrescătoare* de v pentru orice ε fixat.

Corolarul 5.3. Din ecuația constitutivă $(5.13)_1$ și din corolarul precedent urmează că presiunea redusă π, pentru orice ε fixat, este o funcție *strict descrescătoare* de volumul specific v, deci o funcție *strict crescătoare* de densitatea de masă ρ.

Corolarul 5.4. Din (5.15), cu $\overset{*}{v} = v$, rezultă

$$(\overset{*}{\varepsilon} - \varepsilon)[\check{\eta}_\varepsilon(v, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon)] < 0, \ \forall(v, \overset{*}{\varepsilon}) \neq (v, \varepsilon) \text{ din } \check{D}; \quad (5.17)$$

deci $\check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon)$ este o funcție *strict descrescătoare* de ε, pentru orice v fixat.

Corolarul 5.5. Din ecuația constitutivă $(5.13)_2$ și din corolarul precedent urmează că gradul de răcire τ, pentru orice v fixat, este o funcție *strict descrescătoare* de energia internă specifică ε, deci echivalent, temperatura absolută t este o funcție *strict crescătoare* de ε, oricare ar fi v fixat.

Corolarul 5.6. Din teoremele 5.8 și 3.2 rezultă că dacă funcția $\check{\eta}(v, \varepsilon)$ este de clasă C^2 pe $\check{D}$, matricea

$$\begin{Vmatrix} \check{\eta}_{vv} & \check{\eta}_{v\varepsilon} \\ \check{\eta}_{\varepsilon v} & \check{\eta}_{\varepsilon\varepsilon} \end{Vmatrix} \quad (5.18)$$

este *negativ semidefinită* pe $\check{D}$.

Primită la redacție la 5 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. J. W. GIBBS, *Graphical methods in the thermodynamics of fluids*, Trans. Connect. Acad., **2**, 309—342 (1873); vezi și în J. W. Gibbs, Термодинамика — Статистическая механика, Изд. Наука, Москва, 1982, p. 9—39.
2. J. W. GIBBS, *A method of geometrical reprezentation of the thermodynamic properties of substances by means of surfaces*, Trans. Connect. Acad., **2**, 382—404 (1873); vezi și în Ref. [1] p. 40—60.
3. J. W. GIBBS, *On the equilibrium of heterogeneous substances*, Trans. Connect. Acad., **3**, 108—248 (1876); **3**, p. 343—524, (1878); vezi și în Ref. [1] p. 61—349.
4. A. MÜNSTER, *Chemische Thermodynamic*, Akademie Verlag, Berlin 1969.
5. S. STERNBERG, O. LANDAUER, C. MATEESCU, D. GEANĂ, T. VIȘAN, *Chimie fizică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
6. Ș. ȚIȚEICA: *Termodinamica*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1982.
7. C. TRUESDELL, R. A. TOURIN, *The classical field theories*, în *Handbuch der Physik*, Bd. III/1, Springer, Berlin, Heidelberg, Göttingen, 1960.
8. C. TRUESDELL, *Thermodynamics of deformation*, în *Non-equilibrium thermodynamics, variational techniques, and stability*, 1966, p. 101—112.

9. B. D. COLEMAN, W. NOLL : *On the thermostatics of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, p. 91—128 (1959).
10. B. D. COLEMAN, W. NOLL : *Material symmetry and thermostatic inequalites in finite elastic deformation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **15**, p. 87—111 (1964).
11. B. D. COLEMAN, V. J. MIZEL, *Existence of caloric equation of state in thermodynamics* J. Chem. Phys., **40**, p. 1116—1125 (1964).
12. B. D. COLEMAN, J. M. GREENBERG, *Thermodynamics and stability of fluid motion*, Arch. Rat. Mec. Anal., **25**, p. 321—341 (1967).
13. C. TRUESDELL, *La thermodynamique de la deformation*, in *Proceedings of Canadian Congress of Applied Mechanics* 1967, vol. 3, p. 207—231.
14. C. TRUESDELL, Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, Изд. Мир, Москва, 1975.
15. C. TRUESDELL, *Thermodinamica razionale*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.
16. I. MÜLLER, *Thermodynamics*, Technische Universität Berlin (manuscris litografiat).
17. M. E. GURTIN, *Modern continuum thermodynamics*, in *Mechanics Today* vol. 1, Ed. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press, 1972 p. 188—213.
18. M. E. GURTIN, *Thermodynamics and the potential energy of elastic body*, J. Elasticity, **3**, p. 23—26 (1973).
19. M. E. GURTIN, *Thermodynamics and the energy criterion for stability*, Arch. Rat. Mech. Anal., **52**, p. 93—103 (19).
20. J. E. DUNN, R. L. FOSDICK, *The morphology and stability of material phases*, Arch. Rat Mech. Anal., **74**, p. 1—99 (1980).
21. R. L. FOSDICK, *Structure and stability of Gibbsian states* (manuscris nepublicat).
22. C. TRUESDELL, S. BARATHA, *The concept and logic of classical thermodynamics as a theory of heat engines*, Springer, New York, Heidelberg Berlin, 1978.
23. C. TRUESDELL, W. NOLL- *The non-linear field theories of mechanics, in Handbuch der Physik*, Bd. III/3, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
24. M. NICOLESCU, N. DINCULEANU, S. MARCUS, *Analiză matematică*, vol. I, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

MIȘCAREA CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ A APEI SUBTERANE ÎNTR-UN MEDIU POROS BISTRATIFICAT

de ELENA UNGUREANU-DAVID

Institutul de Matematică, București

În lucrarea de față se scrie ecuația pentru mișcarea plană cu suprafață liberă care are loc într-un mediu poros format din două strate de permeabilități diferite și se dă o soluție a ecuației pentru anumite condiții la limită.

1. FORMULAREA PROBLEMEI

Mișcarea cu suprafață liberă a apei subterane și cunoașterea nivelului la care se ridică aceasta în sol au o deosebită importanță în practică, ceea ce explică necesitatea existenței unor studii în această direcție. Aflarea cotei suprafeței libere se poate face prin diverse metode de calcul sau prin măsurători.

Cu ajutorul metodelor matematice se pot da atît soluții analitice, cît și numerice, dar rezolvarea problemei la limită este destul de complicată datorită neliniarității ei. Gradul de dificultate crește dacă în plus mediul poros nu este omogen peste tot.

În lucrarea de față se consideră mișcarea plană cu suprafață liberă a apei subterane în cazul solului format din două strate orizontale de permeabilități diferite. Se scrie ecuația cu derivate parțiale a suprafeței libere și se dă o soluție a acesteia pentru anumite condiții inițială și la limită

Considerăm mediul poros de grosime H° situat deasupra unui plan orizontal impermeabil și limitat lateral de două plane verticale care constituie frontierele de contact cu două bazine de alimentare. Distanța dintre bazine este L, iar nivelul apei din ele poate fi constant sau variabil. Mișcarea este plană, planul mișcării fiind cel vertical. Alegem sistemul de axe xOy, cu axa Ox în planul orizontal impermeabil și axa Oy după verticala ascendentă astfel încît frontierele celor două bazine de alimentare să aibă ecuațiile $x = 0$ și $x = L$. Coeficientul de filtrație al mediului poros este egal cu $k = k_1 = \text{const.}$ pentru $0 < y < h$ și $k = k_2 = \text{const.}$ pentru $h < y < H^\circ$, $k_1 \neq k_2$.

Notăm cu $H(x, t)$ cota suprafeței libere măsurată de la planul $y = 0$, t fiind timpul. Se cere să se determine această funcție cunoscînd valorile ei la momentul inițial $t = 0$ în fiecare punct x și valorile pe cele două frontiere $x = 0$ și $x \neq L$, anume

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad H(0, t) = H_1(t), \quad H(L, t) = H_2(t). \tag{1}$$

Dacă mediul poros este omogen, mișcarea cu suprafață liberă poate fi descrisă cu ajutorul ecuației lui Boussinesq. Această ecuație este valabilă dacă se admit două ipoteze simplificatoare și anume că suprafața liberă variază în jurul unui plan orizontal, iar componentele orizontale ale vitezei de filtrație nu depind de cota punctului respectiv [1—2]. O generalizare a ecuației lui Boussinesq pentru k variabil cu înălțimea a fost dată în [2].

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 6, 1985, P. 524—529

Aici vom scrie ecuația pentru suprafața liberă pentru cazul coeficientului de filtrație constant dar diferit în cele două strate orizontale. În continuare vom da o soluție a ecuației avînd condițiile la limită (1).

2. ECUAȚIA SUPRAFEȚEI LIBERE

Notăm cu v_1 și v_2 vectorii vitezei de filtrație din cele două strate, $0 < y < h$ și, respectiv, $h < y < H^\circ$. Atunci legea lui Darcy se scrie [1, 3]

$$v_j = \text{grad } \varphi_j ; \quad \varphi_j = \varphi_j(x, y, t) = - k_j \left(\frac{p_j}{\gamma} + y \right), \tag{2}$$

unde p_j este presiunea, iar indicele $j = 1$ corespunde stratului de jos, $j = 2$ corespunde stratului de sus.

Cînd suprafața liberă se află tot timpul în stratul de jos, coeficientul de filtrație este constant pe tot domeniul mișcării și avem chiar ecuația lui Boussinesq. Scopul lucrării noastre este să studiem mișcarea care are loc în două strate, prin urmare suprafața liberă se va afla în stratul de sus Vom admite aceleași ipoteze care au fost făcute și în cazul ecuației lui Boussinesq și pe care le-am amintit mai sus.

Pe suprafața liberă avem $y = H(x, t)$, $p = p_0 = \text{const.}$, iar $\varphi_2(x, y, t)$ se aproximează prin $\varphi_2(x, y_0, t)$, conform ipotezei făcute, unde y_0 este cota planului orizontal în jurul căruia variază suprafața liberă. Atunci relația a doua din (2) se scrie pe suprafața liberă.

$$\varphi_2(x, y_0, t) + k_2 H(x, t) = \text{const.} \tag{3}$$

Pe frontiera de separare $y = h$ a stratelor trebuie să punem condițiile de racordare a presiunilor și a componentelor normale ale vitezelor din cele două strate. Folosind legea lui Darcy (2), acestea se pot scrie sub forma

$$k_2 u_1 = k_1 u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \text{pentru } y = h, \tag{4}$$

unde u_1, u_2 sînt componentele orizontale, iar v_1, v_2 sînt componentele verticale ale vitezelor de filtrație. De asemenea, pentru $y = 0$ avem condiția $v_1 = 0$.

Ecuația suprafeței libere, $y = H(x, t)$, se derivează cu t și se are în vedere că $m\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u_2$, $m\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = v_2$, m fiind porozitatea, de unde căpătăm ecuația

$$m \frac{\partial H}{\partial t} + u_2 \frac{\partial H}{\partial x} - v_2 = 0. \tag{5}$$

Componenta u_2 se scrie din (2) și (3) sub forma

$$u_2 = - k_2 \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{6}$$

iar pentru aflarea expresiei lui v_2 se procedează în felul următor : ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = 0, \; j = 1, 2,$$

scrisă în cele două strate, se integrează în raport cu y,

$$v_1(x, y, t) = -\int_0^h \frac{\partial u_1}{\partial x}\, dy,$$

$$v_2(x, H, t) - v_2(x, h, t) = -\int_h^H \frac{\partial u_2}{\partial x}\, dy.$$

În ipoteza că u_1 şi u_2 nu depind de y şi ţinînd cont de (4) şi (6), rezultă

$$v_2(x, H, t) = -\left(H - h + \frac{k_1}{k_2} h\right)\frac{\partial u_2}{\partial x} = [k_2(H - h) + k_1 h]\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Cu aceasta, ecuaţia (5) devine

$$m\frac{\partial H}{\partial t} = k_2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + [(k_1 - k_2)h + k_2 H]\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Aceasta este o ecuaţie cu derivate parţiale neliniară pentru funcţia necunoscută $H(x, t)$. La ea se mai poate adăuga un termen liber $v_0(x, t)$, care să reprezinte evaporarea sau infiltraţiile prin suprafaţa liberă. Pentru $k_1 = k_2$ (8) se reduce la ecuaţia lui Boussinesq

$$m\frac{\partial H}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right). \quad (9)$$

În multe cazuri este convenabil să se lucreze cu mărimi adimensionale. De aceea considerăm util să scriem şi forma adimensională a ecuaţiei (8).

Vom introduce funcţia adimensională U şi variabilele adimensionale X şi T,

$$U = \frac{H}{H^\circ}\; ; \; X = \frac{x}{L}\; ; \; T = \frac{t}{T^*}, \quad (10)$$

unde T^* este un timp caracteristic, care se ia de forma

$$T^* = \frac{mL^2}{k_2 H^0}. \quad (11)$$

Atunci ecuaţia (8), luată cu termenul liber v_0, devine

$$\frac{\partial U}{\partial T} = (U + K)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + w_0(X, T), \quad (12)$$

unde

$$w_0 = \frac{L^2 v_0}{(H^0)^2 k_2} \; ; \; K = \frac{k_1 - k_2}{k_2} \frac{h}{H^0}. \tag{13}$$

Pentru $k_1 = k_2$ se obține forma adimensională a ecuației lui Boussinesq

$$\frac{\partial U_0}{\partial T} = U_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial X}\right)^2 + w_0, \tag{14}$$

unde am notat cu U_0 funcția U pentru acest caz.

3. SOLUȚIA PROBLEMEI LA LIMITĂ

Vom da acum o soluție pentru ecuația (8) avînd condițiile inițială și la limită (1). Rezolvăm problema în cazul $v_0 = 0$.

Pentru ca suprafața liberă să rămînă tot timpul în stratul de sus, trebuie să admitem de la început că $H_j > h$, $j = 0, 1, 2$.

Condițiile la limită se adimensionalizează și ele și devin pentru funcția $U(X, T)$

$$U(X, 0) = \frac{H_0(XL)}{H^0} \; ; \; U(0, T) = \frac{H_1(TT^*)}{H^0} \; ; \; U(1, T) = \frac{H_2(TT^*)}{H^0}. \tag{15}$$

Problema este de a rezolva ecuația (12), din care lipsește termenul liber w_0, cu condițiile (15). Pentru aceasta facem schimbarea de funcție

$$\tilde{U}(X, T) = U(X, T) = + K \tag{16}$$

și ecuația (12) devine

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial T} = \tilde{U} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial X}\right)^2, \tag{17}$$

cu condițiile

$$\tilde{U}(X, 0) = F_0(X) \; ; \; \tilde{U}(0, T) = F_1(T) \; ; \; \tilde{U}(1, T) = F_2(T), \tag{18}$$

unde $F_j = \frac{H_j}{H^0} + K, j = 0, 1, 2$. Din restricția $H_j > h$ rezultă $F_j > \frac{h}{H^0} \frac{k_1}{k_2}$.

Se observă că ecuația (17) are aceeași formă ca și (14), fără termen liber. De aceea problema pentru $\tilde{U}$ se poate rezolva prin aceleași metode ca și ecuația lui Boussinesq, dar cu alte condiții la limită.

Aici vom folosi o metodă de separare a variabilelor, luînd $\tilde{U}$ sub forma

$$\tilde{U}(X, T) = P(X) \cdot R(T) \tag{19}$$

și se obțin două ecuații diferențiale pentru cele două funcții $P(X)$ și $R(T)$,

$$\frac{R'}{R^2} = \frac{(PP')'}{P} = -A^2,$$

unde A este o constantă. Prin integrare găsim

$$R(T) = \frac{1}{A^2T + B} \; ; \; X = \int_{P_0}^{P} \frac{P \cdot dP}{\sqrt{C_1 - \frac{2}{3}A^2P^3}} + C_2, \tag{20}$$

cu B, C_1, C_2 constante de integrare. Pentru $P(X)$ nu se poate da forma explicită, așa cum se știe și de la ecuația lui Boussinesq [1]. Dar integrala de mai sus se poate exprima cu ajutorul integralei euleriene de speța întîi $B(\alpha, \beta)$ și din tabelele care există pentru această funcție se pot deduce relațiile numerice dintre P și X. Limita inferioară de integrare P_0 trebuie aleasă astfel încît integrala să fie calculată pe domeniul valorilor lui P. Dintre cele patru constante A, B, C_1, C_2, numai trei sînt independente și ele se determină din cele trei condiții (18).

După aflarea funcției $\bar{C}(X, T)$, cu ajutorul formulelor (10) și (16) se revine la funcția $H(x, t)$, care reprezintă cota suprafeței libere și astfel problema este rezolvată.

Ca exemplu să luăm cazul cînd nivelele apei din bazinele de alimentare rămîn constante, deci în condițiile la limită (1) avem $H_1 = \text{const}$ $H_2 = \text{const.}$ și $H_1 < H_2$, ceea ce înseamnă că $F_1 = \text{const.}$, $F_1 < F_2$. Fără a aduce vreo modificare formei soluției, putem lua constanta $B = 1$. În ce privește condiția inițială, ea trebuie să fie aleasă astfel încît $F_0(X)$ să aibă aceeași formă ca $P(X)$.

Punînd în (20) condiția $P = P_0 = F_1$ pentru $X = 0$, rezultă $C_2 = 0$. De asemenea, luînd $\frac{3C_1}{2A^2} = F_2^3$, a doua relație din (20) devine

$$X = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{F_1}^{P} \frac{P dP}{\sqrt{F_2^3 - P^3}}.$$

Facem schimbarea de variabilă $P^3 = F_2^3 s$ și rezultă

$$X = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{F_2}{6}}\int_{s_0}^{s} s^{-1/3}(1-s)^{-1/2}\, ds, \; s_0 = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^3 < 1. \tag{22}$$

Punînd condiția $P = F_2$ pentru $X = 1$, obținem de aici constanta A

$$A = \sqrt{\frac{F_2}{6}} = \int_{s_0}^{1} s^{-1/3}(1-s)^{-1/2}\, ds \tag{23}$$

și prin înlocuire în (21) avem relația dintre X și P.

Ultima integrală se mai poate scrie

$$A\sqrt{\frac{6}{F_2}} = \int_{0}^{1} s^{-1/3}(1-s)^{-1/2}\, ds - \int_{0}^{s_0} s^{-1/3}(1-s)^{-1/2}\, ds.$$

Prima integrală este integrala euleriană $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, iar a doua integrală poate fi adusă la o formă asemănătoare, făcînd o schimbare de variabilă $s = s_0 s^*$ și aproximînd în paranteză pe $s_0 s^*$ prin s. Atunci ultima relație devine

$$A = \sqrt{\frac{F_2}{6}}\left[1 - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2\right] B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

În acest fel toate constantele au fost determinate și soluția pentru $\tilde{U}$ este dată de (19), (20), după care se revine la funcția $H(X, T)$.

Dacă facem $k_1 = k_2$, deci $K = 0$ și punem condiția $F_1 = 0$, din (22) avem

$$X = \frac{1}{B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^s s^{-1/3}(1 - s)^{-1/2}\, \mathrm{d}s.$$

Se regăsește astfel ca un caz particular soluția lui Boussinesq, valabilă pentru un mediu poros omogen ([1] p. 455).

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în Hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei R. S. România, 1966.
2. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei R. S. România, 1963.
3. HORIA I. ENE, SORIN GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei R. S. România, 1973.

Primită la redacție la 14 iunie 1985

CONTRIBUȚII NOI LA STUDIUL MIȘCĂRII LAMINARE A FLUIDULUI VÎSCOS. I. VÎRTEJUL FIZIC PE FRONTIERELE SOLIDE

de I. SETEANU, M. ERHAN

Institutul Politehnic București

Se studiază mișcarea plană laminară a fluidului vîscos în domeniul simplu conex de tip „bandă", insistîndu-se asupra procedeului de transformare conformă pe banda rectangulară. Se analizează comportarea vîrtejului fizic pe frontirele solide, constatîndu-se creșterea sa nemărginită în vecinătatea punctelor anguloase interne. Se propune utilizarea în calculul numeric a vîrtejului „fictiv" din planul transformat.

INTRODUCERE

Deși studiul mișcării laminare plane permanente a fluidului vîscos a constituit obiect de analiză pentru un număr mare de cercetători, pînă în prezent nu există un procedeu numeric sigur de determinare a soluției, constatîndu-se o oarecare incertitudine în schema de aproximare numerică a modelului teoretic (ecuațiile Navier-Stokes).

Se cunoaște un mare număr de tentative de abordare a problemei cu diverse scheme de discretizare, de dezvoltare a soluției în serie Taylor trunchiată și de desfășurare a procedeului numeric în funcție de sensul de parcurgere a rețelei [2], [6], [7], [8], [9], [10], [11].

În lucrarea de față se evidențiază cauza principală a dificultăților amintite legate de tendința asimptotică de creștere a vîrtejului, $\omega = -\Delta\psi$, în vecinătatea punctelor anguloase ale frontierelor solide, fapt semnalat și de alți autori [4]. Se indică un procedeu riguros de estimare a valorilor vîrtejului pe frontierele solide care va servi într-un articol ulterior la elaborarea unui algoritm de calcul coerent.

1. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Se analizează curgerea plană permanentă laminară a fluidului vîscos într-un domeniu de tip bandă (fig. 1), avînd frontierele paralele la mare distanță amonte și aval, zone în care mișcrea poate fi descrisă prin soluția lui Poiseuille :

$$U = \frac{1}{2\eta}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right| Y(h - Y), \tag{1}$$

$$V = 0, \tag{2}$$

unde U și V sînt componentele vitezei, η este vîscozitatea dinamică a fluidului, p reprezintă presiunea, iar h este lățimea canalului la mare distanță.

La distanță finită, frontiera se admite netedă pe porțiuni, putînd prezenta puncte anguloase dirijate atît spre interior cît și spre exterior.

Introducînd funcția de curent ψ în coordonate adimensionale (lungimea de referință este lățimea canalului la mare distanță aval $-h$, res-

pectiv debitul egal cu unitatea), ecuațiile Navier-Stokes se scriu [1]:

$$\Delta\Delta\psi = Re\frac{D(\Delta\psi, \psi)}{D(x, y)}, \tag{3}$$

unde Re reprezintă numărul Reynolds al mișcării.

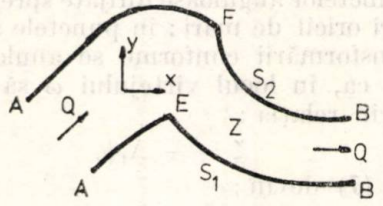


Fig. 1

Dacă se notează cu ω vîrtejul, definit prin relația:

$$\omega = -\Delta\psi,$$

se obține sistemul echivalent:

$$\Delta\psi = -\omega \tag{4}$$

$$\Delta\omega = Re\frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)}. \tag{5}$$

Condițiile la limită pe suprafețele solide constau din anularea componentelor vitezei (condiția de aderență).

Schema uzuală de studiu a sistemului (4), (5) în diferențe finite presupune posibilitatea dezvoltării în serie a funcției de curent ψ, respectiv a vîrtejului ω, atît în vecinătatea punctelor interioare, cît și în vecinătatea frontierelor solide, constatîndu-se o slabă convergență a metodei la numere Reynolds mici; la numere Reynolds suficient de mari, soluția se obține doar cu prețul acceptării unor ipoteze ad-hoc, fără o justificare riguroasă. În special convergența metodei este foarte slabă în cazul prezenței punctelor anguloase, adoptîndu-se procedee speciale de analiză a soluției în vecinătatea acestora [2.]

Deși utilizarea „planului dublu'' $\psi - \omega$ prezintă unele avantaje în elaborarea algoritmului rezolvării numerice, imprecizia determinării condițiilor la limită pentru funcția ω reprezintă un obstacol important.

Fie transformarea conformă $w = u + iv = f(z)$, unde $z = x + iy$, care realizează corespondența dintre canalul de tip bandă (fig. 1) din planul fizic z și banda rectangulară din planul „fictiv'' w (fig. 2). Ecuațiile transformate de mișcare se scriu [3]:

$$T_k\Delta_1\psi = -\omega, \tag{6}$$

$$\Delta_1(T_k\,\Delta_1\psi) = Re\frac{D(T_k\Delta_1\psi, \psi)}{D(u, v)}, \tag{7}$$

unde $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$.

Modulul transformării conforme, T_k,

$$T_k = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2, \tag{8}$$

este definit în punctele interioare ale bandei rectangulare și pe frontiera acesteia cu excepția punctelor anguloase dirijate spre interior, în vecinătatea cărora poate lua valori oricît de mari; în punctele anguloase dirijate spre exterior modulul transformării conforme se anulează.

Este convenabil ca, în locul vîrtejului ω să se introducă vîrtejul „fictiv" ζ, definit prin relația:

$$\zeta = -\Delta_1\psi. \tag{9}$$

Ecuațiile (6) și (7) devin:

$$\omega = T_k\zeta, \tag{10}$$

$$\Delta_1(T_k\zeta) = Re\frac{D(T_k\zeta, \psi)}{D(u, v)}. \tag{11}$$

Simplitatea deosebită a formei frontierelor solide în planul fictiv dă posibilitatea determinării exacte a condițiilor la limită pentru vîrtejul fictiv ζ, respectiv, inversînd transformarea conformă, se obține comportarea analitică a vîrtejului fizic în planul real z.

Deoarece, pe frontierele rectilinii S din planul w funcția de curent ψ este constantă, derivatele sale parțile de orice ordin în raport cu variabila u sînt nule în lungul acestor frontiere. În particular, vîrtejul fictiv devine:

$$\zeta_S = -\frac{d^2\psi}{dv^2}, \tag{12}$$

iar derivata sa după u se anulează:

$$\left.\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right|_S = 0. \tag{13}$$

În acest fel, rezultă că vîrtejul fictiv este constant atît pe frontiera solidă inferioară, cît și pe cea superioară, valorile acestor constante fiind precizate prin condițiile la mare distanță amonte și aval (curgerea Poiseuille) întrucît modulul transformării tinde la rîndul său asimptotic către o constantă în aceste zone:

$$\zeta_{S_1} = 6, \quad \zeta_{S_2} = -6. \tag{14}$$

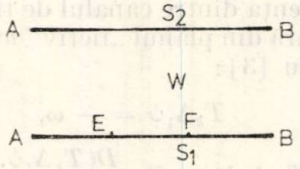


Fig. 2

În conformitate cu relația (10), în punctele interioare ale domeniului de studiu, vîrtejul fizic este:

$$\omega = T_k\zeta.$$

În punctele frontierei în care modulul transformării T_k este definit, valorile limită ale vîrtejului în planul fizic se scriu :

$$\omega_{S_1} = 6T_k, \quad \omega_{S_2} = -6T_k. \tag{15}$$

Prin urmare, vîrtejul fizic se anulează în punctele anaguloase externe și crește nemărginit în valoare absolută în vecinătatea punctelor anguloase interne, rămînînd proporțional cu modulul T_k al transformării conforme. Se obține în acest fel un răspuns precis la problema evaluării asimptotice a vîrtejului în vecinătatea punctelor speciale, eliminîndu-se ambiguitatea constantă în literatura de specialitate (în lucrarea 6 sînt menționate cel puțin șapte posibilități, adoptate de diferiți cercetători, privind estimarea vîrtejului în punctele anguloase interioare). Totodată, se poate afirma că dezvoltarea în serie Taylor trunchiată în vecinătatea acestor puncte este nelegitimă, ca urmare a acreșterii nemărginite a derivatei a doua a funcției de curent ψ.

2. PARTICULARITĂȚILE TRANSFORMĂRII CONFORME CU VÎRFURI ROTUNJITE

Întrucît în situațiile reale punctele anguloase ideale sînt de fapt mai mult sau mai puțin rotunjite, este util să se considere aplicarea metodei transformărilor conforme și în acest caz. De exemplu, pentru domeniul „canal cu lărgire bruscă" (fig. 3). transformarea conformă pe banda rectangulară, în absența rotunjirilor, se scrie :

$$\pi z = \operatorname{arch}\left(\frac{2k}{k-1}\,e^{\pi w} - \frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arch}\left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1}\,e^{-\pi w}\right), \tag{16}$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{ke^{\pi w}-1}{e^{\pi w}-1}}, \tag{17}$$

în timp ce în cazul rotunjirii punctului angular E se obține [5] :

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{k}(1+\gamma)}\,\frac{\sqrt{ke^{\pi w}-1}+\gamma\sqrt{ke^{\pi w}-1+\beta}}{\sqrt{e^{\pi w}-\left(1-\frac{\gamma\beta}{1+\gamma}\right)^2}} \tag{18}$$

$$\frac{z}{C} = \operatorname{arch}\left(\frac{2w_1-1-c}{c-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arch}\frac{(c+1)w_1-2c}{(c-1)w_1} +$$

$$+\gamma\operatorname{arch}\frac{2w_1-1-c+\beta}{c-1+\beta} -$$

$$-\gamma\sqrt{\frac{1-\beta}{c}}\operatorname{arch}\frac{(c+1-\beta)w_1-2c(1-\beta)}{(c-1+\beta)w_1}, \tag{19}$$

unde $w_1 = ce^{\pi w}$, iar constantele C, ρ, c, γ satisfac următoarele ecuații de condiție :

$$C\pi \frac{1 + \gamma(1 - \beta)}{\sqrt{c}} = h, \tag{20}$$

$$C\pi(1 + \gamma) = k, \tag{21}$$

$$\rho = 2C\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{Bc}{c + \beta - 1}} - \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\beta}{c + \beta - 1}}\right), \tag{22}$$

$$\rho = 2C\gamma\left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{c - 1}} - \sqrt{\frac{1 - \beta}{c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta c}{(1 - \beta)(c - 1)}}\right). \tag{23}$$

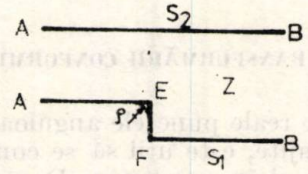


Fig. 3

Impunînd valoarea coeficientului de corecție β, prin iterații succesive, se obține din sistemul de mai sus mărimile celorlalte constante. De exemplu, pentru $\beta = 0{,}5$ și $k/h = 2{,}0$ rezultă : $\gamma = 0{,}01973$; $c = 3{,}92298$; $C = 0{,}31215$; $\rho = 0{,}06041$.

Parametrul ρ reprezintă raza de rotunjire a punctului angulos E, crescînd în general odată cu parametrul β. Pe frontiera solidă, în nodul rotunjit E modulul transformării este :

$$T_k|_E = \frac{|1 - c|}{\pi^2\gamma^2\beta C^2} = 1{,}562 \cdot 10^4.$$

În consecință, mărimea vîrtejului fizic în acest punct $\omega_E = 6T_{kE}$ devine foarte mare în valoare absolută, introducînd erori apreciabile în procesul de aproximare în diferențe finite.

O posibilitate de eliminare a dificultăților legate de comportarea singulară pe frontieră a vîrtejului fizic constă în înlocuirea sa în procesul de calcul prin vîrtejul fictiv ζ din planul w. Caracterul regulat al comportării acestuia atît în punctele interioare, cît și pe frontierele transformate asigură convergența rapidă a metodei numerice, chiar la numere Reynolds mari.

Într-o lucrare ulterioară, se va analiza aplicarea metodei diferențelor finite în planul dublu $\psi - \zeta$, constatîndu-se relativa independență a soluției de gradul de rotunjire al punctelor anguloase interne.

Primită la redacție la 22 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. OROVEANU T., *Mecanica fluidelor viscoase* Edit. Academiei R. S. România, Bucureşti, 1967.
2. DUMITRESCU, D., CAZACU, M., CRĂCIUN, C., *Solutions numérique et recherches expérimentales dans l'hydrodynamique des fluides visqueux à la nombre de Reynolds petits*, Proc. of 11-th Intern. Congress of Appl. Mech., Munich, 1964.
3. SETEANU I., *Séries dans l'étude du fluide visqueux*, Rev. Roum. des Scie. Techn., Mecanique Applique, *14*, 3, (1969).
4. ROACHE, P. J., *Computational Fluid Dynymics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, 1976.
5. LAVRENTIEV, M. A., SABAT, V. V., *Metodi teorii funcţii complexnogo peremenogo*, Iz. Nauka, GRFML, Moskva, 1965.
6. ROACHE, P. J., MUELLER, T. J., *Numerical solutions of laminar separated flows*, AIAA Journ., *3* (1970).
7. KAWAGUTI, M., *Numerical solutions of the Navier-Stokes equations for the flow in a channel with a step*, MRC, TSR 574, Math. Res. Center, Madison, Winsconsin, 1965.
8. MECAGNO, E. O., HUNG, T. K. — *Pressure Bernoulli sum and momentum and energy relations in a laminar zone of separation*, Phys. of Fluids, 10, 1 (1967).
9. KACKER, S. C., WHITELAW, J. H., *Prediction of walljet and wallwave flows*, Journ. of Mech. Eng. Sci., 12, 6 (1970).
11. THOM, A. APELT, C. J., *Field computation in engineering and physics*, Van Nostrand Company, Ltd., 1961.
12. GREENSPAN, D., *Numerical studies of steady viscous incompressible flow in a channel with a step*, Journ. of Engineering Math., 3, 1 (1969).

CONSIDERAȚII ASUPRA METODELOR CU PANOURI DIN AERODINAMICĂ

de V. N. CONSTANTINESCU
Institutul Politehnic București
I. JADIC
INCREST

În lucrare se tratează metoda inelelor de vîrtej folosită în rezolvarea problemei liniarizate a curgerilor subsonice subcritice, punîndu-se în evidență influența folosirii unor formule aproximative pentru calculul vitezelor induse, asupra intensității singularităților ce modelează curgerea considerată.

INTRODUCERE

Problemele asupra cărora ne vom opri în cele ce urmează, se referă la modul în care se determină intensitățile singularităților folosite pentru a simula curgerea subsonică subcritică potențială în jurul unei configurații complexe.

Se va analiza numai cazul panourilor cu inele de vîrtej, descris în [2]; în mod similar pot fi tratate și alte singularități.

PUNEREA PROBLEMEI

Ecuația liniarizată a potențialului este [1]:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_r^2} = 0. \tag{1}$$

Prin intermediul unei transformări de coordonate (Prandtl-Glauert)

$$x = \frac{x_r}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}\ ;\ y = y_r\ ;\ z = z_r, \tag{2}$$

ecuația (1) corespunzînd mișcării compresibile „reale" poate fi pusă sub o formă incompresibilă echivalentă, într-un sistem de coordonate (x, y, z) definit de (2); deci

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Condițiile la limită specifică tangența curgerii la corp și anularea perturbațiilor la mari distanțe,

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = 0, \tag{4}$$

și condiții corespunzătoare la infinit.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 44, NR. 6, 1985, P. 536–546

REZOLVAREA PROBLEMEI PRIN METODA INELELOR DE VÎRTEJ

Fie o discretizare a suprafeței configurației pe care o studiem, ca cea din figura 1.

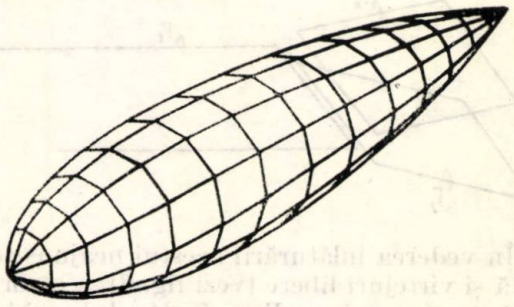


Fig. 1. — Discretizarea configurației.

Discretizarea constă în alegerea unui număr de puncte pe suprafața corpului, care sînt unite prin segmente de vîrtej. Pe frontiera fiecărui panou astfel determinat se consideră că acționează un vîrtej de intensitate Γ.

Fiecare din aceste inele de vîrtej verifică ecuația (3) și satisfac condiția la limită pentru mari distanțe.

Impunînd condiția de tangență (4) într-un număr de puncte egal cu cel al necunoscutelor Γ_j, rezultă un sistem liniar de ecuații în intensitățile vîrtejurilor inelare Γ_j.

Viteza totală în punctul de control i poate fi pusă sub forma

$$\vec{V}_i = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^{N} \vec{V}_{ij}\Gamma_j, \tag{5}$$

unde $\vec{V}_{i,j}$ este viteza de influență a singularității j calculată în punctul i.

Înlocuind (5) în (4), rezultă

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma_j = b_i, \quad i = 1, \ldots N,$$

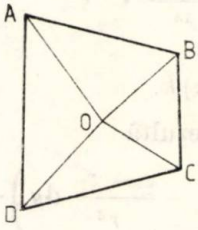


Fig. 2. — Discretizarea în zona bordului de fugă (detaliu).

unde

$$a_{ij} = \vec{V}_{ij}\vec{n}_i, \quad b_i = -\vec{V}_\infty\vec{n}_i. \tag{6}$$

Pentru rezolvarea problemei este deci necesară evaluarea vitezelor induse de către toate singularitățile în toate punctele de calcul; cu ajutorul acestora se obțin coeficienții sistemului (6) care va fi rezolvat printr-o metodă corespunzătoare [4].

MODELE PORTANTE

Modelul cu inele de vîrtej descris anterior este neportant după cum se poate constata aplicînd teorema impulsului pe o suprafață de control ce conține toate singularitățile.

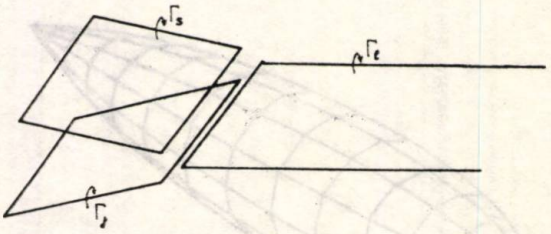


Fig. 3. — Inel poligonal de vîrtej.

În vederea înlăturării acestui neajuns se vor include în discretizarea folosită și vîrtejuri libere (vezi fig. 3), a căror intensitate Γ_l poate fi determinată cu ajutorul condiției Kutta-Jukovski aplicată bordului de fugă

$$\Gamma_l = \Gamma_s + \Gamma_j. \tag{7}$$

Modelul acesta nu introduce deci intensități necunoscute noi ale singularităților, spre deosebire de modelul folosit în [2], unde, pentru îndeplinirea condiției Kutta-Jukovski, se impune suplimentar ca viteza să fie tangenta la suprafața ce rezultă prin prelungirea scheletului aripii, dincolo de bordul de fugă.

CALCULUL VITEZEI INDUSE DE UN INEL POLIGONAL DE VÎRTEJ

În cele ce urmează se va demonstra că viteza indusă de un inel de vîrtej de intensitate Γ, este egală cu cea datorată unei distribuții unifome de dublet de intensitate Γ, situată pe același panou, și orientată după direcția normalei locale $\bar{n}$.

Viteza indusă de un inel de vîrtej de intensitate Γ constantă, într-un punct P este dată de formula Biot-Savart [1].

$$\bar{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_C \frac{\bar{r} \times \mathrm{d}\bar{r}}{r^3}, \tag{8}$$

unde $\bar{r} = (x_P - x)\bar{i} + (y_P - y)\bar{j} + (z_P - z)\bar{k}$.

Proiectînd relația (8) pe axa Ox, rezultă

$$i\bar{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_C \left(\frac{y - y_P}{r^3} \mathrm{d}z - \frac{z - z_P}{r^3} \mathrm{d}y \right). \tag{9}$$

Ținînd seama de formula lui Stokes,

$$\oint_C \bar{F} \, \mathrm{d}\bar{r} = \iint_S \bar{n} \, \mathrm{rot} \, \bar{F} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{10}$$

relaţia (9) devine

$$\bar{i}\bar{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi}\iint_S \left[\frac{3\bar{r}\bar{n}}{r^5}(x_P - x) - \frac{n_x}{r^3}\right] d\sigma. \tag{11}$$

Efectuînd calculele şi pentru proiecţiile vitezei V pe axele Oy şi Oz obţinem în final

$$\bar{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi}\iint_S \left[\frac{3(\bar{r}\bar{n})\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{n}}{r^3}\right] d\sigma, \tag{12}$$

unde orientarea normalei $\bar{n}$ este definită de sensul circulaţiei Γ pe frontiera panoului.

De aici rezultă echivalenţa dintre modelul cu inel de vîrtej şi cel cu dublet uniform distribuit. Deci un prim avantaj al metodei, care înlocuieşte integrala de suprafaţă cu o integrală curbilinie.

De asemenea, tot de aici rezultă înrudirea modelului considerat, cu cel al surselor uniform distribuite pe panou, introdus de Smith şi Hess în [3].

Pontenţialul de perturbaţie pentru un panou cu dublet uniform distribuit (echivalent cu cel al inelului de vîrtej corespunzător), rezultă din derivarea după direcţia normalei locale a potenţialului de perturbaţie pentru sursa uniform distribuită.

Pentru un segmens de vîrtej AB de intensitate unitară, din (8) se deduce următoarea formulă de calcul a vitezei induse în punctul P:

$$\bar{V}_{P\overline{AB}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\overline{AB}\times\overline{BP}}{|\overline{AB}\times\overline{AP}|}\left(\frac{\overline{AP}\cdot\overline{AB}}{AP} - \frac{\overline{BP}\cdot\overline{AB}}{BP}\right). \tag{13}$$

Pentru determinarea vitezei induse de către un inel poligonal de vîrtej ca cel din figura 2, trebuie efectuate în general doar două calcule cu formula (13), pentru că influenţa a două dintre laturi a fost evaluată anterior, o dată cu calculele referitoare la vitezele induse de panourile alăturate. Astfel rezultă o medie de circa 110 operaţii aritmetice pentru un panou faţă de 180 operaţii aritmetice simple şi apelarea unor funcţii speciale (4xln şi 8xatan) în cazul metodei Smith-Hess [3].

În continuare se va căuta deducerea unor formule simplificate pentru calculul vitezelor de influenţă valabile pentru punctele situate la distanţă suficient de mare de panou. Pentru aceasta se va recurge ca în [3] la dezvoltarea în serie a numitorului $\frac{1}{r^3}$.

Potenţialul de perturbaţie, datorat unei distribuţii unitare de dublet (echivalentă cu un inel de vîrtej) pe panoul S, calculat în punctul P, este

$$\varphi_D = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{(\bar{r}\bar{n})}{r^3} d\sigma. \tag{14}$$

Presupunînd că segmentele din care este format un inel de vîrtej ce rezultă dintr-o discretizare ca cea din figura 1 sînt în general necoplanare, va trebui să calculăm integrala de mai sus pe porţiuni. Fie O un punct

central al panoului (vezi fig. 2), pe care îl vom alege după unele considerente ce vor fi discutate ulterior.

Descompunem suprafața panoului în triunghiuri cu un vîrf în O și cu laturile pe segmentele ce delimitează panoul. Pentru triunghiul OAB rezultă

$$\varphi_{D_1} = -\frac{1}{4\pi}(\bar{r}\bar{n}_1)\iint\limits_{\Delta OAB}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r^3}. \tag{15}$$

Produsul scalar $(\bar{r}\bar{n}_1)$ este constant pe suprafața triunghiului considerat, reprezentînd de fapt distanța de la punctul P în care calculăm potențialul pînă la planul ΔOAB.

Alegem un sistem de coordonate pentru care Ox' și Oy' se află în planul ΔOAB, deci $\bar{k}' = \bar{n}_1$, $z' = 0$.

Față de acesta putem dezvolta în serie

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} + \frac{3x'_P}{r_0^5}x' + \frac{3y'_P}{r_0^5}y' + o\left(\frac{\delta^2}{r_0^7}\right), \tag{16}$$

unde δ este distanța maximă de la un punct din ΔOAB la punctul P. Înlocuind (16) în (15), rezultă

$$\varphi_{D_1} = -\frac{1}{4\pi}(\bar{r}_0\bar{n}_1)\left[\frac{A_1}{r_0^3} + \frac{3x'_P}{r_3^5}S_{x_1} + \frac{3y'_P}{r_5^0}S_{y_1} + o\left(\frac{\delta^2}{r_0^7}\right)\right]. \tag{17}$$

Efectuînd calculele similare și pentru celelalte triunghiuri, potențialul datorat întregului panou poate fi pus sub formă

$$\varphi_D = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{A}{r_0^3}\bar{r}_0\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\bar{n}_iA_i}{A} + \frac{3\bar{r}_0}{r_0^5}\sum_{i=1}^{4}\bar{n}_i(x_{P_i}s_{x_i} + y_{P_i}s_{y_i}) - o\left(\frac{\delta^2}{r_0^6}\right)\right]. \tag{18}$$

Introducînd notația $\bar{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}\bar{n}_iA_i}{A}$ și alegînd punctul O în așa fel încît cel de-al doilea termen din (18) să se anuleze (spre exemplu, pentru panou plan $O = CG$), rezultă în final

$$\varphi_D = -\frac{A}{4\pi r_0^3}(\bar{r}_0\bar{n}) + o\left(\frac{1}{r_0^4}\right), \tag{19}$$

unde am considerat că la distanțe suficient de mari, $\delta \simeq r_0$. Rezultă că departe de panou viteza unitară de influență datorată inelului de vîrtej este aproximată de formula pentru dublet concentrat unitar

$$\bar{V}_P = \frac{A}{4\pi r_0^3}\left[\frac{3(\bar{r}_0\bar{n})\bar{r}_0}{r_0^2} - \bar{n}\right]. \tag{20}$$

În figura 4 au fost trasate valorile absolute ale erorilor $\varepsilon = \frac{|\overline{V}_{exact} - \overline{V}_{aprox}|}{|\overline{V}_{exact.}|}$ și $e = \frac{|\overline{V}_{exact.} - \overline{V}_{aprox.}|}{\max |\overline{V}_{exact.}|}$ în cîteva cazuri simple, tratate și în [3].

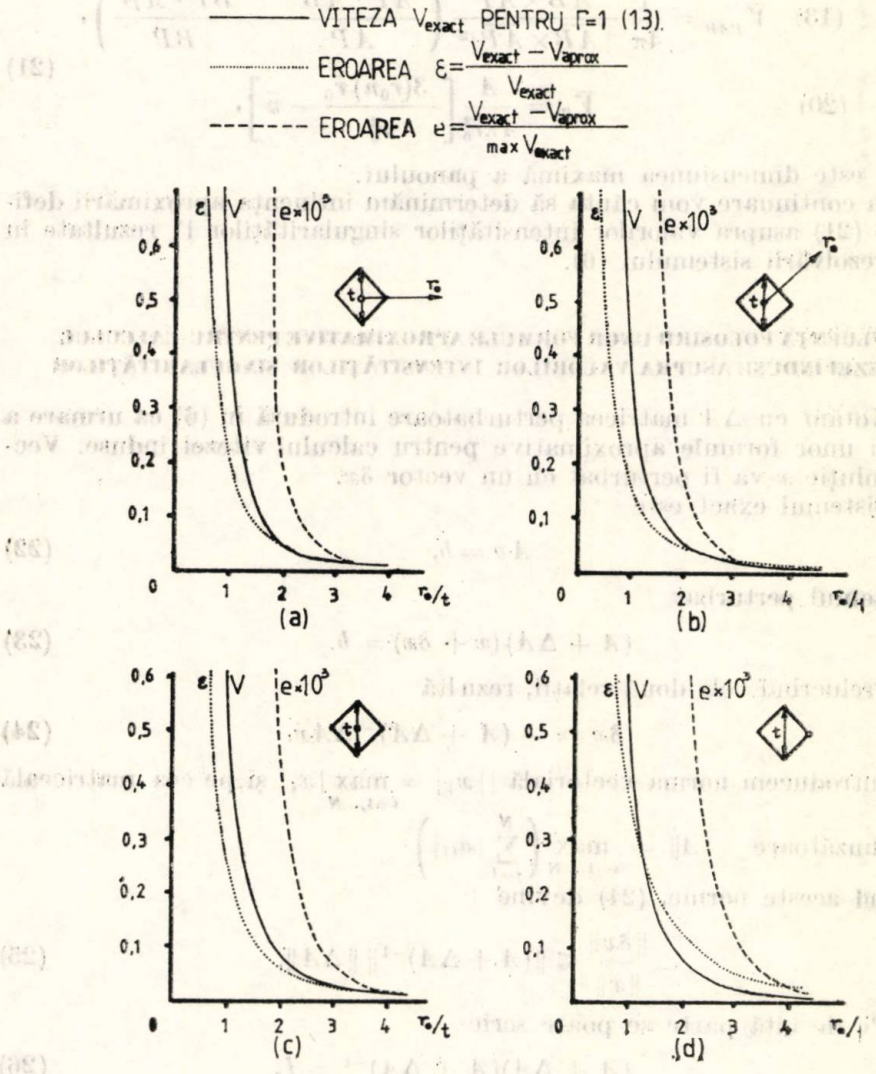


Fig. 4. — Erori în valorile vitezei calculate după formulele exactă (13) și aproximativă (20) pentru un panou pătrat.

În (a) și (*b*) vitezele sînt evaluate de-a lungul unor linii situate în planul panoului, așa cum se arată în schițe.

În (*c*) și (*d*) vitezele sînt evaluate de-a lungul unor linii perpendiculare pe planul panoului. Intersecțiile acestor linii cu planul panoului sînt explicitate în schițe.

În toate cazurile abscisa reprezintă distanța dintre centrul panoului și punctul unde se calculează viteza.

Vectorii $\bar{V}_{exact.}$ au fost calculaţi cu ajutorul formulei (13), $\bar{V}_{aprox.}$ cu formula (20), iar max $|\bar{V}_{exact.}|$ reprezintă modulul maxim al vectorului viteză exactă, ce se obţine în centrul de greutate al panoului.

Pentru calculul vitezelor induse se folosesc următoarele formule:

$$r_0 \leqslant 3t \quad (13) \quad \bar{V}_{P\overline{AB}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\overline{AB}\times\overline{AP}}{|\overline{AB}\times\overline{AP}|^2} \left(\frac{\overline{AP}\cdot\overline{AB}}{AP} - \frac{\overline{BP}\cdot\overline{AB}}{BP} \right),$$

$$r_0 > 3t \quad (20) \qquad \bar{V}_P = \frac{A}{4\pi r_0^3} \left[\frac{3(\bar{r}_0\bar{n})\,\bar{r}_0}{r_0^2} - \bar{n} \right], \tag{21}$$

unde t este dimensiunea maximă a panoului.

În continuare vom căuta să determinăm influenţa aproximării definite de (21) asupra valorilor intensităţilor singularităţilor Γ_j rezultate în urma rezolvării sistemului (6).

INFLUENŢA FOLOSIRII UNOR FORMULE APROXIMATIVE PENTRU CALCULUL VITEZEI INDUSE ASUPRA VALORILOR INTENSITĂŢILOR SINGULARITĂŢILOR

Notăm cu ΔA matricea perturbatoare introdusă în (6) ca urmare a folosirii unor formule aproximative pentru calculul vitezei induse. Vectorul soluţie x va fi perturbat cu un vector δx.

Sistemul exact este

$$Ax = b, \tag{22}$$

iar sistemul perturbat

$$(A + \Delta A)(x + \delta x) = b. \tag{23}$$

Prelucrînd cele două relaţii, rezultă

$$\delta x = -(A + \Delta A)^{-1}\Delta A x. \tag{24}$$

Introducem norma vectorială $\|x\| = \max_{i=1,\ldots N} |x_i|$ şi pe cea matriceală corespunzătoare $\|A\| = \max_{i=1,\ldots N} \left(\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \right)$.

Aplicînd aceste norme, (24) devine

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \|(A + \Delta A)^{-1}\|\,\|\Delta A\|. \tag{25}$$

Pe de altă parte se poate scrie

$$(A + \Delta A)(A + \Delta A)^{-1} = I, \tag{26}$$

de unde rezultă

$$(A + \Delta A)^{-1} = A^{-1}[I - \Delta A(A + \Delta A)]. \tag{27}$$

Aplicînd şi aici aceleaşi norme obţinem

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\|\,\|A^{-1}\|}. \tag{28}$$

Înlocuind (28) în (25), rezultă

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|}{1-\|\Delta A\|\,\|A^{-1}\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \tag{29}$$

Pentru aproximarea definită de (21), eroarea exprimată față de viteza autoindusă (e) verifică următoarea inegalitate:

$$\frac{|\bar{V}_{exact.}-\bar{V}_{aprox.}|}{\max|V_{exact.}|} \leqslant 1{,}4\cdot 10^{-4}, \tag{30}$$

ceea ce rezultă din figura 3.

Pornind de la această inegalitate vom căuta să obținem un majorant pentru $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \max_{i=1\ldots,N} \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} |(\bar{V}_{ij}^{exact.}-\bar{V}_{ij}^{aprox.})\,\bar{n}_i|}{\sum\limits_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}\,\bar{n}_i|}. \tag{31}$$

Considerăm pentru vectorul abatere $(V_{ij}^{exact.}-V_{ij}^{aprox.})$ descompunerea

$$\bar{V}_{ij}^{exact.}-\bar{V}_{ij}^{aprox.} = \Delta V'_{ij}\frac{\bar{V}_{ij}^{exact.}}{|\bar{V}_{ij}^{exact.}|}+\Delta V''_{ij}\bar{S}_{ij}, \tag{32}$$

unde versorul $\bar{s}_{ij}\perp\bar{V}_{ij}^{exact.}$.

Astfel, (31) devine

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \max_{i=1,\ldots N} \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} |\Delta V'_{ij}\cos\alpha_{ij}+\Delta V''_{ij}\cos\beta_{ij}|}{\sum\limits_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}\|\cos\alpha_{ij}|}, \tag{33}$$

unde $\alpha_{ij}=\sphericalangle(\bar{n}_i,\ \bar{V}_{ij}^{exact.})$, $\beta_{ij}=\sphericalangle(\bar{n}_i,\ \bar{s}_{ij})$.

Să observăm că, pentru o placă plană împărțită în panouri cu inele de vîrtej, $\cos\alpha_{ij}=\bar{n}_i\frac{\bar{V}_{ij}^{exact.}}{|\bar{V}_{ij}^{exact.}|}=1$, deci $\cos\beta_{ij}=0$. Suprafața unui corp oarecare nu poate fi asimilată cu o placă plană, dar în general normalele la corp nu au variații bruște.

De asemenea, se poate observa că, oricare ar fi geometria corpului considerat, pentru $|\bar{V}_{ij}^{exact.}|$ maxim, $\cos\alpha_{ij}=1$ și $\cos\beta_{ij}=0$.

Toate acestea ne conduc la a considera drept plauzibilă ipoteza

$$|\cos\beta_{ij}| \leqslant |\cos\alpha_{ij}|. \tag{34}$$

„Plauzibilitatea" ipotezei (34) se referă la faptul că aceasta este adevărată pentru majoritatea combnațiilor i și j, mai mult, ea avînd loc cu precădere pentru valorile maxime ale modulului vectorului viteză exact (13).

Înlocuind (34) în (33), rezultă

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leqslant \max_{i=1,\ldots N} \frac{\sum_{j=1}^{N} |\Delta V'_{ij} + \Delta V''_{ij}| \, |\cos \alpha_{ij}|}{\sum_{i=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact}| \, |\cos \alpha_{ij}|}. \tag{35}$$

Din relaţia (32) se observă că

$$|\Delta V'_{ij}| + |\Delta V''_{ij}| \leqslant \sqrt{2} \, |\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}|,$$

deci (35) devine

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leqslant \sqrt{2} \max_{i=1,\ldots N} \frac{\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}| \, |\cos \alpha_{ij}|}{\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}| \, |\cos \alpha_{ij}|}. \tag{36}$$

În continuare facem notaţiile

$$k_{1i} = \frac{\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}| \, |\cos \alpha_{ij}|}{\max_{j=1,\ldots N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}|}, \tag{37}$$

$$k_{2i} = \frac{\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}| \, |\cos \alpha_{ij}|}{\max |\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}|}. \tag{38}$$

Cu aceste notaţii inegalitatea (36) devine

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leqslant \sqrt{2} \max_{i=1,\ldots N} \frac{\max_{j=1,\ldots N} |\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}|}{\max_{j=1,\ldots N} |\bar{V}_{ij}^{exact}|} \cdot \frac{k_{2i}}{k_{1i}}. \tag{39}$$

Din dezvoltarea în serie (19) se deduce că, la mari distanţe $(\bar{V}_{ij}^{exact.}) = o\left(\frac{1}{r_0^3}\right)$, iar $|\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}| = o\left(\frac{1}{r_0^5}\right)$. Acest lucru se poate observa şi din figura 3, unde e descreşte mult mai rapid decît $|\bar{V}_{exact.}|$.
Deci, în cazul unei discretizări uniforme, care să nu prezinte mari diferenţe ale densităţilor de repartiţie ale panourilor, presupunem că este îndeplinită relaţia

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}| \, |\cos \alpha_{ij}|}{\max_{j=1,\ldots N} |\bar{V}_{ij}^{exact} - \bar{V}_{ij}^{aprox.}|} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}| \, |\cos \alpha_{ij}|}{\max_{j=1,\ldots N} |\bar{V}_{ij}^{exact.}|}, \tag{40}$$

ceea ce este echivalent cu

$$k_{2i} < k_{1i} \tag{41}$$

de unde, înlocuind (30) și (41) în (39), rezultă majorantul normei matricei perturbatoare

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leqslant 1{,}4\sqrt{2}\ 10.^{-4} \tag{42}$$

Matricea sistemului algebric (22) este puternic diagonală, întrucît așa cum s-a observat și anterior, $|\overline{V}_{ij}^{exact.}| = o\left(\frac{1}{r_0^3}\right)$. În acest caz, sistemul este bine condiționat, și putem presupune că numărul de condiționare cond (A) definit ca mai jos îndeplinește inegalitatea

$$\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| < 100. \tag{43}$$

Înlocuind (42) și (43) în (29), rezultă

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant 0{,}02. \tag{44}$$

Deci în condițiile amintite, eroarea relativă a soluției, exprimată de raportul normelor (44) nu depășește 2%, valoare acceptabilă din punct de vedere al calculelor practice.

Să reamintim că acest rezultat se bazează pe ipoteza (34).

În cazul unor configurații cu schimbări bruște, de pantă, este posibil ca aceasta să nu mai fie corectă, cînd $|\cos \alpha_i| \simeq 0$, ceea ce se obține spre exemplu la îmbinarea aripă-fuzelaj.

În astfel de situații pot să apară erori mai mari ca (44) în soluția sistemului (13). Acest lucru a fost observat și de către Smith și Hess în [3], ca urmare a testării unui mare număr de configurații.

O soluție practică de remediere pentru zonele în care apar variații bruște ale normelor (ce nu pot fi evitate la discretizare) constă în folosirea formulei exacte (13) pentru toate panourile (indiferent de distanța r_0) care îndeplinesc condiția

$$|\bar{n}_i \bar{n}_j| < \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{45}$$

Procedînd astfel, inegalitatea (35) rămîne valabilă, deoarece chiar dacă există combinații de i și j pentru care nu se verifică ipoteza (34), pentru aceste combinații $|\overline{V}_{ij}^{exact.} - \overline{V}_{ij}^{aprox.}| = 0$.

CONCLUZII

În prezenta lucrare s-a căutat elucidarea unor aspecte mai puțin sau deloc tratate pînă în prezent, cum ar fi, de exemplu, influența pe care o are asupra soluției folosirea unor formule aproximative, legată de

micşorarea numărului de operaţii şi a timpului de calcul. S-a reuşit ca în acelaşi cadru să fie clarificate unele fenomene de instabilitate numerică, cunoscute din experimentarea numerică a metodelor cu panouri.

Nu au fost urmărite toate etapele calculului coeficienţilor aerodinamici pe o configuraţie dată, întrucît acestea au fost aprofundate în [2] şi [3].

Primită la redacţie la 5 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor compresibile*, Edit. Academiei R. S. România, 1984.
2. W. KRAUS, P. SACHER, *Das Panelverfahren zur Berechnung der Druckverteilung von Flugkörpen im Unterschallbereich*, ZFW, 9 (1973).
3. J. L. HESS, and A. M. O. SMITH, *Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies*, Douglas Aircraft Co., Rep. ES 40622, 1962.
4. I. JADIC, — *Asupra unei modalităţi de interpretare a metodelor iterative de rezolvare a sistemelor*, St. Cerc. Mat., 36 (324—329 (1984).

O METODĂ DE ELIMINARE A FORȚELOR DE LEGĂTURĂ DIN ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE SISTEMELOR MECANICE CU LEGĂTURI

de SORIN VLASE

Universitatea din Brașov

În cazul scrierii ecuațiilor de mișcare pentru un sistem mecanic cu legături, dacă se utilizează teoremele impulsului și momentului cinetic, sau metoda multiplicatorilor lui Lagrange, alături de necunoscutele coordonate generalizate care apar cu derivatele de ordinul unu și doi, mai intervin, liniar, necunoscutele forțe de legătură (sau multiplicatorii lui Lagrange). În lucrare se prezintă o metodă originală pentru eliminarea acestor necunoscute, bazată pe proprietățile „mecanice" ale sistemului.

INTRODUCERE

Dezvoltarea tehnicii de calcul s-a concretizat și în dezvoltarea și adaptarea unor metode clasice de analiză dinamică a sistemelor mecanice, în particular mecanisme.

Pentru studiul dinamic al unui sistem mecanic cu legături s-au utilizat următoarele metode:

a) teoremele impulsului și momentului cinetic;
b) forma lui Lagrange a principiului lui d'Alembert;
c) ecuațiile lui Lagrange;
d) metoda multiplicatorilor lui Lagrange;
e) ecuațiile lui Hamilton,

în diferite variante.

O prezentare sistematizată a acestor metode o găsim în [3].

Dacă se urmărește doar obținerea ecuațiilor de mișcare și rezolvarea lor, atunci este evantajos de a utiliza metodele b), c) și e).

Dacă însă se caută și forțele care apar în legături, spre exemplu dacă este necesar a se executa un calcul de rezistență al unor elemente ale sistemului, atunci devin convenabile metodele a) și d).

În continuare vom analiza cazul a) deoarece d) se reduce la acesta.

În acest caz se obține un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi în coordonatele independente. În termenul liber intervin forțele generalizate exterioare sistemului și, liniar, cele de legătură. Necunoscutele sînt coordonatele independente care intervin prin derivatele lor de ordinul unu și doi și forțele de legătură.

Dat fiind natura diferită a celor două tipuri de necunoscute, apar unele probleme în rezolvarea sistemului de ecuații. În mod curent se procedează într-o primă fază la eliminarea necunoscutelor forțe de legătură și rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale obținut. Apoi, evoluția în timp a coordonatelor independente fiind determinată, se rezolvă un sistem liniar care oferă forțele de legătură. Eliminarea este posibilă întrucît necunoscutele forțe de legătură intervin liniar în ecuații, deci se poate utiliza o tehnică de inversare a matricei coeficienților acestora.

În lucrare ne propunem să prezentăm o metodă „naturală" de eliminare a forțelor de legătură, deosebit de simplă, care ușurează mult abordarea numerică a unei astfel de probleme.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 6, 1985, P. 547—554

1. CONDIȚII CIBEMATICE IMPUSE DE LEGĂTURI

Rezumăm rezultate cunoscute pentru exprimarea condițiilor cinematice.

Întrucît pentru a scrie ecuațiile de mișcare este convenabil de a utiliza sisteme de coordonate situate în centrul de masă, vom calcula viteza și accelerația centrului de masă a fiecărui element. Vom nota cu $\{\dot{x}_i\}$ vectorul ce conține pe primele trei poziții componentele vitezei liniare ale centrului de masă, iar pe următoarele trei poziții componentele vectorului viteză unghiulară ale elementeului i.

Vom nota cu $\{\ddot{x}_i\}$ vectorul ce conține în ordine componentele acceleraței liniare ale centrului de masă și ale acceleraței unghiulare ale elementului i.

Dacă s este gradul de mobilitate al sistemului impus de legături, atunci vectorii $\{\dot{x}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, unde n este numărul de corpuri în legătură, pot fi exprimați liniar în funcție de s derivate $\dot{q}_j$, $j = \overline{1, s}$. Am notat q_j coordonatele independente ale sistemului.

Vom putea scrie deci:

$$\{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{Bmatrix} = [A]\ \{\dot{q}\}. \tag{1.1}$$

În continuare notăm

$$\{\dot{q}_2\} = [\dot{q}_1^2\ \ \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2\ \ \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_3 \cdots \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_s\ \ \dot{q}_2 \cdot \dot{q}_3 \cdots \dot{q}_s^2]^T.$$

Vectorii $\{\ddot{x}_i\}$, $i = \overline{1, n}$ pot fi exprimați printr-o funcție liniară de $\ddot{q}_j$, și o funcție pătratică de $\dot{q}_j$, $j = \overline{1, s}$. Avem:

$$\{\ddot{x}\} = [A]\ \{\ddot{q}\} + [B]\ \{\dot{q}_2\}, \tag{1.2}$$

relație obținută în esență prin derivarea relației (1. 1) ([2], [4] [7], [8]).

2. ECUAȚII DE MIȘCARE PENTRU UN SISTEM MECANIC CU LEGĂTURI

Notăm cu m_i masa elementului i, cu $[J]_i$ matricea momentelor de inerție calculată în centrul de masă, $\{Q_i\}^{ext}$ torsorul forțelor exterioare redus în centrul de masă, $\{Q_i\}^{leg}$ torsorul forțelor de legătură redus în centrul de masă.

Pentru elementul i teoremele momentului cinetic și impulsului scrise în centrul de masă ne va da:

$$\begin{bmatrix} m_i & & & 0 \\ & m_i & & \\ & & m_i & \\ 0 & & & [J]_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a_c\}_i \\ \{\varepsilon\}_i \end{Bmatrix} = \{Q\}_i^{ext} + \{Q\}_i^{leg}, \tag{2.1}$$

unde $\{a_c\}_i$ reprezintă accelerația centrului de masă, iar $\{\varepsilon\}_i$ accelerația unghiulară.

S-au, concentrat,

$$[M]_i\{\ddot{x}\}_i = \{Q\}_i^{ext} + \{Q\}_i^{leg}. \tag{2.1'}$$

Asamblînd sistemul de eIuații scrise pentru $i = \overline{1,n}$ se obține:

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}^{ext} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}^{leg} \tag{2.2}$$

sau, concentrat,

$$[M]\ \{\ddot{x}\} = \{Q\}^{ext} + \{Q\}^{leg}. \tag{2.2'}$$

Dacă ținem seama de (1.2), obținem din (2.2'):

$$[M][A]\ \{\ddot{q}\} + [M][B]\{\dot{q}_2\} = \{Q\}^{ext} + \{Q\}^{leg}, \tag{2.3}$$

care este un sistem de ecuații diferențiale în coordonatele independente $\{q\}$. În ecuații apare și torsorul forțelor de legătură $\{Q\}^{leg}$ cu componente raportate la fiecare sistem local de coordonate situat în centrul de masă.

În general, dacă n este numărul de corpuri, s gradul de mobilitate, apar $6n - s$ forțe de legătură, iar torsorul $\{Q\}^{leg}$ este exprimabil liniar în funcție de aceste forțe. Spre exemplu, dacă notăm cu F_i, $i = 1,\ 6n - s$, forțele de legătură, putem scrie:

$$\{Q\}^{leg} = [T]\{F\}, \tag{2.4}$$

unde matricea $[T]$ depinde de geometria sistemului.

Dacă numărul forțelor de legătură este mai mare de $6n - s$, avem de-a face cu o structură static nedeterminată, pentru determinarea forțelor de legătuăr trebuind a utiliza proprietățile elastice ale elementelor.

3. LUCRUL MECANIC AL FORȚELOR DE LEGĂTURĂ

Fie $\{v_c\}_i$ viteza centrului de masă a elementului i al sistemului; $\{R\}_i$ o forță de legătură; A punctul în care acționează $\{R\}_i$ (fig. 1). Viteza punctului A va fi:

$$\{v_A\}_i = \{v_c\}_i + [\tilde{\omega}]_i\{r_A\}_i,$$

unde

$[\tilde{\omega}]_i$ este operatorul viteză unghiulară a elementului i

Lucrul mecanic elementar al forței $\{R\}_i$ la o deplasare compatibilă cu legăturile este:

$$\begin{aligned} dL &= \{R\}_i^T\{v_A\}_i dt = \{R\}_i^T(\{v_c\}_i + [\tilde{\omega}]_i\{r_A\}_i)dt = \\ &= (\{R\}_i^T\{v_c\}_i + \{R\}_i^T[\tilde{\omega}]_i\{r_A\}_i)dt = \\ &= (\{v_c\}_i^T\{R\}_i + \{\omega\}_i^T[\tilde{r}_A]_i\{R\}_i)dt = \\ &= [\{v_c\}_i^T\{\omega\}_i^T]\begin{Bmatrix} \{R\}_i \\ \{\tilde{r}_A\}_i\{R\}_i \end{Bmatrix} dt = \{\dot{x}\}_i^T\begin{Bmatrix} \{R\}_i \\ [\tilde{r}_A]_i\{R\}_i \end{Bmatrix} dt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

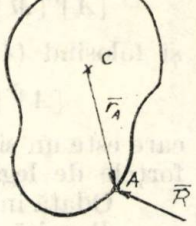


Fig. 1

Dar $\begin{Bmatrix} \{R\} \\ [\tilde{r}_A]\{R\} \end{Bmatrix}$ reprezintă tocmai torsorul de reducere al forţei $\{R\}$ în punctul C.

Dacă luăm în considerare toate forţele de legătură şi calculăm lucrul elementar total al forţelor de legătură ce acţionează asupra elementului, obţinem :

$$dL_i^e = \{\dot{x}\}_i^T \begin{Bmatrix} \{\mathcal{R}\} \\ \{\mathcal{M}_c\} \end{Bmatrix}_i dt = \{\dot{x}\}_i^T \{Q\}_i^{leg} dt, \tag{3.2}$$

unde $\begin{Bmatrix} \{\mathcal{R}\} \\ \{\mathcal{M}_c\} \end{Bmatrix}_i = \{Q\}_i^{leg}$ reprezintă torsorul de reducere al forţelor de legătură în punctul C.

Pentru întreg sistemul obţinem :

$$dL = dL_1^e + dL_2^e + \ldots + dL_n^e =$$

$$= \{\dot{x}\}_1^T \{Q_1\}_1^{leg} dt + \{\dot{x}_2\}_2^T \{Q_2\}_2^{leg} dt + \ldots + \{\dot{x}_n\}_n^T \{Q_n\}_n^{leg} =$$

$$= [\dot{x}_1^T \dot{x}_2^T \cdots \dot{x}_n^T] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} dt = \{\dot{x}\}^T \{Q\}^{leg} dt. \tag{3.3}$$

Dar cum lucrul mecanic al forţelor de legătură este nul pentru întreg sistemul ([1], [5], [6]), obţinem :

$$\{\dot{x}\}^T \{Q\}^{leg} = 0. \tag{3.4}$$

4. ELIMINAREA FORŢELOR DE LEGĂTURĂ

Folosind (1.1), relaţia (3.4) devine :

$$\{\dot{q}\}^T [A]^T \{Q\}^{leg} = 0 \tag{4.1}$$

şi cum $\{\dot{q}\}$ sînt independente, se obţine :

$$[A]^T \{Q\}^{leg} = 0. \tag{4.2}$$

Acest rezultat îl vom folosi pentru a elimina forţele de legătură din (2.3). Astfel, premultiplicînd (2.3) cu $[A]^T$ obţinem :

$$[A]^T [M][A]\{\ddot{q}\} + [A]^T [M][B]\{\dot{q}_2\} = [A]^T \{Q\}^{leg} + [A]^T \{Q\}^{ext}$$

şi folosind (4.2), rezultă :

$$[A]^T [M]\ [A]\ \{\ddot{q}\} + [A]^T [M][B]\{\dot{q}_2\} = [A]^T \{Q\}^{ext}, \tag{4.3}$$

care este un sistem de s ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, din care lipsesc forţele de legătură.

Odată integrată ecuaţia (4.3), din (2.3) se pot găsi forţele de legătură.

Rezultă că, în esenţă, eliminarea forţelor de legătură din ecuaţii se reduce la premultiplicarea sistemului de ecuaţii cu $[A]^T$.

Observație. Notațiile tensoriale ar fi mai adecvate pentru prezentarea rezultatelor lucrării. Am preferat notațiile matriceale întrucît prezentarea devine mai sugestivă și ușor de urmărit. De asemenea este avantajoasă în aplicațiile pe calculator.

5. EXEMPLU

Să se scrie legea de mișcare pentru mecanismul „sinus" din figura 2

Soluție

Notăm $A_0A_1 = 1$; $A_1 \cdot A_2 = l_{12}$;

$A_2A_5 = l_{23}$; $A_0C = \gamma \cdot 1$.

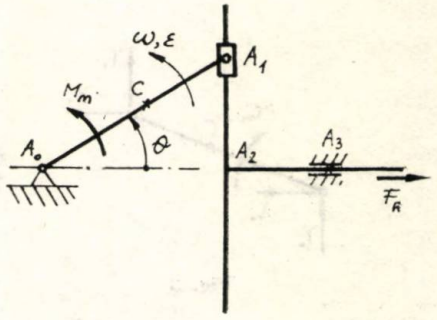


Fig. 2

Avem

$$\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_0} = 0$$

sau

$$l\cos\theta + l_{23} - A_3A_0 = 0,$$

$$l\sin\theta - l_{12} = 0.$$

Prin derivare se obține:

$$-l\omega\sin\theta + v_{03} = 0,$$

$$l\omega\cos\theta - v_{12} = 0.$$

Derivînd încă o dată, obținem:

$$-l\omega^2\cos\theta - l\varepsilon\sin\theta + a_{03} = 0;$$

$$l\omega^2\sin\theta + l\varepsilon\cos\theta - a_{12} = 0,$$

unde

ω este viteza unghiulară a barei; ε — accelerația unghiulară a barei; v_{30} — viteza corpului $A_1A_2A_3$; a_{30} — accelerația corpului $A_1A_2A_3$. Rezultă

$$a_{30} = -a_{03} = -l\omega^2\cos\theta - l\varepsilon\sin\theta.$$

Calculăm accelerația centrului de masă al barei A_0A_1:

$$\overline{a_c} = \overline{\varepsilon} \times \overline{A_0C} - \omega^2\overline{A_0C} =$$

$$= \varepsilon\gamma l(\cos\theta\bar{j} - \sin\theta\bar{i}) - \omega^2\gamma l(\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}).$$

Accelerația culisei A_1 este

$$\bar{a}_{A_1} = \overline{\varepsilon} \times \overline{A_0A_1} - \omega^2\overline{A_0A_1} =$$

$$= \varepsilon l(\cos\theta\bar{i} - \sin\theta\bar{j}) - \omega^2 l(\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}).$$

Condiţiile cinematice vor fi :

$$\begin{Bmatrix} a_{cx} \\ a_{cy} \\ \varepsilon \\ a_{A_{1x}} \\ a_{A_{1y}} \\ a_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\gamma l\sin\theta \\ \gamma l\cos\theta \\ 1 \\ -l\sin\theta \\ l\cos\theta \\ -l\sin\theta \end{Bmatrix} \varepsilon + \begin{Bmatrix} -\gamma l\cos\theta \\ -\gamma l\sin\theta \\ 0 \\ -l\cos\theta \\ -l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{Bmatrix} \omega^2 = \{A\}\varepsilon + \{B\}\omega^2.$$

Ecuaţiile care descriu mişcarea fiecărui cap vor fi : Pentru bara A_0A_1 (fig. 3) :

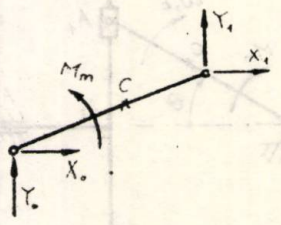


Fig. 3

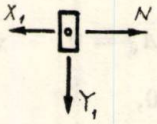


Fig. 4

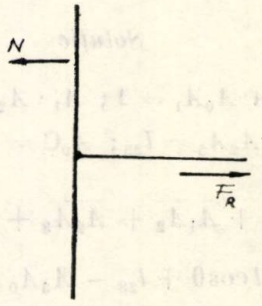


Fig. 5

$$m_1a_{cx} = X_0 + X_1;\ m_1a_{cy} = Y_0 + Y_1;$$

$$J\varepsilon = M_m + X_0\gamma l\sin\theta - X_1(1-\gamma)l\sin\theta - Y_0\gamma l\cos\theta + Y_1(1-\gamma)l\cos\theta$$

Pentru culisa A_1 (fig. 4)

$$m_2a_{A_{1x}} = -X_1 + N;\ m_2a_{A_{1y}} = -Y_1.$$

Pentru culisa $A_1A_2A_3$ (fig. 5) :

$$m_3a_{30} = F_R - N.$$

Ecuaţiile pot fi scrise împreună :

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & 0 & & \\ & & J & & & \\ & & & m_2 & & \\ & 0 & & & m_2 & \\ & & & & & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{cx} \\ a_{cy} \\ \varepsilon \\ a_{A_{1x}} \\ a_{A_{1y}} \\ a_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_m \\ 0 \\ 0 \\ F_R \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} X_0 + X_1 \\ Y_0 + Y_1 \\ X_0\gamma l\sin\theta - X_1(1-\gamma)l\sin\theta - Y_0\gamma l\cos\theta + Y_1(1-\gamma)l\cos\theta \\ -X_1 \\ -Y_1 \\ -N \end{Bmatrix}.$$

Prin premultiplicare cu $\{A\}^T$ dispar forţele de legătură.

Avem

$$\alpha = \{A\}^T[M]\{A\} = m_1\gamma_1^2 l^2 + J + m_2 l^2 + m_3 l^2 \sin^2\theta,$$

$$\beta = \{A\}^T[M]\{B\} = m_3 l^2 \sin\theta\cos\theta,$$

$$Q = M_m - F_R l \sin\theta.$$

Rămîne de rezolvat ecuația diferențială

$$\alpha\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = Q.$$

Pentru determinarea reacțiunilor scriem din nou sistemul de ecuații, lăsînd la o parte una din ele (în cazul nostru este convenabil ca aceasta să fie a treia), sub forma:

$$\begin{Bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ & m_1 & & & \\ & & m_2 & & \\ & & & m_2 & \\ 0 & & & & m_3 \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} -\gamma\sin\theta \\ \gamma\cos\theta \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix} l\varepsilon + \begin{Bmatrix} -\gamma\cos\theta \\ -\gamma\sin\theta \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{Bmatrix} l^2\omega \right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ X_1 \\ Y_1 \\ N. \end{Bmatrix}.$$

Avem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ X_1 \\ Y_1 \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1\gamma\sin\theta - m_2\sin\theta \\ m_1\gamma\cos\theta + m_2\cos\theta \\ m_2\sin\theta + m_3\sin\theta \\ m_2\cos\theta \\ -m_3\sin\theta \end{Bmatrix} l\varepsilon + \begin{Bmatrix} -m_1\gamma\cos\theta - m_2\cos\theta \\ -m_1\gamma\sin\theta - m_2\sin\theta \\ m_2\cos\theta + m_3\cos\theta \\ -m_2\sin\theta \\ -m_3\cos\theta \end{Bmatrix} l\omega^2.$$

Primită la redacție la 16 iunie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB *Mecanica teoretică*, Edit. did. și ped., București, 1980.
2. A. LIEGOIS, W. KHALIL, I. M. DUMAS, M. RENAUD — *Mathematical and Computer Models of Interconnected Mechanical Systems.* Theory and Practice of Rabots and Manipulators, Warsaw, 1976, p. 5.

3. B. PAUL, *Analytical Dynamics of Mechanisms — A Computer Oriented Overview*, Mechanism and Machine Theory, 10, p. 481—507 (1975).
4. M. V. ARISTOVA, M. B. IGNATIEV, V. M. PROKHOROV, *Algorytmic System for Robot's Motion Simulation*, Theory and Practice of Robots and Manipulators, Warsaw, 1976, p. 124.
5. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAG, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehn., București, 1959.
6. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. did. și ped., București, 1984.
7. S. VLASE, *Analiza cinematică a mecanismelor plane cu articulații pe modele topologice*, St. Cerc. Mec. Apl., 4, 40, p. 511—525 (1981).
8. S. VLASE, *Modele topologice pentru sisteme mecanice cu legături*, St. Cerc. Fizică, 33, 8, p. 767—778 (1981).

PERTURBAȚIILE MIȘCĂRII CENTRULUI DE MASĂ AL VEHICULULUI SPAȚIAL DATE DE MIȘCAREA ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ

de I. STROE

Institutul Politehnic, București

În lucrare se analizează mișcarea centrului de masă al unui vehicul spațial, considerat corp rigid, în prezența unui centru atractiv, vehiculul avînd o mișcare în jurul centrului de masă cunoscută.

Folosind ecuațiile lui Newton pentru variația elementuelor orbitei, se pun în evidență perturbații ale traiectoriei centrului de masă date de mișcarea în jurul centrului de masă.

1. NOTAȚII PRINCIPALE

e — excentricitatea orbitei;
f — constanta atracției universale;
i — înclinarea orbitei;
M — masa vehiculului;
M_p — masa planetei;
p — parametrul conicei;
r — raza vectoare ce definește poziția centrului de masă al vehiculului;
Ω — longitudinea nodului ascendent;
$\omega = \widehat{OP, ON}$ — argumemtul pericentrului;
$\Pi = \Omega + \omega$ — longitudinea pericentrului;
τ — momentul trecerii la pericentru;
$\nu = \widehat{OP, OV}$ = unghiul ce precizează poziția vehiculului față de pericentru;
μ — constanta proporțională cu masa planetei ($\mu \approx fM_p$);
$\delta\omega$ — perturbația argumentului pericentrului;
$\Delta\omega_{2\pi}$ — perturbația argumentului pericentrului după o revoluție;
δe — perturbația excentricității orbitei.

2. INTRODUCERE

În studiul mișcării unui vehicul orbital se consideră, într-o primă aproximație, că cele două corpuri (planeta și vehiculul care gravitează în jurul acesteia) pot fi asimilate cu puncte materiale între care se exercită o atracție newtoniană. Se admite că reperul cu originea în centrul atractiv și cu axele orientate invariabil în spațiu este un reper inerțial. În plus, vom considera că sînt îndeplinite condițiile necesare astfel ca traiectoria vehiculului să fie o elipsă cu unul din focare în centrul atractiv. Vom numi această mișcare, mișcare de bază.

În cazul de față, se consideră că se poate asimila corpul atractiv cu un punct material, iar vehiculul spațial este privit ca un corp rigid, fiecare element de msă al acestuia fiind atras de o forță newtoniană elementară ce trece prin centrul atractiv. Forțele și momentele gravitaționale rezultante

vor fi funcție de poziția și orientarea vehiculului. Se vor analiza perturbațiile date de mișcarea din jurul centrului de masă asupra elementelor orbitei. Așadar, mișcarea reală este privită ca o mișcare perturbată față de mișcarea de bază care este cunoscută.

3. SISTEME DE COORDONATE

Vom folosi sisteme de coordonate cu ajutorul cărora să putem preciza atît mișcarea centrului de masă (vehicul), cît și mișcarea în jurul centrului de masă, deci orientarea în spațiu.

3.1. SISTEME DE COORDONARE CU ORIGINEA ÎN CENTRUL ATRACTIV

Fie sistemul inerțial $Ox_a y_a z_a$ (fig. 1) cu versorii $\bar{i}_a, \bar{j}_a, \bar{k}_a$.

Orbita care reprezintă mișcarea de bază este precizată prin sistemul $O\,\zeta\eta\zeta$ cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Se consideră axa $O\zeta$ îndreptată spre pericentru, axa $O\eta$ în planul orbitei, perpediculara pe $O\zeta$ și orientată în sensul mișcării și axa $O\zeta$ normală pe planul orbitei și orientată astfel ca triedrul $O\zeta\eta\zeta$ să fie drept. Intersecția planului $O\zeta\eta$ cu planul $Ox_a y_a$ este dreapta ON, linia nodurilor.

Pentru precizarea poziției vehiculului pe traiectorie se folosește triedrul $O\zeta_1\eta_1\zeta_1$ cu versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$. Axa $O\zeta_1$ este dirijată după raza vectoare, $O\eta_1$, în planul orbitei, perpendiculară pe $O\zeta_1$ și în sensul mișcării, axa $O\zeta_1$ perpendiculară pe planul orbitei și orientată astfel ca triedrul $O\zeta_1\eta_1\zeta_1$ să fie drept.

3.2. SISTEME DE COORDONATE CU ORIGINEA ÎN CENTRUL DE MASĂ

Prin translația triedrului $O\zeta_1\eta_1\zeta_1$ din O în V, se obține triedrul $Vxyz$ cu versorii $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$.

Orientarea vehiculului este dată de unghiurile ψ, θ, φ, care definesc poziția triedrului de axe centrale principale $Vx_1y_1z_1$ cu versorii $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ (fig. 2). Pentru determinarea relațiilor, între coordonatele unui punct exprimate în cele două sisteme de coordoate, se consideră că sistemul legat de corp coincide cu $Vxyz$ și se dau vehiculului următoarele rotații:

— o rotație în jurul axei Ox, de unghi ψ (girație) și obținem sistemul $Vx'y'z'$;

— o rotație în jurul axei Oz', de unghi θ (tangaj) și obținem sistemul $Vx''y''z''$;

— o rotație în jurul axei Vy'', de unghi φ (ruliu) și obținem triedrul $Vx_1y_1z_1$.

Legăturile între sistemele $Ox_a y_a z_a$, $Vxyz$, $Vx_1y_1z_1$ sînt date de relațiile:

$$\begin{array}{c|ccc|c|ccc|c|ccc} & x_1 & y_1 & z_1 & & x & y & z & & x_1 & y_1 & z_1 \\ \hline x_a & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & x_a & c_{11} & c_{12} & c_{13} & x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_a & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & y_a & c_{21} & c_{22} & c_{23} & y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_a & \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & z_a & c_{31} & c_{32} & c_{33} & z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad (3.2.1)$$

Se observă că matricele cosinusurilor directoare ale sistemelor de mai sus verifică relația :

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

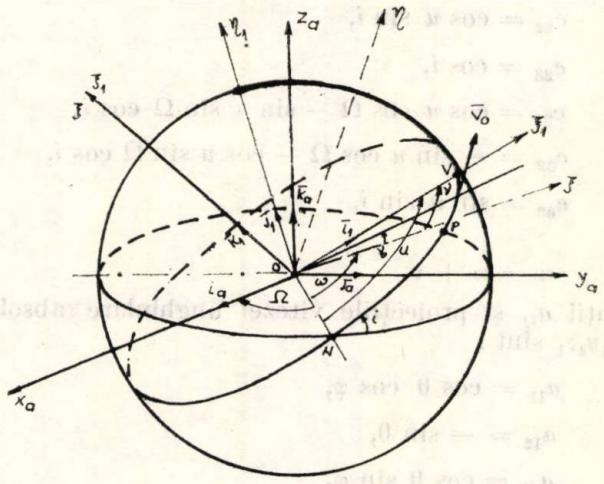


Fig. 1

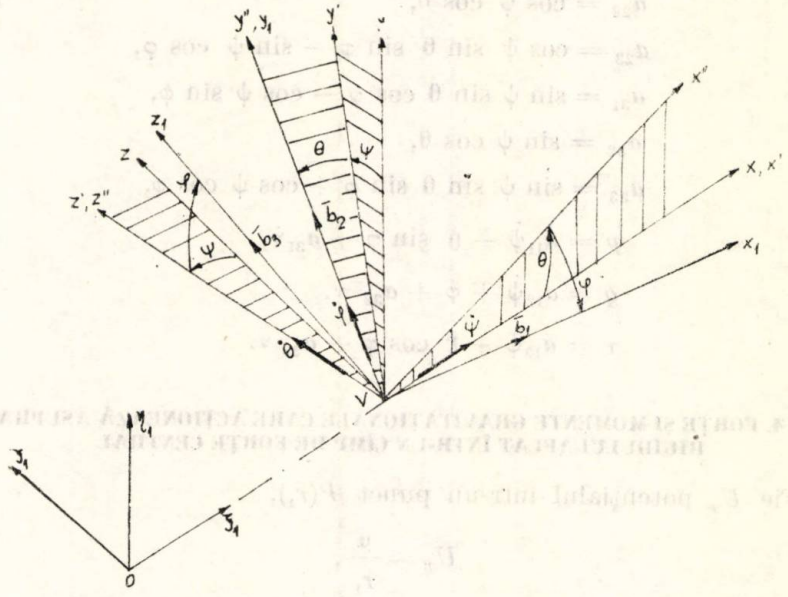


Fig. 2

Coeficienţii c_{ij} sînt funcţii de elementele traiectoriei centrului de masă ([3]) :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\
c_{12} &= -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i, \\
c_{13} &= -\cos \Omega \sin i, \\
c_{21} &= \sin u \sin i, \\
c_{22} &= \cos u \sin i, \\
c_{23} &= \cos i, \\
c_{31} &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\
c_{32} &= -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i, \\
c_{33} &= \sin u \sin i,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

unde

$$u = \omega + \nu.$$

Coeficienţii a_{ij} şi proiecţiile vitezei unghiulare absolute pe axele triedrului $Vx_1y_1z_1$ sînt :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos \theta \cos \varphi, \\
a_{12} &= -\sin \theta, \\
a_{13} &= \cos \theta \sin \varphi, \\
a_{21} &= \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi, \\
a_{22} &= \cos \psi \cos \theta, \\
a_{23} &= \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi, \\
a_{31} &= \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi, \\
a_{32} &= \sin \psi \cos \theta, \\
a_{33} &= \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi, \\
p &= a_{11}\dot{\psi} - \dot{\theta} \sin \varphi + a_{31}\dot{\nu}, \\
q &= a_{12}\dot{\psi} + \dot{\varphi} + a_{32}\dot{\nu}, \\
r &= a_{13}\dot{\psi} + \dot{\zeta} \cos \varphi + a_{33}\dot{\nu}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

4. FORŢE ŞI MOMENTE GRAVITAŢIONALE CARE ACŢIONEAZĂ ASUPRA RIGIDULUI AFLAT ÎNTR-UN CÎMP DE FORŢE CENTRAL

Fie U_p potenţialul într-un punct $P(\bar{r}_1)$,

$$U_p = \frac{\mu}{r_1}, \tag{4.1}$$

$\bar{r}_1$ fiind vectorul de poziţie al punctului P în sistemul $O\xi_1\eta_1\xi_1$.

Dacă masa vehiculului (M) este neglijabilă în raport cu masa planetei (M_p), μ este dat de

$$\mu = f\, M_p. \tag{4.2}$$

Corespunzător potențialului U_p se definește potențialul U pentru corpul de masă M,

$$U = \mu \iiint_M \frac{\mathrm{d}m}{r_1}. \tag{4.3}$$

Din (4.1) rezultă că asupra elementului de masă $\mathrm{d}m$ din vecinătatea punctului P acționează forța elementară

$$\mathrm{d}\bar{F}(p) = -\frac{\mu}{r_1}\bar{r}_1 \mathrm{d}m. \tag{4.4}$$

Asupra corpului de masă M va acționa forța

$$F = -\mu \int_M \frac{\bar{r}_1}{r_1^3}\mathrm{d}m. \tag{4.5}$$

Vom exprima vectorul $\bar{r}_1$ prin proiecțiile pe axele triedrului $Vx_1y_1z_1$:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{R} = (ra_{11} + x_1)\bar{b}_1 + (ra_{12} + y_1)\bar{b}_2 + (ra_{13} + z_1)\bar{b}_3, \tag{4.6}$$

$\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al centrului vehiculului V față de originea O a sistemului $O\xi_1\eta_1\xi_1$.

Din (4.6) rezultă :

$$r_1^2 = r^2 + 2r(a_{11}x_1 + a_{12}x_{21} + a_{13}z_1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \tag{4.7}$$

În (4.3) apare funcția

$$f(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{(r_1^2)^{1/2}}, \tag{4.8}$$

pe care o dezvoltăm în serie Taylor în jurul punctului $V(0, 0, 0)$:

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_0 x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\Big|_0 y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\Big|_0 z_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_0 x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\Big|_0 y_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\Big|_0 z_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\Big|_0 x_1 y_1 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1}\Big|_0 y_1 z_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial x_1}\Big|_0 z_1 x_1 + \dots \tag{4.9}$$

Folosind (4.7), (4.8), derivatele de mai sus se calculează folosind relații de forma :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1^2}{\partial x_1} \tag{4.10}$$

și se obține :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_0 = -\frac{a_{11}}{r^2}; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_0 = -\frac{a_{12}}{r^2}; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial z_1}\right|_0 = -\frac{a_{13}}{r^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_0 = \frac{1}{r^3}(3a_{11}^2 - 1); \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\right|_0 = \frac{1}{r^3}(3a_{12}^2 - 1); \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\right|_0 = \frac{1}{r^3}(3a_{13}^2 - 1). \tag{4.11}$$

Deoarece axele sistemului $Vx_1y_1z_1$ sînt centrale și principale există relațiile :

$$\int_M x_1 y_1 \, dm = \int_M y_1 z_1 \, dm = \int_M z_1 x_1 \, dm = 0,$$

$$\int_M x_1 \, dm = \int_M y_1 \, dm = \int_M z_1 \, dm = 0. \tag{4.12}$$

Cu (4.11), (4.12) dezvoltarea (4.9) devine :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1) + \tag{4.13}$$

$$+ \frac{1}{2r^3}(3a_{11}^2 - 1)x_1^2 + (3a_{12}^2 - 1)y_1^2 + (3a_{13}^2 - 1)z_1^2 \ldots$$

Utilizînd relații de forma

$$\int_M x_1^2 \, dm = \int_M [x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (y_1^2 + z_1^2)] \, dm = \frac{A + B + C}{2} - A, \tag{4.14}$$

A, B, C fiind momentele de inerție față de axele sistemului $Vx_1y_1z_1$, expresia (4.3) a potențialului în care se introduce (4.13), devine :

$$U = \mu \frac{M}{r} + \frac{\mu}{2r^3}[A + B + C - 3(a_{11}^2 A + a_{12}^2 B + a_{13}^2 C)], \tag{4.15}$$

rezultat ce apare în diverse lucrări.

Folosind aceeași metodă a dezvoltării în serie obținem expresiile proiecțiilor forței pe axle triedrului $Vx_1y_1z_1$:

$$F_1 = -\frac{\mu a_{11}}{r^2}\left\{M + \frac{3}{2r^2}[(3 - 5a_{11}^2)A + (1 - 5a_{12}^2)B + (1 - 5a_{13}^2)C]\right\},$$

$$F_2 = -\frac{\mu a_{12}}{r^2}\left\{M + \frac{3}{2r^2}[(1 - 5a_{11}^2)A + (3 - 5a_{12}^2)B + (1 - 5a_{13}^2)C]\right\},$$

$$F_3 = -\frac{\mu a_{13}}{r^2}\left\{M + \frac{3}{2r^2}[(1 - 5a_{11}^2)A + (1 - 5a_{12}^2)B + (3 - 5a_{13}^2)C]\right\}. \tag{4.16}$$

Oprindu-ne la termenii de ordinul 1 din dezvoltarea funcției $\frac{1}{r_1^3}$ care intervine în calculul momentelor, se obțin proiecțiile pe axele triedrului $Vx_1y_1z_1$:

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{3\mu a_{12}a_{13}}{r^3}(B - C),$$

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{3\mu_{13}a_{11}}{r^3}(C - A), \tag{4.17}$$

$$\mathcal{M}_3 = -\frac{3\mu a_{11}a_{12}}{r^3}(A - B).$$

Cu ajutorul relațiilor (3.2.1), forțele F_1, F_2, F_3 pot fi proiectate pe axele triedrului $Vxyz$:

$$F_1^* = -\frac{\mu M}{r^2} - \frac{3\mu}{2r^4}[(1 - 3a_{11}^2)A + (1 - 3a_{12}^2)B + (1 - 3a_{13}^2)C],$$

$$F_2^* = -\frac{3\mu}{r^4}[a_{11}a_{21}A + a_{12}a_{22}B + a_{13}a_{23}C], \tag{4.18}$$

$$F_3^* = -\frac{3\mu}{r^4}[a_{11}a_{31}A + a_{12}a_{32}B + a_{13}a_{33}C].$$

5. PERTURBAȚIILE MIȘCĂRII CENTRULUI DE MASĂ DATE DE MIȘCARE ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ

În [1] se consideră forța perturbatoare ce acționează asupra unui vehicul orbital dată prin proiecțiile pe axele triedrului $O\xi_1\eta_1\zeta_1$,

$$\overline{F}^* = M\sqrt{\frac{\mu}{p}}(\tilde{\mathcal{L}}_{i_1} + \tilde{\mathcal{C}}_{j_1} + \tilde{\mathcal{W}}_{k_1}). \tag{5.1}$$

Prin metoda variației constantelor, se obține sistemul de ecuații care dau perturbațiile elementelor orbitei față de mișcarea de bază ([1)] :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i}\tilde{\mathcal{W}},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\tilde{\mathcal{W}}\cos u,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos \nu}{e}\tilde{\mathcal{L}} + \frac{\sin \nu}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\tilde{\mathcal{C}} - \frac{r}{p}\tilde{\mathcal{W}}\sin u \operatorname{ctg} i,$$

$$\frac{dp}{dt} = 2r\tilde{\mathcal{C}},$$

$$\frac{de}{dt} = \tilde{\mathcal{L}} \sin \nu + \left[\cos \nu + \frac{r}{p} (e + \cos \nu) \right],$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{e\sqrt{\mu p}} \left[(eN \sin \nu - \cos \nu) \tilde{\mathcal{L}} + \frac{p}{r} N \tilde{\mathcal{C}} \right], \tag{5.2}$$

unde

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^{\nu} \frac{\cos \nu \, d\nu}{(1 + e \cos \nu)^3}. \tag{5.3}$$

Variabila t poate fi înlocuită cu variabila ν din

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos \nu}{e} \tilde{\mathcal{L}} - \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{\mathcal{C}}. \tag{5.4}$$

Vom lua ca mișcare de bază cea care se produce sub influența forței

$$F_0 = - \frac{\mu M}{r^2} i_1, \tag{5.5}$$

adică mișcarea corespunzătoare problemei celor două centre.

Folosind expresiile (4.18) ale forțelor F_1^*, F_2^*, F_3^*, rezultă, pentru $\tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{W}}$,

$$\tilde{\mathcal{L}} = - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4} [(1 - 3a_{11}^2)A + (1 - 3a_{12}^2)B + (1 - 3a_{13}^2)C],$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = - 3 \frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4} [a_{11}a_{21}A + a_{12}a_{22}B + a_{13}a_{23}C], \tag{5.6}$$

$$\tilde{\mathcal{W}} = - 3 \frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4} [a_{11}a_{31}A + a_{12}a_{32}B + a_{13}a_{33}C].$$

5.1. INFLUENȚA MIȘCĂRII DE TANGAJ. CAZURI PARTICULARE

În cele ce urmează vom analiza influența mișcării în jurul centrului de masă caracterizată de condițiile :

$$\varphi = 0 ; \quad \psi = 0 ; \quad \theta = \theta(t). \tag{5.1.1.}$$

Matricea termenilor a_{ij} devine :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.1.2}$$

Înlocuim (5.1.2) în (5.6):

$$\tilde{\mathcal{L}}' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}(A + B + C - 3A\cos^2\theta - 3B\sin^2\theta),$$

$$\tilde{\mathcal{C}}' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}(A - B)\sin 2\theta, \tag{5.1.3}$$

$$\tilde{\mathcal{W}}' = 0.$$

Ecuațiile (5.2) devin:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0,$$

$$\frac{di}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr}\frac{\cos\nu}{e}(A + B + C - 3A\cos^2\theta - 3B\sin^2\theta) -$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}(A - B)\left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin\nu}{e}\sin 2\theta,$$

$$\frac{dp}{dt} = -3\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^3}(A - B)\sin 2\theta, \tag{5.1.4}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}(A + B + C - 3A\cos^2\theta - 3B\sin^2\theta)\sin\nu -$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr}(A - B)\left[\cos\nu + \frac{r}{p}(e + \cos\nu)\right]\sin 2\theta,$$

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{3}{2Mr^2}\left[-(eN\sin\nu - \cos\nu)(A + B + C - 3A\cos^2\theta - \right.$$

$$\left. - 3B\sin^2\theta) - \frac{p}{r}N(A - B)\sin 2\theta\right].$$

Se observă că mișcarea de tangaj nu modifică longitudinea nodului ascendent Ω și înclinarea orbitei i (primele două ecuații din (5.1.4)), ceea ce era de așteptat, deoarece forța normală pe planul orbitei este nulă ($\tilde{\mathcal{W}}' = 0$)

5.1.1. Cazul rotației rapide

Vom considera cazul unui vehicul orbital care are o mișcare de rotație uniformă în jurul unei axe centrale principale perpendiculare pe planul orbitei, viteza unghiulară avînd o valoare mare în comparație cu $\dot{\nu}$. Situația ar corespunde cazului stabilizării giroscopice a unui vehicul orbital.

Dacă ne interesează mișcarea vehiculului pe un interval mic de timp, mărimile Ω, i, ω, p, e, $\mathcal{T}$, ν, N pot fi înlocuite cu valori medii, constante pe intervale de timp, $\bar{\Omega}$, $\bar{i}$, $\bar{\omega}$, $\bar{p}$, $\bar{e}$, $\bar{\nu}$, $\bar{N}$.

Să presupunem că studiem mișcarea de la $t_0 = 0$ la $t = kT$ (k un număr întreg, iar T perioada mișcării de rotație în jurul axei perpendiculare pe planul orbitei).

Ecuațiile (5.1.4) se pot integra, cu ipoteza de mai sus, pe intervalul $[0, kT]$:

$$\begin{aligned}
&\bar{\Omega} = \Omega_0,\\
&\bar{i} = i_0,\\
&\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu\bar{p}}}{M\bar{r}^4\bar{e}}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)kT\cos\bar{\nu},\\
&\bar{p} = p_0,\\
&\bar{e} = e_0 - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu\bar{p}}}{M\bar{r}^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)kT\sin\bar{\nu},\\
&\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_0 - \frac{3}{2M\bar{r}^2}(\bar{e}\bar{N}\sin\bar{\nu} - \cos\bar{\nu})\left(C - \frac{A+B}{2}\right)kT,\\
&\bar{\nu} = \nu_0 - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu\bar{p}}}{M\bar{r}^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)kT\frac{\cos\bar{\nu}}{\bar{e}}.
\end{aligned} \tag{5.1.1.1}$$

Variația parametrului $\bar{N}$ este dată de

$$\bar{N} = 2\frac{\bar{p}^2}{\bar{r}^2}\int_0^{\bar{\nu}}\frac{\cos\bar{\nu}\,\mathrm{d}\nu}{(1+\bar{e}\cos\bar{\nu})^3}, \tag{5.1.1.2}$$

iar $\bar{r}$ se calculează cu relația

$$\bar{r} = \frac{\bar{p}}{1+\bar{e}\cos\bar{\nu}}. \tag{5.1.1.3}$$

Dacă, interesează variația parametrilor într-un interval mare de timp, vom înlocui mărimile instantanee cu mărimile medii pe fiecare interval.

Obținem

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{L}}' = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\mathcal{L}'\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right),\\
&\tilde{\mathcal{T}}' = 0.
\end{aligned} \tag{5.1.1.4}$$

Procedînd ca în (5.1.1.4) cu fiecare membru drept din ecuațiile (5.1.4) și trecînd de la variabila independentă t la ν, rezultă :

$$\frac{d\Omega}{d\nu} = 0,$$

$$\frac{di}{d\nu} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{d\nu}\left[\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{e}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\right] = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}\frac{\cos\nu}{e}\left(C - \frac{A+B}{2}\right),$$

$$\frac{dp}{d\nu} = 0, \qquad (5.1.1.5)$$

$$\frac{de}{d\nu}\left[\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{e}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\right] = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\sin\nu,$$

$$\frac{d\tau}{d\nu}\left[\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{3\cos\nu\sqrt{\mu p}}{2eMr^4}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\right] = -$$

$$-\frac{3}{2Mr^2}(eN\sin\nu - \cos\nu)\left(C - \frac{A+B}{2}\right).$$

Se observă că se poate neglija influența rotației rapide asupra parametrului p.

În continuare vom analiza variația argumentului pericentrului ω și a excentricității e.

Din ecuațiile de mai sus :

$$\frac{d\omega}{d\nu} = \frac{\frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{e}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)}{Mr^2 - \frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{e}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)},$$

$$\frac{de}{d\nu} = -\frac{\frac{3}{2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\sin\nu}{Mr^2 - \frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{e}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)}. \qquad (5.1.1.6)$$

Vom considera cazul excentricităților „mari", în sensul relației

$$\left|\frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{e}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\right| \ll Mr^2. \qquad (5.1.1.7)$$

În acest caz se obține sistemul aproximativ :

$$\frac{d\omega}{d\nu} = \frac{3}{2}\frac{\cos\nu}{eMr^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right),$$

$$\frac{de}{d\nu} = -\frac{3}{2}\frac{\sin\nu}{Mr^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right). \qquad (5.1.1.8)$$

Vom integra ecuațiile de mai sus prin metoda aproximațiilor succesive și ne vom opri la prima aproximație.

Notînd cu e_0 excentricitatea caracteristică mișcării de bază, rezultă :

$$\delta\omega = \frac{3}{2}\,\frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{e_0 M}\int_0^{\nu}\frac{\cos\nu}{r^2}\,d\nu. \tag{5.1.1.9}$$

Înlocuind în relația de mai sus

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \tag{5.1.1.10}$$

obținem

$$\delta\omega = \frac{3}{2}\,\frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{p^2 e_0 M}\left[e_0\nu + (1+e_0^2)\sin\nu - \frac{e_0}{3}\sin^3\nu + \frac{e_0}{2}\sin 2\nu\right]. \tag{5.1.1.11}$$

Pentru calculul integralei (5.1.1.9), în relația razei vectoare r (5.1.1.10 s-a înlocuit e cu e_0 (aproximația de ordinul I).

Din relația de mai sus se observă că ω are o perturbație secular ă. După fiecare revoluție ω se schimbă cu

$$\Delta\omega_{2\pi} = \frac{3\pi}{p^2 M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right). \tag{5.1.1.12}$$

Din (5.1.1.11) și (5.1.1.12) obținem

$$\frac{\delta\omega}{\sigma\omega_{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\left[\nu + \left(\frac{1}{e_0} + e_0\right)\sin\nu - \frac{1}{3}\sin^3\nu + \frac{1}{2}\sin 2\nu\right]. \tag{5.1.1.13}$$

Urmînd procedeul de mai sus obținem pentru excentricitate

$$\delta e = -\frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{2p^2 M}(1-\cos\nu)(3 + 4e_0 + 3e_0\cos\nu + e_0\cos^2\nu), \tag{5.1.1.14}$$

de unde

$$\delta e_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{2p^2 M}(3 + 4e_0) \tag{5.1.1.15}$$

și

$$\frac{\delta e}{\delta e_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{3 + 4e_0}(1-\cos\nu)(3 + 4e_0 + 3e_0\cos\nu + e_0\cos^2\nu). \tag{5.1.1.16}$$

5.1.2. Cazul stabilizării gravitaționale

Dacă este îndeplinită condiția

$$C > B > A, \tag{5.1.2.1}$$

mișcarea în jurul centrului de masă este caracterizată prin oscilații în jurul poziției

$$\psi = \theta = \varphi = 0. \tag{5.1.2.2}$$

Vom considera că sînt îndeplinite și condițiile

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0, \tag{5.1.2.3}$$

deci că vehiculul își menține orientarea.

O astfel de mișcare caracterizează bine vehiculul stabilizat gravitațional.

Înlocuind în (5.1.1.3) $\theta = 0$, obținem:

$$\tilde{\mathcal{L}}' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{Mr^2}(B + C - 2A),$$

$$\tilde{\mathcal{C}}' = 0, \quad \mathcal{W}' = 0. \tag{5.1.2.4}$$

Comparînd relațiile (5.1.2.4) cu (5.1.1.4) se observă că rezultatele obținute pentru cazul rotației rapide se transpun situației de față prin înlocuirea expresiei

$$\left(C - \frac{A + B}{2}\right) \text{ cu } (B + C - 2A).$$

Vom obține o deplasare a pericentrului corespunzătoare unei revoluții

$$\Delta\omega_{2\pi} = \frac{3\pi}{p^2 M}(B + C - 2A).$$

Formulele (5.1.1.13), (5.1.1.16), care dau $\frac{\delta\omega}{\Delta\omega_{2\pi}}$ și $\frac{\delta e}{\delta e_{\frac{\pi}{2}}}$, sînt valabile și pentru noul caz analizat

CONCLUZII

Forțele și momentele gravitaționale ce acționează asupra unui vehicul orbital depind atît de poziție, cît și de orientarea acestuia.

În cazul mișcării de bază, cînd vehiculul este asimilat cu un punct material, forța gravitațională depinde numai de distanța dintre vehicul și centrul atractiv. Considerarea forțelor gravitaționale ce acționează asupra vehiculului privit ca rigid duce la perturbații ale elementelor orbitei de bază.

Prin relațiile (5.6) s-au scris forțele perturbatoare pentru cazul general, dar s-au analizat numai două cazuri particulare în care perturbațiile (forțele) sînt proporționale cu $\frac{1}{r^4}$.

În cazul rotației în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei, acesta (planul orbitei) rămîne neschimbat.

S-au pus în evidență variații ale argumentului pericentrului și excentricității orbitei. Argumentul pericentrului prezintă o perturbație seculară.

Este de remarcat că cele două cazuri, al rotației rapide și al stabilizării gravitaționale, permit o tratare unitară.

Formulele stabilite permit comparații cu perturbații ce au alte cauze. De exemplu, în ([1]), considerînd influența arminicii J_2 a potențialului gravitațional terestru, se arată că argumentul pericentrului are o deplasare în timpul unei revoluții dată de

$$\Delta\omega_s = \frac{2\pi\varepsilon}{p^2}\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i_0\right), \tag{6.1}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\mu R^2 J_2, \tag{6.2}$$

R fiind raza Pămîntului.

Comparînd cu relația (5.1.1.12) stabilită pentru riotația rapidă, obținem

$$\frac{\Delta\omega_{2\pi}}{\Delta\omega_s} = \frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{MR^2J_2\left(2 - \dfrac{5}{2}\sin^2 i_0\right)} = \frac{i_z^2 - \dfrac{1}{2}(i_x^2 - i_y^2)}{R^2J_2\left(2 - \dfrac{5}{2}\sin^2 i_0\right)}, \tag{6.3}$$

unde i_x, i_y, i_z sînt raze de inerție.

În relația de mai sus se observă că pentru vehicule mici cu raza de inerție de ordinul metrilor ($i \sim 6 \div 7$ m), pentru care $\left(\dfrac{i}{R}\right)^2 \sim 10^{12}$, pentru înclinare nulă a orbitei($i_0 = 0$) se obține, luînd $J_2 \sim 10^{-3}$, o variație mică dată de rotație față de cea dată de armonica J_2 $\left(\dfrac{\Delta\omega_{2\pi}}{\Delta\omega_s} \sim 10^{-9}\right)$.

Problema prezintă interes pentru înclinările critice $\left(i_0 = \text{arc sin}\,\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ și pentru stații mari, indiferent de înclinarea orbitei.

Primită la redacție la 24 ianuarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. NIȚĂ, *Teoria zborului spațial*, Edit. Academiei R. S. România, 1973.
2. V. VALCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, 1968.
3. V. A. SARÎCEV, *Uproșcenie sistemî gravitaționnoi stabilizații sputnika*, Kosmiceskie issledovanie, *1* (1964).
4. V. A. SARÎCEV, *Vliianie cjata zemli na vrașcealelnoe dvijenie iskusstvennovo sputnika*, Iskysstvennie sputniki zemli, *6* (1961).

ÎNCĂRCAREA TRANSVERSALĂ LIMITĂ PENTRU O PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ CU DIFERITE REZEMĂRI PE CONTUR

de MIRCEA IEREMIA

Institutul de Construcții, București

Se prezintă o metodă de calcul în domeniul elasto-plastic pentru determinarea încărcări limită uniform distribuite ce acționează asupra unei plăci plane dreptunghiulare cu diverse rezemări pe conturul său. Metoda se bazează pe condiția energetică de plasticitate Von Mises. Se ajunge la formule de calcul simple ce pot fi utilizate direct în practica de proiectare de rezistență.

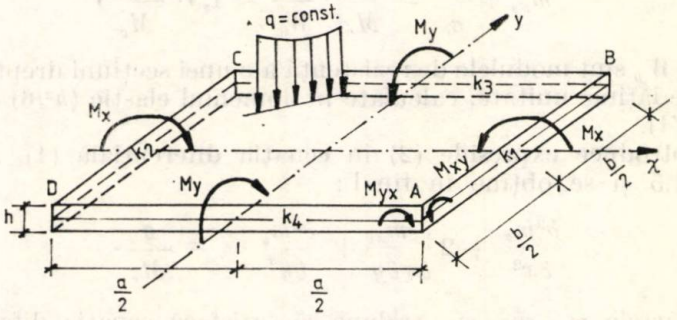


Fig. 1

1. PREZENTAREA PROBLEMEI

Se consideră cazul unei plăci plane dreptunghiulare subțiri de dimensiuni $a \times b \times h$, supusă la o încărcare transversală uniform distribuită q; placa este alcătuită dintr-un material pentru care se poate aplica criteriul de plasticitate Von Mises.

Ecuația diferențială de echilibru, care reprezintă sinteza studiului static făcut pe un element infinitezimal din planul median xoy al plăcii este :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q, \tag{1}$$

unde M_x, M_y, M_{xy} sînt momente încovoietoare și de răsucire raportate la unitatea de lățime de placă.

Momentul de curgere M_c, care produce plastifierea unei secțiuni de lățime unitate, este :

$$M_c = \sigma_c \cdot W_p = \frac{h^2}{4} \cdot \sigma_c,$$

σ_c — rezistența de curgere a materialului.

Se introduce noțiunea de tensiune generalizată sub forma unor rapoarte de tensiuni :

$$m_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_c} = \frac{M_x}{M_c} \cdot \frac{W_p}{W_e} = 1{,}5 \cdot \frac{M_x}{M_c},$$

$$m_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_c} = \frac{M_y}{M_c} \cdot \frac{W_p}{W_e} = 1{,}5 \cdot \frac{M_y}{M_c}, \tag{2}$$

$$m_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_c} = \frac{M_{xy}}{M_c} \cdot \frac{W_p}{W_e} = 1{,}5 \cdot \frac{M_{xy}}{M_c},$$

W_e și W_p sînt modulele de rezistență ale unei secțiuni dreptunghiulare de placă de lățime unitate, calculate în domeniul elastic ($h^2/6$) și respectiv plastic ($h^2/4$).

Se introduce expresiile (2) în ecuația diferențială (1), se notează $\bar{M}_c = M_c/1{,}5$ și se obține în final :

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\frac{q}{M_c}. \tag{3}$$

Rapoartele m_x, m_y, m_{xy} trebuie să satisfacă ecuația diferențială de bază (3) și condițiile pe conturul plăcii. Ele se aleg sub formă polinomială, depinzînd de cinci constante care se vor determina din condițiile de mai jos :

$$\begin{aligned} m_x &= 1 + Ax + Bx^2, \\ m_y &= 1 + Cy + Dy^2, \\ m_{xy} &= Exy. \end{aligned} \tag{4}$$

Constantele A și B se găsesc punînd condițiile ca pe marginile $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ raportul m_x să fie egal cu k_1 și, respectiv, k_2, conform condițiilor concrete de rezemare ale acestor margini.

Pentru $x = \frac{a}{2} \rightarrow m_x = k_1$ și pentru $x = -\frac{a}{2} \rightarrow m_x = k_2$.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{Aa}{2} + \frac{Ba^2}{4} &= k_1, \\ 1 - \frac{Aa}{2} + \frac{Ba^2}{4} &= k_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (5), se obțin valorile constantelor A și B

$$A = \frac{k_1 - k_2}{a}, \quad B = 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 - 2}{a^2}. \tag{6}$$

Punînd condiții analoage pentru m_y pe laturile $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$, se obțin constantele C și D.

Pentru $y = \frac{b}{2} \rightarrow m_y = k_3$ și pentru $y = -\frac{b}{2} \rightarrow m_y = k_4$.

$$C = \frac{k_3 - k_4}{b} \; ; \quad D = 2 \cdot \frac{k_3 + k_4 - 2}{b^2} \cdot \tag{7}$$

Se înlocuiesc expresiile (4) ale tensiunilor generalizate în ecuația (3) și se obține :

$$2 \cdot (B + D + E) = -\frac{q}{M} \cdot$$

Cunoscînd valorile constantelor B și D, conform (6) și (7), rezultă constanta E,

$$E = -\left(\frac{q}{2M_c} + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 - 2}{a^2} + 2 \cdot \frac{k_3 + k_4 - 2}{b^2} \right) \cdot \tag{8}$$

Se admite o modelare elasto-plastică a comportării materialului din placă în conformitate cu condiția de curgere Von Mises.

$$F = \frac{1}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \varkappa = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{9}$$

unde s_{ij} este tensorul deviator și α_{ij} tensorul translației suprafeței de curgere ; $\varkappa$ este o funcție de rezistență de curgere pentru solicitarea de întindere uniaxială.

Conform teoriei energiei potențiale specifice de deviație, ecuația care exprimă o stare de tensiune plană în jurul unui punct, pentru condiția de curgere (9), este :

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_c^2. \tag{10}$$

Avînd în vedere relațiile (2), condiția de mai sus în formă generalizată, devine :

$$m_x^2 + m_y^2 - m_x \cdot m_y + 3m_y^2 = 1. \tag{11}$$

Înlocuind în (11) expresiile găsite în (4) ale tensiunilor generalizate, se obține :

$$\left(1 + \frac{k_1 - k_2}{a} \cdot x + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 - 2}{a^2} \cdot x^2\right)^2 + \left(1 + \frac{k_3 - k_4}{b} \cdot y + 2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{k_3 + k_4 - 2}{b^2} y^2\right)^2 - \left(1 + \frac{k_1 - k_2}{a} \cdot x + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 - 2}{a^2} \cdot x^2\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{k_3 - k_4}{b} \cdot y + 2 \cdot \frac{k_3 + k_4 - 2}{b^2} y^2\right) - 3\left(\frac{q}{2M_c} + 2\frac{k_1 + k_2 - 2}{a^2} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{k_3 + k_4 - 2}{b^2}\right)^2 x^2 y^2 = 1. \tag{11'}$$

Condiția de curgere este îndeplinită în centrul plăcii ($x = y = 0$). Punînd condiția de curgere (11′) la colțurile plăcii în punctele A, B, C și D se obțin următoarele relații :

$$\begin{aligned} k_1^2 - k_1 \cdot k_3 + k_3^2 + \frac{3}{16} a^2 b^2 E^2 &= 1, \\ k_1^2 - k_1 \cdot k_4 + k_4^2 + \frac{3}{16} a^2 b^2 E^2 &= 1, \\ k_2^2 - k_2 \cdot k_3 + k_3^2 + \frac{3}{16} a^2 b^2 E^2 &= 1, \\ k_2^2 - k_2 \cdot k_4 + k_4^2 + \frac{3}{16} a^2 b^2 E^2 &= 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Se adună cele patru relații din (12) și se înlocuiește valoarea constantei E din (8) ; se obține o ecuație din care se găsește valoarea încărcării limită q. Se notează raportul laturilor $\beta = \frac{a}{b}$.

$$q = \frac{4\bar{M}_c}{b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\beta}\sqrt{4 - 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) + (k_1 + k_2)(k_3 + k_4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{k_1 + k_2 - 2}{\beta^2} - (k_3 + k_4 - 2)\right]. \tag{13}$$

2. VALORI PARTICULARE ALE ÎNCĂRCĂRII LIMITĂ

2.1. PLACĂ SIMPLU REZEMATĂ PE TOATE LATURILE

În relația (13) se introduc coeficienții : $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Rezultă,

$$q = \frac{8M_c}{b^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right). \tag{14}$$

2.2. PLACĂ ÎNCASTRATĂ PE TOATE LATURILE

În relația (13) se introduc coeficienții : $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = -1$. Rezultă,

$$q = \frac{16\bar{M}_c}{b^2}\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right). \tag{15}$$

2.3. PLACĂ SIMPLU REZEMATĂ PE DOUĂ LATURI ȘI ÎNCASTRATĂ PE DOUĂ LATURI

2.3.1. Laturile $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ sînt încastrate. Deci, $k_1 = k_2 = 0$ și $k_3 = k_4 = -1$,

$$q = \frac{8\bar{M}_c}{b^2}\left(2 + \frac{1}{\beta^2}\right). \tag{16}$$

2.3.2. Laturile $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ sînt încastrate. Deci, $k_1 = k_2 = -1$ și $k_3 = k_4 = 0$,

$$q = \frac{8\bar{M}_c}{b^2}\left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right). \tag{17}$$

2.3.3. Laturile adiacente $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ sînt încastrate. Deci, $k_1 = k_3 = -1$ și $k_2 = k_4 = 0$ (sau invers : $k_2 = k_4 = -1$ și $k_1 = k_3 = 0$),

$$q = \frac{4\bar{M}_c}{b^2}\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\beta}} + \frac{3}{\beta^2}\right). \tag{18}$$

2.4. PLACĂ SIMPLU REZEMATĂ PE TREI LATURI ȘI ÎNCASTRATĂ PE A PATRA

2.4.1. Latura $\overline{AB}$ încastrată. Deci, $k_1 = -1$ și $k_2 = k_3 = k_4 = 0$,

$$q = \frac{4\bar{M}_c}{b^2}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}\beta} + \frac{3}{\beta^2}\right). \tag{19}$$

2.4.2. Latura $\overline{BC}$ încastrată. Deci, $k_3 = -1$ și $k_1 = k_2 = k_4 = 0$,

$$q = \frac{4\bar{M}_c}{b^2}\left(3 + \frac{2}{\sqrt{3}\beta} + \frac{2}{\beta^2}\right). \tag{20}$$

2.5. PLACĂ ÎNCASTRATĂ PE TREI LATURI ȘI SIMPLU REZEMATĂ PE A PATRA

2.5.1. Latura $\overline{AB}$ simplu rezemată. Deci, $k_1 = 0$ și $k_2 = k_3 = k_4 = -1$.

$$q = \frac{4\bar{M}_c}{b^2}\left(4 + \frac{3}{\beta^2}\right). \tag{21}$$

2.5.2. Latura $\overline{BC}$ simplu rezemată. Deci, $k_3 = 0$ și $k_1 = k_2 = k_4 = -1$

$$q = \frac{4\bar{M}_c}{b^2}\left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right). \tag{22}$$

Primită la redacție la 10 februarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York, 1959.
2. D. MANOLAKOS, *Lower-bound Solutions for Laterally Loaded Rectangular Plates*, IABSE Proceedings P—78/84.

LINII, SUPRAFEȚE ȘI SPAȚII DE INFLUENȚĂ PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale și Aeriene.

Determinarea combinațiilor defavorabile de încărcări, la calculul structurilor, poate fi o operație laborioasă dacă sarcinile au caracter aleatoriu și acționează pe direcții diferite. Pentru situațiile de acest fel, spațiile de influență constituie un instrument de lucru deosebit de eficient, mai ales în cazurile în care urmărirea evoluției rezultatelor și analiza eforturilor se face cu ajutorul unui program interactiv. Un astfel de program, avînd proceduri specifice de generare și încărcare a spațiilor de influență, se folosește în mod curent în cadrul IPTANA. Considerentele teoretice care au stat la baza scrierii procedurii de generare a spațiilor de influență sînt prezentate în acest articol.

1. INTRODUCERE

Utilitatea liniilor și a suprafețelor de influență la calculul structurilor încărcate cu sarcini mobile este recunoscută. O vastă bibliografie, din care aici se citează numai cîteva titluri [1, 2, 4, 7—12, 17—20] învederează interesul manifestat de cercetători pentru aceste subiecte. Unele lucrări [1, 17, 9] furnizează în plus tabele cu coeficienți, grafice sau planșe, reprezentînd variația eforturilor în funcție de poziția ocupată de forța unitară pe linia sau pe suprafața de încărcare.

Pe de altă parte, spațiile de influență, extindere firească a conceptului de linie sau suprafață de influență de la structuri încărcate după o singură direcție la structuri încărcate simultan după mai multe direcții, nu s-au bucurat de aceeași atenție, deși existența automatelor de calcul elimină necesitatea reprezentărilor grafice. Acest lucru este cu atît mai surprinzător, cu cît de mult timp se folosesc programe care lucrează (și) în regim conversațional, fără a se sesiza marea eficiență pe care o are utilizarea spațiiilor de influență la calculul structurilor și aceasta nu numai atunci cînd se caută eforturile provocate de convoaiele mobile.

Prin definiție, spațiul de influență al unui efort este acea reprezentare multidimensională care arată variația efortului în funcție de poziția și direcția de acțiune a unei încărcări unitare generalizate. Sarcinile se aplică deci nu pe o linie sau pe o suprafață de încărcare, ci într-un spațiu de încărcare ale cărui direcții definitorii sînt date de direcțiile gradelor de libertate nodală. Prin urmare, utilitatea spațiilor de influență trebuie asociată în primul rînd situațiilor în care valorile extreme ale eforturilor provin din combinații de sarcini acționînd din diferite direcții. Utilizarea spațiilor de influență fiind ineficientă fără ajutorul calculatorului, rezultă că generarea și încărcarea lor trebuie privite ca proceduri ce țin de prelucrarea, automată a datelor. În ceea ce privește liniile și, într-o măsură mai mică suprafețele de influență, utilizarea tabelelor, diagramelor și a colecțiilor de planșe, rămîne în continuare o alternativă a calculului automat.

Se cunosc mai multe metode pentru calculul coeficienților de influență. Dacă pentru structurile formate din bare, metodele utilizate, analitice sau numerice, furnizează în limitele ipotezelor rezistenței materialelor soluții exacte [1, 2, 4, 7, 10, 11], în cazul structurilor continue soluționarea

este mai dificilă deoarece în punctele de aplicație a sarcinilor concentrate pot apare singularități în cîmpul tensiunilor [20].

Majoritatea procedeelor analitice folosite pentru construirea suprafețelor de influență au la bază metoda singularităților [17, 9, 20]. O prezentare a acestei metode, însoțită de bibliografia aferentă, se găsește în [19].

Determinarea suprafețelor de influență prin procedee numerice presupune încărcarea structurii cu sisteme de forțe care realizează efecte identice celor obținute cînd pe direcția eforturior studiate se imprimă deplasărl unitare virtuale. Pentru determinarea acestor forțe, Newmark [13] a propus utilizarea schemelor de diferențe finite. Posibilitatea utilizării metodei elementelor finite, pentru calculul liniilor și a suprafețelor de influență, a fost demonstrată de Sawko [18], care a arătat că suprafața de influență a unui efort dintr-o rețea de grinzi se poate obține determinînd deformata rețelei sub acțiunea unor sarcini concentrate la nodurile ei.

Cu mijloacele specifice metodei elementelor finite, utilizînd modele deplasare, în cele ce urmează se va prezenta calculul spațiilor de influență Funcțiile de influență ale deplasărilor și eforturilor, încărcările echivalente, coeficienții de pondere și tratarea singularităților vor fi discutate pe rînd. Liniile și suprafețele de influență apar drept cazuri particulare ale spațiilor de influență. În final se vor face cîteva aprecieri referitoare la oportunitatea folosirii spațiilor de influență.

2. SOLUȚIA SISTEMULUI GLOBAL DE ECUAȚII

Se consideră o structură divizată în elemente finite, încărcată la noduri cu sarcini acționînd după direcțiile sistemului general de axe. Cele n deplasări ale nodurilor structurii reprezintă parametrii nedeterminați care se determină rezolvînd sistemul global de ecuații

$$K_g \delta_g = Q_g, \tag{1}$$

în care

K_g reprezintă matricea de rigiditate globală, după eliminarea deplasărilor de corp rigid; Q_g — vectorul sarcinilor concentrate la noduri, iar δ_g este vectorul deplasărilor nodale.

Se admite că una din axele sistemului general de axe este verticală.

Soluția sistemului global (1) stă la baza calculului spațiilor de influență.

3. FUNCȚII DE INFLUENȚĂ

Spațiile de influență ale deplasărilor sau eforturilor se construiesc cu ajutorul coeficienților de influență de la nodurile structurii. În cazul structurilor modelate cu elemente de tip deplasare pură, coeficienții de influență ai deplasărilor mărginesc inferior valorile teoretice. Relația cu ajutorul căreia se calculează coeficienții de influență de la noduri reprezintă funcția de influență (a deplasării sau a efortului studiat). Dacă dimensiunile elementelor finite sînt mici, între noduri se admite o variație liniară.

3.1. FUNCȚII DE INFLUENȚĂ PENTRU DEPLASĂRI

Funcția-deplasare a elementului finit este dată de relația

$$w_e = N_e \delta_e, \tag{2}$$

în care N_e este funcția de formă, iar δ_e este vectorul deplasărilor nodale ale elementului e [3].

Funcțiile de influență ale tuturor deplasărilor punctului curent al elementului e se deduc din relația (2) dacă vectorul δ_e se înlocuiește cu matricea Δ_e :

$$W_e = N_e \Delta_e. \tag{3}$$

Matricea Δ_e, numită aici matricea coeficienților de influență ai deplasărilor nodale, se poate scrie astfel :

$$\Delta_e = [\delta_e^1, \delta_e^2, \ldots, \delta_e^j, \ldots, \delta_e^n]. \tag{4}$$

Vectorul coloană δ_e^j are drept componente deplasările nodurilor elementului finit e produse de o forță unitară concentrată pe direcția j. Fiecare linie a matricei Δ_e are drept elemente coeficienții de influență ai unei deplasări nodale. Funcția de influență a deplasării nodale u_{ki} (deplasarea nodului k după direcția i) se obține, în virtutea teoremei lui Maxwell, încărcînd structura cu o sarcină unitară. concentrată la nodul k după direcția i. Prin urmare, pentru a construi matricea Δ_e, va trebui să se rezolve sistemul (1), pe rînd pentru o sarcină unitară concentrată pe direcția fiecărui grad de libertate al elementului e. Dacă din soluția sistemului (1) se vor reține numai deplasările verticale ale nodurilor, care definesc linia sau suprafața de încărcare, se va obține forma redusă a matricei Δ_e. Aceasta, introdusă în relația (3), furnizează liniile sau suprafețele de influență ale deplasărilor elementului.

În continuare, cu $\bar{\Delta}_e$ se va nota forma redusă a matricei Δ_e.

Funcția de influență a deplasării punctuale se obține și pe altă cale. Utilizînd soluția sistemului (1), matricea coeficienților de influență ai deplasărilor nodale se poate scrie sub forma

$$\Delta_e = L_e^T K_g^{-1} I, \tag{5}$$

în care L_e este o matrice de localizare care pune în relație deplasările nodurilor structurii cu deplasările nodale ale elementului e ; I reprezintă matricea unitate $n \times n$.

Dacă în relația (3), în polinomul care interpolează deplasările după direcția i, se introduc coordonatele punctului curent j, ținîndu-se seama și de (5), se obține funcția de influență a deplasării punctuale u_{ji} (deplasarea punctului j după direcția i) :

$$u_{ji} = N_j L_e^T K_g^{-1} I. \tag{6}$$

Cum matricea K_g este simetrică, relația (6) se poate scrie și sub forma

$$u_{ji} = I K_g^{-1} L_e N_j^T = K_g^{-1} \bar{N}_j^T, \tag{7}$$

care arată că funcția de influență u_{ji} se poate obține dintr-o singură ipoteză de încărcare a structurii, dacă la noduri se aplică ca încărcări componentele vectorului $\bar{N}_j^T = L_e N_j^T$.

3.2. FUNCȚII DE INFLUENȚĂ PENTRU EFORTURI

Funcțiile de influență ale eforturilor unitare din interiorul sau de pe conturul elementului finit se pot exprima în funcție de deplasările nodale, prin intermediul matricei Δ_e. Pentru aceasta, în relația care transformă deplasările nodale în eforturi unitare,

$$\tau_e = DB_e\delta_e, \tag{8}$$

se înlocuiește vectorul deplasărilor nodale cu matricea Δ_e :

$$T_e = DB_e\Delta_e = A_e\Delta_e. \tag{9}$$

În relațiile (8) și (9), D este matricea de elasticitate, iar B_e este matricea de transformare a deplasărilor nodale în deformații specifice [3], [8].

Funcțiile de influență ale eforturilor secționale care acționează pe secțiunea s a elementului finit e, se obțin din (9) prin integrare :

$$Z_{es} = \int_S DB_e\,\mathrm{d}s\Delta_e = Q_{es}\Delta_e. \tag{10}$$

Matricea de transformare Q_{es} are atîtea linii cîte eforturi secționale acționează pe secțiunea s și atîtea coloane cîte grade de libertate are elementul finit.

Funcțiile de influență ale eforturilor de la nodurile elementului finit, se determină direct din relația care transformă deplasările nodale în forțe nodale,

$$r_e = K_e\delta_e, \tag{11}$$

dacă vectorul deplasărilor nodale δ_e se înlocuiește cu matricea Δ_e :

$$R_e = K_e\Delta_e \tag{12}$$

În relațiile (11) și (12), K_e reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit e.

Dacă în (9), (10) și (12) matricea Δ_e se înlocuiește cu forma ei redusă $\overline{\Delta}_e$, se vor obține relațiile corespunzătoare pentru linii și suprafețe de influență.

În situațiile în care se analizează în detaliu o anumită zonă a structurii, procedeul bazat pe utilizarea matricei Δ_e oferă soluții acceptabile, mai ales atunci cînd se folosesc elemente finite de ordin superior. Dacă însă, interesează numai anumite eforturi, din anumite zone ale structurii, apar ca fiind mai eficiente acele metode care furnizează fiecare spațiu de influență în mod independent. Deosebit de avantajoase sînt procedeele, utilizate la calculul structurilor alcătuite din bare, în care, pornindu-se de la o formă de bază unică, o linie de influență se determină nemijlocit dintr-o singură ipoteză de încărcare. Dintre acestea, procedeul bazat pe utilizarea metodei lucrului mecanic virtual în varianta deplasărilor virtuale [4, 10, 2] poate fi aplicat și în cadrul metodei elementelor finite.

În esență, în acest procedeu, se egalează lucrul mecanic efectuat de efortul Z_s, din secțiunea s, cînd pe direcția lui se dă o deplasare unitară

virtuală, deplasare care generează eforturi pe forma de bază, cu lucrul mecanic produs de forța unitară care urmărește deformarea structurii; se conchide că deplasările structurii, luate cu semn schimbat, reprezintă coeficienții de influență ai efortului studiat:

$$Z_s^i = -v. \tag{13}$$

Reținînd interpretarea care a condus la ultima relație, se constată că, formal cel puțin, problema este soluționată dacă se găsește un sistem de încărcări echivalente autoechilibrate, capabile să mențină nemodificată deplasarea virtuală dată forma de bază și după relaxarea nodurilor structurii. Altfel spus, trebuie să se găsească un grup de forțe generalizate sub a căror încărcare structura să se deformeze astfel încît deplasările ei să reprezinte coeficienții de influență ai efortului studiat.

4. ÎNCĂRCĂRILE ECHIVALENTE

Încărcările echivalente pot fi „consistente", cu formularea elementului finit sau nu. Se numesc consistente dacă, pentru determinarea lor, se uzează de același model-deplasare care a stat la baza elementului finit utilizat. Forțele echivalente se numesc inconsistente dacă se utilizează alte modalități de determinare a lor.

4.1. ÎNCĂRCĂRI ECHIVALENTE CONSISTENTE

Se consideră efortul secțional Z_{es}^i, de pe secțiunea s a elementului finit e, a cărui funcție de influență se poate extrage din (10):

$$Z_{es}^i = Q_{es}^i \Delta_e. \tag{14}$$

Vectorul Q_{es}^i transformă deplasările nodale în eforturi Z_{es}^i. Efortul produs de o sarcină unitară generalizată, concentrată pe o direcție oarecare j, se obține din funcția de influență (14), reținînd din matricea Δ_e vectorul δ_e^j (4):

$$Z_{esj}^i = Q_{es}^i \delta_e^j. \tag{15}$$

Componentele vectorului Q_{es}^i pot fi privite ca încărcări generalizate concentrate pe direcțiile gradelor de libertate la nodurile elementului finit e. În această interpretare, în virtutea teoremei reciprocității, relația (14) devine:

$$Z_{esj}^i = \delta_{qej}^i, \tag{16}$$

δ_{qej}^i fiind deplasarea pe direcția j produsă de acțiunea simultană a tuturor încărcărilor Q_{es}^i de la nodurile elementului. Cum indicele j desemnează orice direcție pe care poate acționa forța unitară generalizată, rezultă că relația (13) și relația (16), rescrisă sub forma

$$Z_{es}^i = \delta_{qe}^i, \tag{16a}$$

exprimă același lucru, și deci acțiunea încărcărilor Q_{es}^i are un efect echivalent efectului obținut cînd se dă deplasarea unitară pe direcția efortului

studiat. Deci, dacă o deplasare unitară virtuală se imprimă astfel încît generează un spațiu de influență, se poate determina un grup de încărcări echivalente, concentrate la noduri, care produc același efect. Aceste încărcări sînt componentele matricei Q_{es} care, în relația (10), transformă deplasările

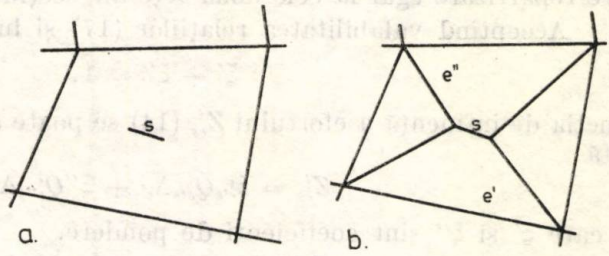


Fig. 1. — Domeniu divizat în elemente finite : *a*. Un element pe domeniu ; *b*. Patru elemente pe domeniu.

nodale în eforturi secționale. Dacă relația (13) se aplică și pentru eforturi unitare sau forțe nodale, atunci, pe baza unui raționament similar, încărcările echivalente consistente aferente se obțin din matricea A_e (9), respectiv K_e (12).

Din cele de mai sus rezultă că încărcările echivalente consistente sînt funcție de natura efortului studiat și de tipul elementului finit utilizat. La structurile care au în componența lor elemente bi și tridimensionale, aceste încărcări mai depind de mărimea elementelor finite și de proporția în care se repartizează deplasarea unitară la cele două fețe ale secțiunii. Aceasta va rezulta din cele ce se vor discuta în legătură cu figura 1.

4.1.1. Coeficienții de pondere

Deplasarea unitară virtuală care conduce la relația (13) este o deplasare relativă, în sensul că se imprimă reciproc celor două fețe ale secțiunii s pe care acționează efortul Z_s^i. De fapt, prin această deplasare, în secțiunea s se introduce o discontinuitate care este caracteristică efortului studiat [4].

În figura 1 este schematizat un domeniu e care conține secțiunea analizată s, domeniu încadrat cu elemente finite. Sînt luate în considerație două ipoteze de schematizare : în figura 1*a* un singur element ocupă întregul domeniu, în timp ce în figura 1*b* domeniul a fost divizat în patru elemente generate prin introducerea a două noduri interioare la extremitățile secțiunii s. Conform relației (14), spațiul de influență al efortului Z_s^i se poate determina cu oricare din relațiile :

$$Z^i_{e's} = Q^i_{e's}\Delta_{e'}, \tag{17a}$$

$$Z^i_{e''s} = Q^i_{e''s}\Delta_{e''}, \tag{17b}$$

$$Z^i_{es} = Q^i_{es}\Delta_e, \tag{17c}$$

deoarece, dacă se admite că soluția este independentă de maniera de discretizare, trebuie să avem :

$$Z^i_{e'e} = Z^i_{e''s} = Z^i_{es}. \tag{18}$$

Funcția de influență reprezentată de relația (17a) corespunde unei deplasări virtuale imprimată în întregime feței din stînga a secțiunii (e'). Relația (17b) ilustrează situația în care deplasarea virtuală se imprimă integral feței din dreapta (e''), iar relația (17c) corespunde unei deplasări unitare repartizate egal la cele două fețe ale secțiunii s (e).

Acceptînd valabilitatea relațiilor (17) și luînd

$$\xi' + \xi'' = 1, \tag{19}$$

funcția de influență a efortului Z^i_{es} (14) se poate scrie sub forma generalizată

$$Z^i_{es} = \xi^i_{e's} Q^i_{e's} \Delta_{e'} + \xi'' Q^i_{e''s} \Delta_{e''}, \tag{20}$$

în care ξ' și ξ'' sînt coeficienți de pondere.

Dacă acuratețea soluției este dependentă de maniera de discretizare a structurii, coeficienții de pondere indică proporția în care participă încărcările echivalente consistente, aferente celor două elemente care încadrează secțiunea analizată, la determinarea coeficienților de influență. Dacă nu se dispune de un criteriu mai potrivit, se poate lua $\xi' = \xi'' = 0.5$. În situațiile în care soluția este independentă de modul în care s-a făcut divizarea în elemente finite, se va lua $\xi' = 1$ ori $\xi'' = 1$.

Luînd în considerație și aportul coeficienților de pondere, relația (16a) se poate rescrie sub o formă generalizată:

$$Z^i_{es} = \xi' \delta^i_{qe'} + \xi'' \delta^i_{qe''}. \tag{21}$$

Din cele arătate rezultă că relația (21) se obține din (20) aplicînd teorema reciprocității lucrului mecanic. Trecerea de la (20) la (21) se poate face și prin intermediul transformării folosite anterior pentru a obține funcția de influență a deplasării punctuale (7) (vezi și [8]). Pentru aceasta, pornindu-se de la (20) și ținînd seama de (5), se scrie succesiv:

$$Z^i_{es} = (\xi' Q^i_{e's} L^T_{e'} + \xi'' Q^i_{e''s} L^T_{e''}) K_g^{-1} I = K_g^{-1} (\xi' L_{e'} Q^{iT}_{e's} + \xi'' L_{e''} Q^{iT}_{e''e}) =$$

$$= \xi' \delta^i_{qe'} + \xi'' \delta^i_{qe''}. \tag{22}$$

Ultima egalitate arată că cei n coeficienți de influență se obțin ca soluție a sistemului de ecuații (1), dacă drept încărcare figurează vectorul încărcărilor echivalente consistente

$$Q^i_{es} = \xi' (L_{e'} Q^{iT}_{e's}) + \xi'' (L_{e''} Q^{iT}_{e''s}). \tag{23}$$

4.1.2. Tratarea singularităților

Cu puține excepții, metoda elementelor finite oferă numai soluții aproximative, soluții care de regulă pot fi îmbunătățite printr-o discretizare mai amănunțită a structurii. În special, în vecinătatea punctelor în care sarcinile exterioare au discontinuități, deci acolo unde eforturile interioare variază mai repede, se prevede micșorarea elementelor finite. Cu toate acestea, în cazul structurilor modelate cu elemente de placă subțire, în vecinătatea singularităților, se obțin întotdeauna valori mult inferioare

celor teoretice. Ca remediu pentru situaţiile în care sarcina exterioară se aplică în imediata vecinătate a secţiunii analizate, trebuie să se ia în consideraţie mărimea efectivă a suprafeţei pe care se realizează contactul dintre încărcare şi placă.

După Westergaard [21], eforturile unitare de la intradosul plăcii, produse de o sarcină repartizată local la extrados, se pot determina cu ajutorul teoriei clasice a plăcilor plane subţiri dacă se foloseşte o suprafaţă echivalentă de contact. Presupunînd că această suprafaţă este circulară, diametrul ei D_c se calculează cu relaţiile :

$$D_c = (1{,}6P^2 + 4)^{\frac{1}{2}}\, t - 1{,}35t \quad \text{pentru } P \leqslant 3{,}45,$$
$$D_c = Pt \qquad\qquad \text{pentru } P > 3{,}45, \tag{24}$$

în care $P = d/t$, t fiind grosimea plăcii iar d reprezentînd diametrul suprafeţei reale de contact luînd în consideraţie şi repartizarea încărcării prin stratele căii.

Pe baza unor studii privind răspunsul dalelor de pod sub acţiunea sarcinilor mobile, în [5] se recomandă ca mărimea elementelor finite să se ia aproximativ egală cu suprafaţa echivalentă de contact a lui Westergaard. Recomandarea este utilă în cazul suprafeţelor de influenţă deoarece indică limita inferioară a dimensiunilor elementelor finite din vecinătatea singularităţilor. Aceasta este o limită de suficientă, în sensul că prin utilizarea unei discretizări mai amănunţite nu se obţine o îmbunătăţire sensibilă a soluţiei. Evident, dacă se folosesc modele de ordin superior dimensiunile elementelor pot fi sporite.

4.2. ÎNCĂRCĂRI ECHIVALENTE INCONSISTENTE

Dintre procedeele folosite pentru a determina încărcările echivalente, pe căi diferite de aceea descrisă în paragraful precedent, aici se vor menţine numai două.

4.2.1. Utilizarea operatorului cu diferenţe finite

Multiplicatorii săgeţilor din operatorul cu diferenţe corespunzător efortului studiat, constituie încărcările echivalente. Aceste încărcări se aplică la acele noduri ale modelului de calcul care se găsesc în domeniul operatorului. Nodurile reţelei de diferenţe finite trebuie să coincidă deci cu nodurile structurii divizate în elemente finite, cel puţin în perimetrul domeniului operatorului. Spre deosebire de procedeul prezentat în paragraful precedent, în care încărcările consistente erau forţe generalizate, în procedeul menţionat aici încărcările echivalente sînt constituite numai din forţe concentrate. Aceasta face necesară o discretizare mai amănunţită a structurii.

4.2.2. Utilizarea funcțiilor-deplasare inconsistente

Încărcările echivalente se determină pornindu-se de la funcții-deplasare diferite de aceea care a stat la baza derivării elementului folosit la modelarea structurii. În [12] acest procedeu este utilizat pentru a găsi cea mai bună reprezentare a încărcărilor necesare determinării liniilor de influ-

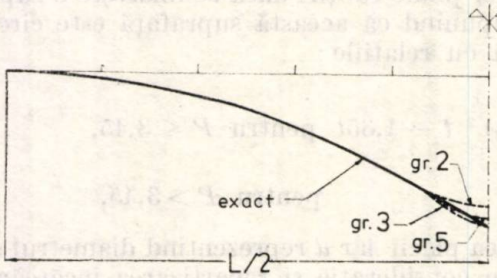


Fig. 2. — Linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea de la mijlocul unei grinzi dublu încastrate.

ență. Sînt comparate rezultatele obținute cu trei seturi de încărcări echivalente, corespunzătoare unor legi de variație a săgeților date prin polinoame de gradul doi, trei și cinci. În figura 2 este reprezentată linia de influență a momentului încovoietor de la mijlocul unei grinzi dublu încastrate, grindă divizată în zece elemente. Cu linii întrerupte sînt reprezentate soluțiile obținute folosind polinoamele menționate mai sus. Cu linie continuă este reprezentată atît soluția analitică cît și soluția obținută cu relația (21), în care s-a luat $\xi' = 1$. După cum se vede, soluțiile diferă numai în zona centrală a grinzii, acolo unde se aplică încărcările echivalente. Dintre soluțiile furnizate de încărcările inconsistente, cea mai apropiată de rezultatul corect este soluția dată de încărcările care provin din polinomul de gradul trei. Rezultate similare se obțin și în celelalte cazuri studiate în [2]. Ținînd seama de faptul că funcția de formă a elementului de grindă este tocmai un polinom de gradul trei, aceste reultate confirmă faptul, deja cunoscut din alte domenii de aplicare a metodei elementelor finite [3, 8, 15, 16], că formulările consistente conduc la cele mai bune rezultate.

Modelele deplasare descrise în [15] și [16] pot servi pentru determinarea încărcărilor echivalente la grinzi și plăci în cazurile în care trebuie să se ia în considerație și efectul forțelor tăietoare.

5. APLICAȚII ALE SPAȚIILOR DE INFLUENȚĂ

Din cele prezentate, rezultă că eforturile din structură se pot determina fie rezolvînd sistemul (1) pentru încărcările reale, fie rezolvînd același sistem pentru încărcările echivalente aferente discontinuității care caracterizează un anumit efort. În prima alternativă soluția sistemului o constituie deplasările nodale, deplasări pe baza cărora apoi se pot determina eforturile din toate elementele structurii. În al doilea caz, soluția se constituie sub forma unui spațiu de influență care, încărcat cu sarcinile reale furnizează valoarea unui singur efort.

Cea de a doua alternativă își dovedește eficiența atunci cînd, existînd sarcini aleatorii (mobile, climatice), trebuie să se construiască diagramele înfășurătoare ale eforturilor. Construcția acestor diagrame se face cu ușurință deoarece fiecare ordonată a unei înfășurătoare se va obține încărcînd spațiul de influență cu toate sarcinile care contribuie la combinația defavorabilă de încărcări.

Probabil, cea mai importantă aplicație a spațiilor de influență, o constituie utilizarea acestora în cadrul programelor interactive. Posibilitățile tehnice de afișare fiind limitate, programele de acest tip nu pot prezenta starea de eforturi a structurii în întregime. Practic, trebuie să se afișeze succesiv părți de structură, ceea ce desigur face dificilă urmărire evoluției rezultatelor atunci cînd trebuie să se obțină combinațiile defavorabile de încărcări. În plus, accesul relativ lent la fișierele care conțin soluțiile sistemului (1) pentru încărcările reale, întîrzie mult răspunsul calculatorului. Utilizarea spațiilor de influență elimină aceste neajunsuri deoarece, prin natura lor, ele facilitează tocmai analiza secvențială a elementelor de structură. O procedură de încărcare a spațiilor de influență, va găsi cu rapiditate combinațiile defavorabile de încărcări.

Autorul a introdus în ultima versiune a programului PASAJ, prezentat anterior în [14], proceduri bazate pe utilizarea spațiilor de influență. Această ultimă versiune a fost scrisă pentru minicalculator în ideea exploatării programului atît în regim standard, cît și în regim conversațional. Pentru construirea înfășurătoarelor și pentru determinarea eforturilor cuplate, programul uzează de ambele tipuri de soluții oferite de ecuația (1). Cu ajutorul spațiilor de influență se determină, pentru fiecare secțiune analizată, cea mai defavorabilă combinație de încărcări. Apoi, sarcinile care realizează combinația defavorabilă de încărcări se aplică simultan pe structură, obținîndu-se astfel deplasările și eforturile cuplate. În acest fel, prin două ipoteze de încărcare a structurii, se obține atît valoarea maximă a efortului studiat, cît și eforturile cuplate aferente.

6. CONCLUZII

Au fost prezentate două procedee pentru calculul spațiilor, suprafețelor și liniilor de influență prin metoda elementelor finite. Primul, bazat pe utilizarea matricei coeficienților de influență ai deplasărilor nodale, se dovedește avantajos în situațiile în care se analizează în detaliu domeniul ocupat de un singur element fitit. Al doilea procedeu, derivat din primul prin transformări formale și care mijlocește obținerea unui singur spațiu de influență, își demonstrează eficiența mai ales în cadrul programelor conversaționale. Experiența acumulată prin utilizarea acestui procedeu îi permite autorului să susțină că includerea procedurilor de generare și încărcare a spațiilor de influență în programele existente, conduce la o îmbunătățire substanțială a acestor programe, la creșterea fiabilității lor.

Cîteva notații :

K_e, K_g reprezintă matrice de rigiditate ;

$L_{e'}$, $L_{e'}$, $L_{e''}$ — matrice de localizare ;

N_e — funcția de formă a elementului finit;
Q^i_{es} — vectorul încărcărilor echivalente consistente
W_e, Z_{es} — funcții de influență;
δ_g, δ^j_e — vectori ai deplasărilor nodale;
Δ_e, $\Delta_{e'}$, $\Delta_{e''}$ — matrice ale cofeicienților de influență ai deplasărilor nodale;
ξ', ξ'' — coeficienți de pondere.

Primită la redacție la 16 noiembrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM, *Grinzi continue — Tabele de calcul*, Edit. tehnică, București, 1959.
2. C. AVRAM, D. ANASTASESCU, *Structuri spațiale*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1978.
3. C. AVRAM și colab., *Structuri din beton armat — Metoda elementelor finite — Teoria echivalenților*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1984.
4. E. BEIU-PALADI, *Contribuții la rezolvarea sistemelor static nedeterminate*, Revistele tehnice AGIR. Constr. publice, mater. de constr. *1—3* (1949).
5. M. R. DOUGLAS et al., *Finite element programs for slab bridge design*, ACI Pub., Detroit, **SP 26—5** (1971).
6. P. J. DOWLING, A. S. BAWA, *Influence surfaces for orthotropic steel bridge deck*, Proc. I.C.E., Part 2, 59, 149—168 (1975).
7. A. GHEORGHIU, *Statica construcțiilor*, vol. 2, Edit. tehnică, București, 1965.
8. B. IRONS, S. AHMAD, *Techniques of Finite Elements*, Wiley, New York, 1981.
9. S. KRUG, P. STEIN, *Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten*, Springer, Berlin, 1961.
10. P. MAZILU, *Statica construcțiilor*, vol. 2, Edit. tehnică, București, 1959.
11. I. I. MUNTEANU, *Structuri pentru construcții — Teorie și calcul*, vol. 2, Edit. Academiei R. S. România, București, 1984.
12. G. C. NAYAK, J. D. DAVIES, *Influence characteristics for slab bridges*, ACI Pub., Detroit, SP 26—4 (1971).
13. N. M. NEWMARK, *Note on calculation of influence surfaces in plates by use of finite difference equations*, J. Appl. Mech., **8**, 2, p. A92 (1951).
14. G. ONU, *The elastic response of the pile foundation bridges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **25**, 6, 893—912 (1980).
15. G. ONU, *Includerea efectului forței tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă*, St. cerc. mec. apl., **41**, 4, p. 459—469 (1982).
— — — — *Shear Effect in Beam Stiffness Matrix*, Journal of Structural Engineering ASCE, **109**, 9, p. 2216—2221 (1983).
16. G. ONU, *Inclusion of Shear Effect in the ACM Element*, Computers & Structures, **18**, 3, p. 459—464 (1984).
17. A. PUCHER, *Einflussfelder elastischer Platten*, Springer, Berlin, 1974.
18. F. SAWKO, *Determination of Influence Lines and Surfaces by Computer*, The Structural Engineer, August, 1964.
19. M. V. SOARE, *Plăci plane*, secțiunea VI din Manual pentru calculul construcțiilor (coord. A. D. Caracostea), Edit. tehnică, București, 1977.
20. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Ecit. tehnică, București, 1968 (din l. engleză).
21. H. M. WESTERGAARD, *Computation of stresses in bridge slabs due to wheel loads*, Public Roads, **11**, 1, p. 1—23 (1930).

STUDIUL TENSOMETRIC AL ABATERILOR DE ANSAMBLU, DE TIPUL FRÎNGERILOR SAU ÎNGENUNCHERILOR, LA SISTEMELE TUBULARE PRESURIZATE LA INTERIOR

de A. PAVEL
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se prezintă, se analizează și se interpretează rezultatele principale ale studiului tensometric, efectuat pe trei modele tubulare, presurizate în condițiile standului de laborator, în scopul evaluării pe cale experimentală a efectelor abaterilor de la rectilinitatea generatoarei de tipul îngenuncherilor (frîngerilor). Rezultatele respective se confruntă cu cele analitice, obținute într-o lucrare anterioară, operîndu-se corecțiile care se impun privitor la cuantificarea efectelor amplificatoare locale.

Într-o lucrare anterioară *, pentru eforturile unitare *maxime*, *inelare* (circumferențiale, transversale) $\sigma_{t\,max}$ și *meridiane* (longitudinale, axiale) $\sigma_{m\,max}$, corespunzătoare *intradosului* sistemului tubular cu îngenunchere sau frîngere *simetrică* ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \alpha'/2 = 90° - \beta$, fig. 2),presurizat uniform la interior, pe cale analitică, au fost obținute următoarele formule de calcul generale :

$$\sigma_{t\,max} = k_t \sigma_t = [1 + 0{,}8482\ \varphi \sqrt{D_m/s}\,(2\cos\alpha)](pD_m/2s), \qquad (1)$$

$$\sigma_{m\,max} = k_m \sigma_m = [1 + 5{,}6549\ \varphi \sqrt{D_m/s}\,(2\cos\alpha)](pD_m/4s), \qquad (2)$$

în care $\sigma_t = pD_m/2s$ și $\sigma_m = pD_m/4s$ sînt așa-numitele eforturi unitare *nominale* inelare și, respectiv, meridiane, obținute în ipoteza *peretelui subțire* (teoria fără moment), iar celelalte notații au semnificațiile redate în tabelul 3.

Ulterior, pentru concludență deplină și elucidarea unor controverse intime, s-a impus proiectarea și confecționarea unor modele tubulare, cu ajutorul cărora să se pună în evidență — prin *metoda tensometrică* — efectele reale ale abaterii de la rectilinitatea generatoarei asupra capacității portante a tubulaturilor cilindrice circulare, mantalelor cilindrice circulare și modelelor tubulare în discuție, toate presurizate la interior (presurizare hidraulică). Ca atare, s-a elaborat un proiect de stand și s-au executat zece modele tubulare cu abatere de la generatoare de tipul îngenuncherii (frîngeri). În vederea efectuării de studii și cercetări experimentale cît mai concludente și neîndoielnice, din punctul de vedere al valorificării practice a formulelor (1) și (2), au fost confecționate cîte două modele tubulare identice, pentru fiecare dintre unghiurile de abatere (îngenunchere, frîngere) luate în considerație. Aceste unghiuri, notate cu β (fig. 1), au avut următoarele valori : 2°, 4°, 6°, 8° și 10°, lor corespunzîndu-le următoarele unghiuri complementare α : 88°, 86°, 84°, 82° și 80°, respectiv $\alpha' = 2\alpha$: 176°, 172°, 168°, 164° și 160°.

Părțile componente principale ale standului de laborator sînt prezentate în figura 1. Cele două tubulaturi, obturate la capătul normal cu cîte un fund elipsoidal standardizat și nominalizate inferioară, respectiv superioară, sînt astfel îmbinate (sudate) între ele, încît între axele lor de

* Pavel A., *Efectele abaterilor de la rectilinitatea generatoarei în cazul mantalelor recipientelor cilindrice presurizate la interior*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, 1983, 42, 6, p. 593—608.

revoluție se formează unghiul $\alpha' = 2\alpha = 180° - 2\beta$. Fundurile elipsoidale sînt echipate cu racorduri, ale căror funcții sînt următ arele : $R1$ — pentru aerisire ; $R2$ — pentru manometrul indicator ; $R3$ — pentru scurgere/go-

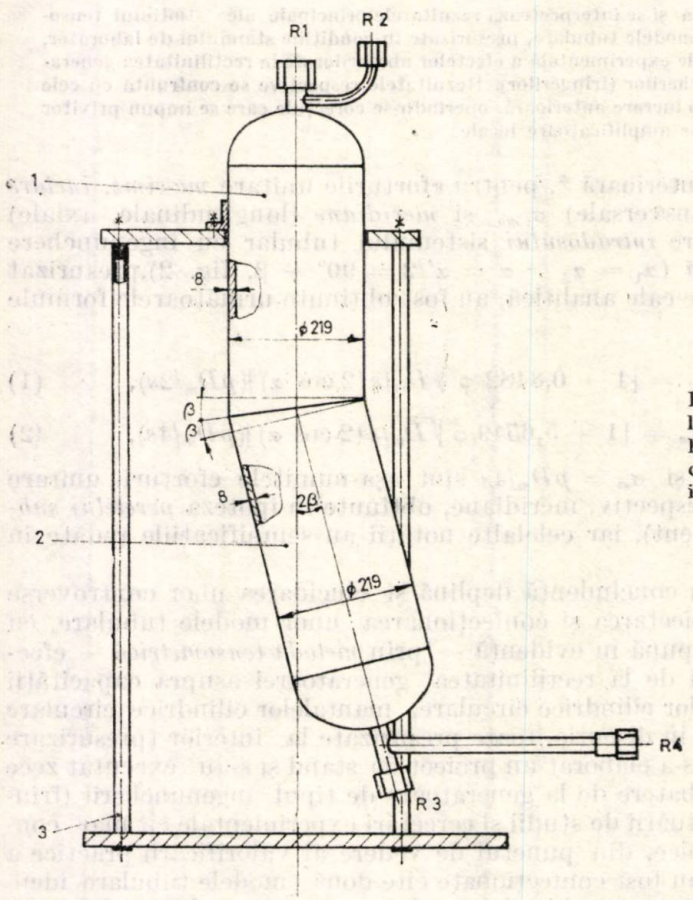


Fig. 1. — Modelul tubular : 1 — componenta tubulară superioară ; 2 — componenta tubulară inferioară ; 3 — dispozitivul de susținere.

lire ; $R4$ — pentru încărcare/umplere și presurizare. Presurizarea interioară s-a efectuat hidraulic (cu motorină), utilizîndu-se o pompă de mînă cu două trepte, de fabricație „Energoreparații". Pînă în momentul prezent, programul de experimentare s-a materializat pentru cîte un model tubular cu $\beta = 2°$, $6°$ și $10°$, respectiv $\alpha' = 2\alpha = 176°$, $168°$ și $160°$.

Pentru determinarea experimentală, în condițiile presurizării hidraulice interioare, a eforturilor unitare inelare (circumferențiale, transversale) σ_t^{exp} și longitudinale (meridiane, axiale) σ_m^{exp}, care apar în peretele modelelor tubulare testate, mai ales în zona afectată de așa-zisa îngenunchere (frîngere), la exteriorul corpului s-au aplicat traductoare tensometrice rezistive (TTR), în conformitate cu planurile de tensometrare preelaborate (fig. 2 și tab. 1, 2). Unul dintre modelele tubulare testate, pregătit pentru operația de tensometrare, este prezentat în fotografia din figura 3.

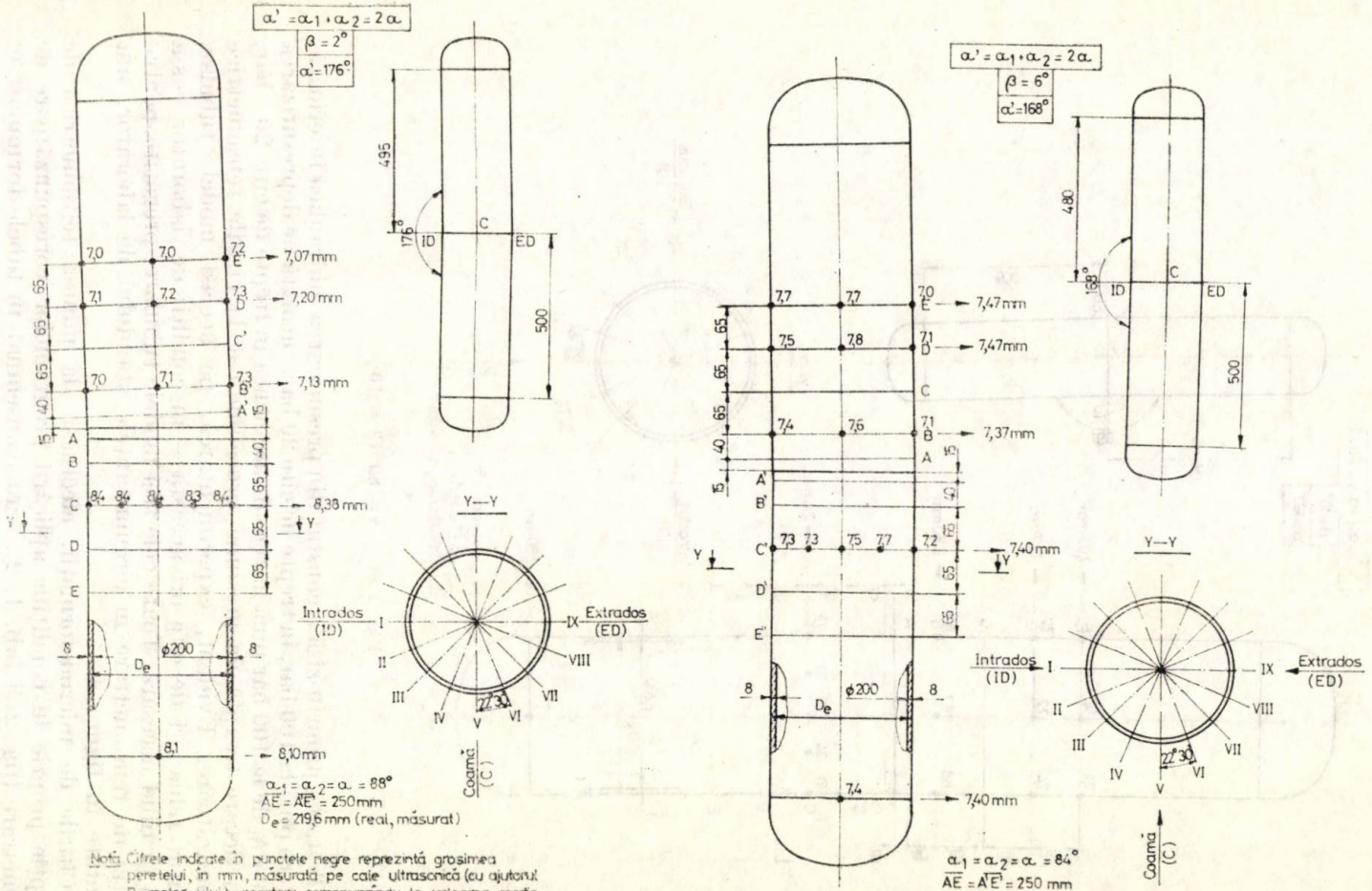
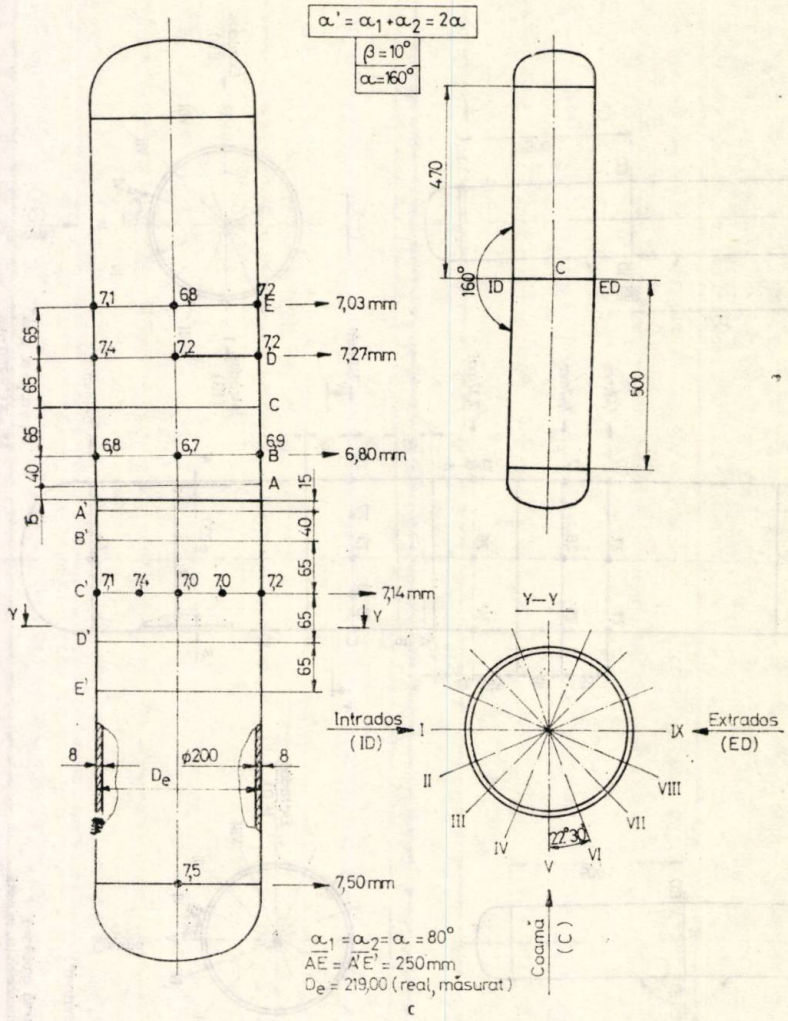


Fig. 2. — Planul tensometrării modelelor tubulare (v. și tabelele 1, 2) : *a*) — $\alpha = 88°$ ($\beta = 2°$) ; *b*) — $\alpha = 84°$ ($\beta = 6°$) ;



c

Fig 2 *c*) — $\alpha = 80°$ ($\beta = 10°$).

Testarea propriu-zisă a constat din presurizarea hidraulică interioară, de la zero pînă la 100 bar, în trepte de cîte 20 bar, urmată de depresurizarea controlată, de la 100 bar pînă la zero de asemenea în trepte de cîte 20 bar, pentru fiecare treaptă de presiune procedîndu-se la citirile tensometrice corespunzătoare. Evident, experimentarea, pe același model tubular, s-a putut relua ori de cîte ori aceasta — în condiții de laborator — s-a impus ca fiind necesară. Toate cele trei modele tubulare, pregătite pentru operația de tensometrare în circumstanțele standului de laborator, sînt prezentate în figura 4.

Citirile de microdeformații, efectuate la puntea tensometrică de concepție proprie în condițiile aplicării programelor corespunzătoare de tensometrare (fig. 2 și tab. 1, 2), s-au consemnat în tabele formulate în

Tabelul 1

Planul de tensometrare

$\alpha' = 176°$

T / L	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Observaţii
E'	×	—	—	—	×	—	—	—	×	
D'	×	—	—	—	×	—	—	—	×	
C'	×	—	—	—	×	—	—	—	×	
B'	×	×	×	×	×	—	×	—	×	
A'	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
A	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
B	×	×	×	×	×	—	×	—	×	
C	×	—	—	—	×	—	—	—	×	
D	×	—	—	—	×	—	—	—	×	
E	×	—	—	—	×	—	—	—	×	
—	ID →				C →				ED	Fig. 2

Notaţii: *T* — secţiuni transversale; *L* — secţiuni longitudinale; × — TTR dubli (ε_t şi ε_m, respectiv σ_t şi σ_m) — — fără TTR; *ID* — intrados; *C* — coamă; *ED* — extrados.

Tabelul 2

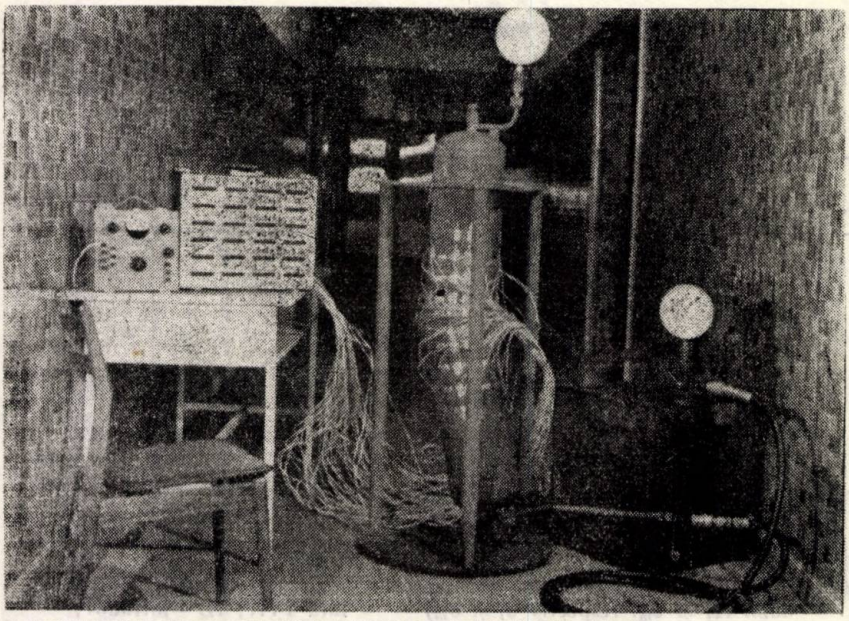
Planul de tensometrare

$\alpha' = 168°$ şi $\alpha' = 160°$

T / L	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Observaţii
E'	●	—	—	●	●	—	—	—	●	
D'	×	0	0	×	×	0	—	—	×	
C'	×	0	0	×	×	0	—	—	×	
B'	×	0	0	×	×	0	—	—	×	
A'	×	0	0	×	×	0	—	—	×	
A	×	0	0	×	×	0	●	—	×	
B	×	0	0	×	×	0	●	—	×	
C	×	0	0	×	×	0	●	—	×	
D	×	0	0	×	×	0	●	—	×	
E	●	—	—	●	●	—	—	—	●	
—	ID →				C →				ED	Fig. 3 şi 4

Notaţii noi: 0 — TTR simpli, transversali (ε_t); ● — TTR simpli, longitudinali (ε_m).

Observaţie. TTR simpli au furnizat numai date (ε_t sau ε_m) informative.



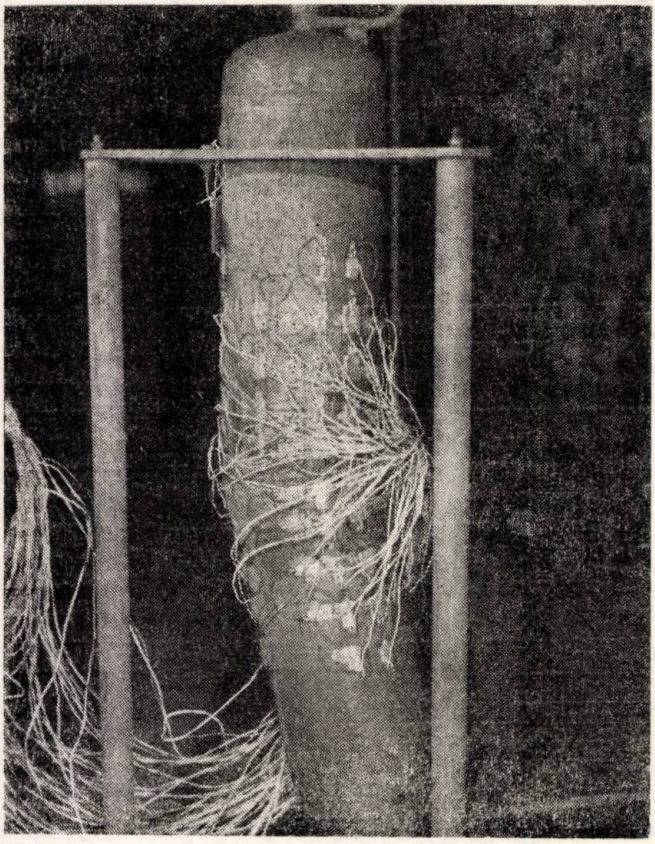
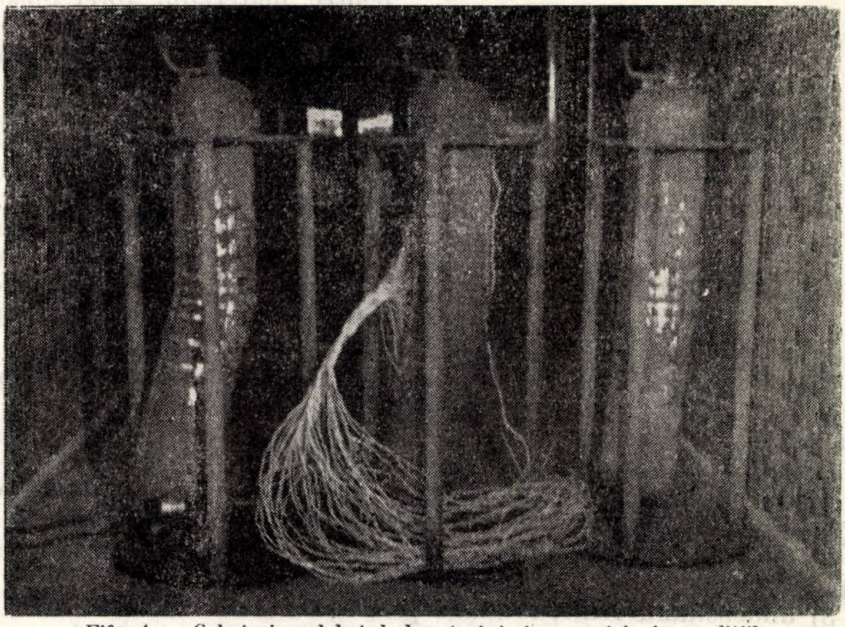


Fig. 3. — Modelul tubular pregătit pentru tensometrare : *a*) — vederea generală a standului de laborator ; *b*) — cîmpul mărcilor tensometrice aplicate.

mod special. Mărimile corespunzătoare ale deformațiilor specifice ε_1 și ε_2 (fig. 5), cu semnul algebric rezultat (plus sau minus), pentru fiecare punct de măsurare, s-au evaluat simplu prin calcul, valorile lor fiind de asemenea



Fifg. 4. — Cele trei modele tubulare testate tensometric, în condițiile presurizării hidraulice în circumstanțe de laborator.

centralizate în tabele formulate ca atare. În aceste din urmă tabele s-au redat și eforturile unitare corespunzătoare σ_1 și σ_2, determinate cu următoarele formule clasice generale :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) = \sigma_m^{exp}, \tag{3}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) = \sigma_t^{exp}, \tag{4}$$

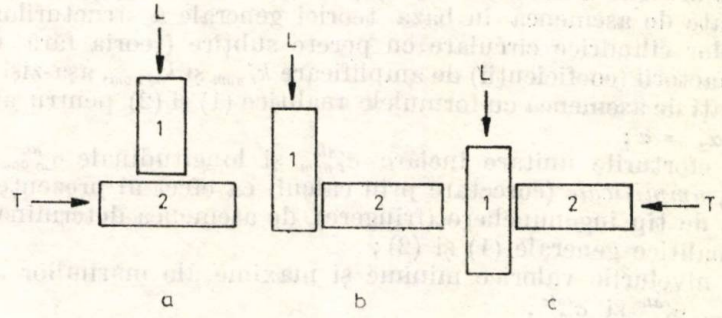


Fig. 5. — Poziționarea traductoarelor (mărcilor) tensometrice rezistive. Schemă principială.

în care

$\mu = 0{,}3$ reprezintă coeficientul de contracție transversală (coeficientul lui Poisson) pentru materialul (oțel obișnuit) corpului modelelor testate;

$E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2 — modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young) al materialului (oțel obișnuit) de bază al corpului modelelor testate;

ε_1, ε_2 — deformațiile specifice corespunzătoare (longitudinale ε_m sau inelare ε_t), considerate cu semnul lor algebric (plus sau minus);

$\sigma_1 = \sigma_m^{exp}$, $\sigma_2 = \sigma_t^{exp}$ — eforturile unitare longitudinale și, respectiv, inelare (valori experimentale), în N/mm^2.

Datele de bază, obținute prin calcul, pentru nivelul maxim de presurizare ($p = 100$ bar) interioară, considerat ca fiind cel mai edificator din punct de vedere valoric, sînt centralizate în tabelul 3. La elaborarea tabelului respectiv s-au avut în vedere următoarele:

1) unghiurile $\alpha' = 2\alpha = 180° - 2\beta$, corespunzătoare modelelor tubulare (în număr de trei) testate experimental în condiții de laborator;

2) două valori extreme ($\varphi = 1{,}00$ și $\varphi = 0{,}80$) ale coeficientului de rezistență al sudurilor φ;

3) dimensiunile reale, evaluate prin măsurări nedistructive (D_e și s) sau prin calcul (D_m), ale componentelor tubulare pentru modelele testate;

4) eforturile unitare inelare σ_t și longitudinale σ_m, determinate în baza teoriei generale a structurilor de tipul învelișurilor cilindrice circulare cu perete subțire (teoria fără moment);

5) factorii (coeficienții) de amplificare k_t și k_m, determinați cu formulele analitice (1) și (2) pentru alternativa cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$;

6) eforturile unitare inelare σ_t^{calc} și longitudinale σ_m^{calc} amplificate (corectate prin calcul) ca efect al prezenței abaterii de formă de tip îngenunchere (frîngere), determinate cu formulele analitice generale (1) și (2);

7) dimensiunile nominale $D_{e\,nom}$, s_{nom} și $D_{m\,nom}$ ale componentelor tubulare pentru modelele testate;

8) eforturile unitare inelare σ_t^n și longitudinale σ_m^n, așa-zise *nominale*, determinate de asemenea în baza teoriei generale a structurilor de tipul învelișurilor cilindrice circulare cu perete subțire (teoria fără moment);

9) factorii (coeficienții) de amplificare $k_{t\,nom}$ și $k_{m\,nom}$, așa-zișii *nominali*, determinați de asemenea cu formulele analitice (1) și (2) pentru alternativa cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$;

10) eforturile unitare inelare $\sigma_{t\,nom}^{calc}$ și longitudinale $\sigma_{m\,nom}^{calc}$, așa-zise *nominale*, *amplificate* (corectate prin calcul) ca efect al prezenței abaterii de formă de tip îngenunchere (frîngere), de asemenea determinate cu formulele analitice generale (1) și (2);

11) nivelurile valorice minime și maxime ale mărimilor s, D_m, σ_t, σ_m, k_t, k_m, σ_t^{calc} și σ_m^{calc};

12) simplexurile corespunzătoare σ_t/σ_m, $\sigma_t^{calc}/\sigma_m^{calc}$, $\sigma_{t\,nom}^{calc}/\sigma_{m\,nom}^{calc}$, $\sigma_{t\,nom}^{calc}/\sigma_t$, $\sigma_{t\,nom}^{calc}/\sigma_t^{calc}$, $\sigma_{m\,nom}^{calc}/\sigma_m$ și $\sigma_{m\,nom}^{calc}/\sigma_m^{calc}$.

Tabelul 3

Datele de calcul

(Presiunea manometrică interioară p = 100 bar)

Unghiul $\alpha' = 2\alpha$, în grd		176	168	160	176	168	160
Coeficientul de rezistență al sudurii φ		$\varphi = 1{,}00$			$\varphi = 0{,}80$		
Diametrul exterior D_e măsurat, în mm		219,6	219,0	219,0	219,6	219,0	219,0
Grosimea de calcul s a peretelui metalic cilindric, în mm	max	8,38	7,47	7,50	8,38	7,47	7,50
	min	7,13	7,37	6,80	7,13	7,37	6,80
Diametrul mediu calculat $D_m = D_e - s$, în mm	min	211,22	211,53	211,50	211,22	211,53	211,50
	max	212,47	211,63	212,20	212,47	211,63	212,20
Efortul unitar inelar $\sigma_t = pD_m/2s$, în N/mm²	min	126,03	141,59	141,00	126,03	141,59	141,00
	max	149,00	143,58	156,03	149,00	143,58	156,03
Efortul unitar meridian (longitudinal) $\sigma_m = pD/4s$, în N/mm²	min	63,01	70,79	70,50	63,01	70,79	70,50
	max	74,50	71,79	78,01	74,50	71,79	78,01
Factorul (coeficientul) de amplificare $k_t = 1 + 0{,}8482\,\varphi\sqrt{D_m/s}\,(2\cos\alpha)$	min	1,2972	1,9436	2,5643	1,2378	1,7549	2,2514
	max	1,3232	1,9502	2,6456	1,2585	1,7602	2,3165
Factorul (coeficientul) de amplificare $k_m = 1 + 5{,}6549\,\varphi\sqrt{D_m/s}\,(2\cos\alpha)$	min	2,9816	7,2909	11,4292	2,5853	6,0327	9,3433
	max	3,1547	7,3350	11,9709	2,7237	6,0680	9,7767
Efortul unitar inelar amplificat (corectat prin calcul) $\sigma_t^{calc} = k_t\sigma_t$, în N/mm²	min	163,49	275,19	361,57	156,00	248,48	317,45
	max	197,16	280,01	412,79	187,52	252,73	351,29
Efortul unitar meridian (longitudinal) amplificat (corectat prin calcul) $\sigma_m^{calc} = k_m\sigma_m$, în N/mm²	in	187,87	523,41	805,76	162,90	433,09	658,70
	max	235,03	526,58	933,85	202,92	435,62	762,68
Simplexul σ_t/σ_m	min	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
	max	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
Simplexul $\sigma_t^{calc}/\sigma_m^{calc}$	max	0,8702	0,5258	0,4483	0,9576	0,5737	0,4819
	min	0,8389	0,5318	0,4420	0,9241	0,5802	0,4606

Tabelul 3 (continuare)

Ungiul $\alpha' = 2\alpha$, în grd	176	168	160	176	168	160
Coeficientul de rezistență al sudurii φ	$\varphi = 1{,}00$			$\varphi = 0{,}80$		
Diametrul exterior D_e măsurat, în mm	219,6	219,0	219,0	219,6	219,0	219,0
Diametrul exterior nominal $D_{e\,nom}$, în mm	219,00	219,00	219,00	219,00	219,00	219,00
Grosimea nominală a peretelui metalic s_{nom}, în mm	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00
Efortul unitar inelar nominal $\sigma_t^n = pD_{m\,nom}/2s_{nom}$, în N/mm^2	131,88	131,88	131,88	131,88	131,88	131,88
Efortul unitar meridian (longitudinal) nominal $\sigma_m^n = pD_{m\,nom}/4s_{nom}$, în N/mm^2	65,94	65,94	65,94	65,94	65,94	65,94
Diametrul mediu nominal $D_{m\,nom} = D_{e\,nom} - s_{nom}$, în mm	211,00	211,00	211,00	211,00	211,00	211,00
Factorul (coeficientul) de amplificare nominal $k_{t\,nom} = 1 + 0{,}8482\,\varphi\sqrt{D_{m\,nom}/s_{nom}} \times (2\cos\alpha)$	1,3040	1,9107	2,5128	1,2432	1,7285	2,2103
Factorul (coeficientul) de amplificare nominal $k_{m\,nom} = 1 + 5{,}6549\,\varphi\sqrt{D_{m\,nom}/s_{nom}} \times (2\cos\alpha)$	3,0271	7,0714	11,0861	2,6217	5,8571	9,0688
Efortul unitar inelar nominal amplificat (corectat prin calcul) $\sigma_{t\,nom}^{calc} = k_{t\,nom}\sigma_t^n$, în N/mm^2	171,97	251,98	331,39	163,95	227,95	291,49
Efortul unitar meridian (longitudinal) nominal corectat prin calcul (amplificat) $\sigma_{m\,nom}^{calc} = k_{m\,nom}\sigma_m^n$, în N/mm^2	199,61	466,29	731,02	172,87	386,22	598,00
Simplexul $\sigma_{t\,nom}^{calc}/\sigma_{m\,nom}^{calc}$	0,8615	0,5404	0,4533	0,9484	0,5902	0,4874

Tabelul 3 (continuare)

Unghiul $\alpha' = 2\alpha$ în grd		176	168	160	176	168	160
Coeficientul de rezistență al sudurii φ		$\varphi = 1{,}00$			$\varphi = 0{,}80$		
Diametrul exterior D_e măsurat, în mm		219,6	219,0	219,0	219,6	219,0	219,0
Simplexul $\sigma^{calc}_{t\,nom}/\sigma^{calc}_{t}$	max	1,0519	0,9157	0,9165	1,0510	0,9174	0,9182
	min	0,8721	0,8999	0,8028	0,8743	0,9020	0,8298
Simplexul $\sigma^{calc}_{m\,nom}/\sigma^{calc}_{m}$	max	1,0625	0,8909	0,9072	1,0612	0,8918	0,9078
	min	0,8493	0,8855	0,7828	0,8519	0,8866	0,7841
Simplexul $\sigma^{calc}_{t\,nom}/\sigma_{t}$	max	1,3645	1,7796	2,3503	1,3309	1,6099	2,0673
	min	1,1542	1,7550	2,1239	1,1003	1,5876	1,8682
Simplexul $\sigma^{calc}_{m\,nom}/\sigma_{m}$	max	3,1679	6,5869	10,3691	2,7435	5,4559	8,4823
	min	2,6793	6,4952	9,3708	2,3204	5,3799	7,6657

Verificarea liniarității dependenței generale $\sigma = \sigma(p)$, în scopul confirmării rămînerii în domeniul *elastic* al comportării modelelor tubulare testate prin presurizare hidraulică, a impus elaborarea unor tabele de sinteză și comparație (tab. 4), urmată de trasarea graficelor corespunzătoare redate în figura 6 (pentru $\alpha' = 168°$)*. Pentru confruntarea rezultatelor experimentale $\sigma^{exp}_{t,m}$, obținute în planurile transversale A, B, C, D și E, cu cele constatate în planurile transversale A', B', C', D' și E', s-au construit grafice comparative de tipul celui redat în figura 7, spre exemplificare. De remarcat că planurile $A'-E'$ în figura 2, *a* și $A-E$ în figurile 2, *b* și *c* au fost *normale* la axa de revoluție (planuri riguros transversale), iar planurile $A-E$ în figura 2, *a* și $A'-E'$ în figurile 2, *b* și *c* au fost *paralele* cu planul de îmbinare dintre cele două componente tubulare ale modelelor testate (planuri ușor înclinate — cu 2°, 6°, 10° etc., *cvasitransversale*).

Exemplificativ concludent (pentru $p = 100$ bar), în figurile 8 se redau eforturile unitare σ^{exp}_{t} și σ^{exp}_{m}, măsurate pe cale experimentală, tensometrică, pentru $\beta = 2°$, 6° și 10°, respectiv $\alpha' = 176°$, 168° și 160°. În aceleași figuri, se menționează, de asemenea și valorile corespunzătoare simplexului de caracterizare $\sigma^{exp}_{t}/\sigma^{exp}_{m}$. În plus, în figurile antecitate sînt menționate — pentru comparație directă — valorile calculate ale mărimilor σ^{n}_{t}, σ^{n}_{m}, $\sigma^{calc}_{t\,nom}$, $\sigma^{calc}_{m\,nom}$, $\sigma^{n}_{t}/\sigma^{n}_{m}$ și $\sigma^{calc}_{t\,nom}/\sigma^{calc}_{m\,nom}$.

* Dată fiindu-le semnificația exemplificativă, graficele corespunzătoare modelelor tubulare cu $\alpha' = 176°$ și $\alpha' = 160°$ nu se mai redau în lucrarea prezentă.

Tabelul 4

Eforturile unitare inelare σ_t^{exp} (experimentale), σ_t^n sau σ_m^n (nominale) și $\sigma_{t\,nom}^{calc}$ sau $\sigma_{m\,nom}^{calc}$ (de calcul, corectate), pentru $\alpha' = 168°$, în N/mm²

L	p, în bar / T	Treptele de presurizare					Treptele de depresurizare				
		20	40	60	80	100	100	80	60	40	20
		σ_t^{exp}, în N/mm²									
A	I	27,92	56,19	85,27	112,38	140,31	143,31	115,04	85,62	58,50	12,00
	V	25,15	50,31	76,62	100,27	129,35	131,54	105,58	77,77	20,50	10,50
	IX	23,08	46,62	72,35	95,08	119,45	120,12	95,88	72,00	49,27	25,38
A′	I	32,42	63,00	95,08	124,84	156,92	159,23	126,00	95,08	64,15	32,08
	V	28,89	37,51	86,82	116,93	—	—	118,50	88,38	59,08	32,42
	IX	23,08	46,62	72,35	95,08	119,50	120,12	95,88	72,00	49,27	25,38
		$\sigma_t^n = pD_{m\,nom}/2s_{nom}$, în N/mm²									
A,A′	I, V, IX	26,38	52,75	79,13	105,50	131,88	131,88	105,50	79,13	52,75	26,38
		$\sigma_{t\,nom}^{calc} = k_{t\,nom}\,\sigma_t^n$, în N/mm²									
A,A′	I, V, IX	50,40	100,79	151,19	201,58	251,98	251,98	201,58	151,19	100,79	50,40

Notă: $k_{t\,nom} = 1 + 0{,}8492\ \varphi \sqrt{D_{m\,nom}/s_{nom}}\ (2\cos\alpha) = 1{,}9107$, pentru $\varphi = 1{,}00$ și $\alpha' = 180 - 2.6° = 168°$

		$\sigma_m^n = p\,D_{m\,nom}/4s_{nom}$, în N/mm²									
A, A′	I, V, IX	13,19	26,38	39,56	52,75	65,94	65,94	52,75	39,56	26,38	13,19
		$\sigma_{m\,nom}^{calc} = k_{m\,nom}\,\sigma_m^n$, în N/mm²									
A,A′	I, V, IX	93,27	186,54	279,74	373,02	466,29	466,29	373,02	279,74	186,54	93,27

Notă: $k_{m\,nom} = 1 + 5{,}6549\ \varphi \sqrt{D_{m\,nom}/s_{nom}}\ (2\cos\alpha) = 7{,}0714$, pentru $\varphi = 1{,}00$ și $\alpha' = 180° - 2.6° = 168°$.

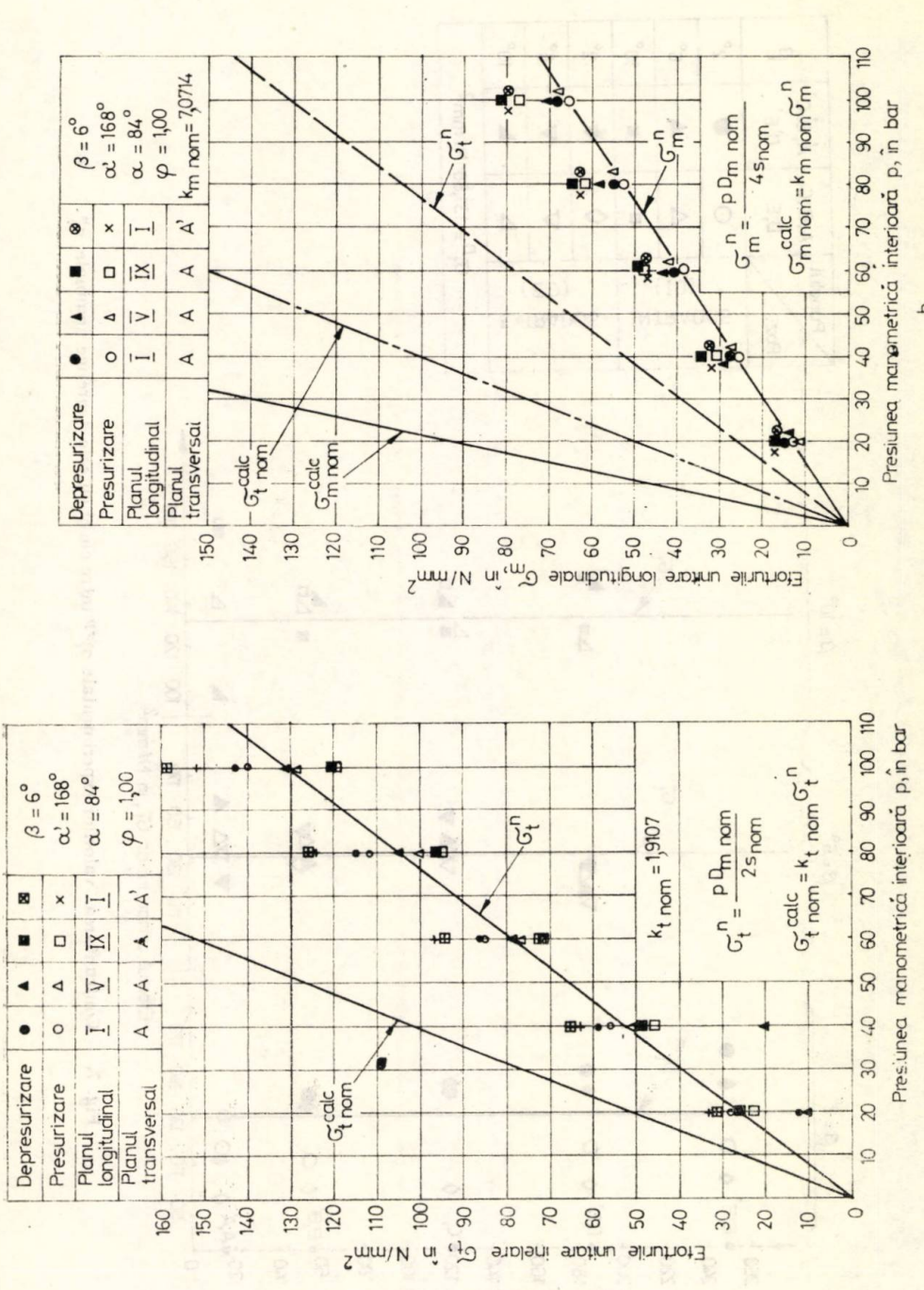
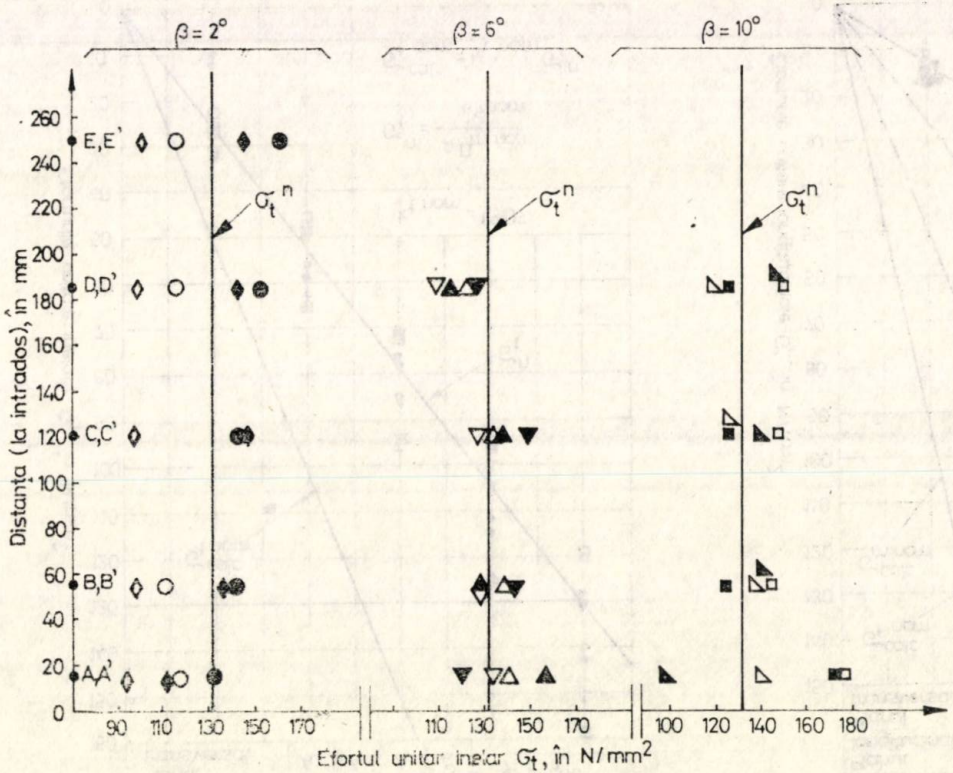
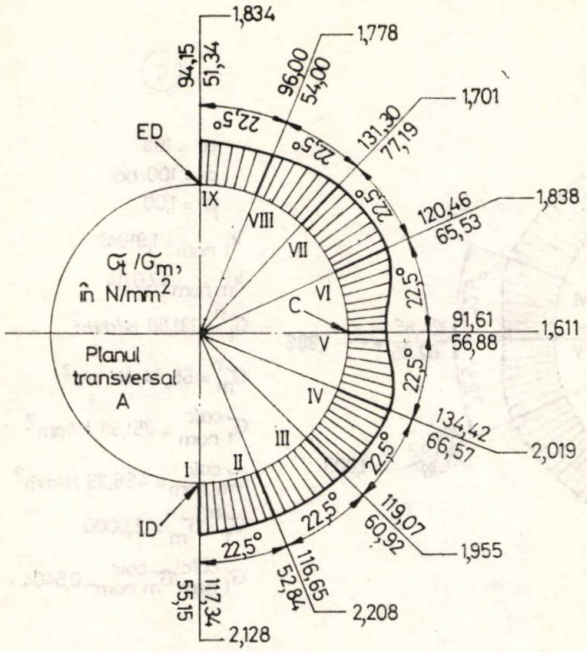


Fig. 6. — Dependențele eforturilor unitare de presiunea interioară : *a*) — dependențele $\sigma_t = \sigma_t(p)$; *b*) — dependențele $\sigma_m = \sigma_m(p)$.



Punctul / Poz.	A,B,C D,E	A',B',C' D',E'	β
INTRADOS (ID)	○	●	2°
	△	▲	6°
	□	■	10°
EXTRADOS (ED)	◇	◆	2°
	▽	▼	6°
	◺	◣	10°
σ_t^n = 131,88 N/mm²			

Fig. 7. — Confruntarea valorilor experimentale σ_t^{exp} între ele și cu cele teoretice nominale σ_t^n.



a

A

$\alpha = 176°$

$p = 100$ bar

$\varphi = 1{,}00$

$k_{t\ nom} = 1{,}3040$

$k_{m\ nom} = 3{,}0271$

$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²

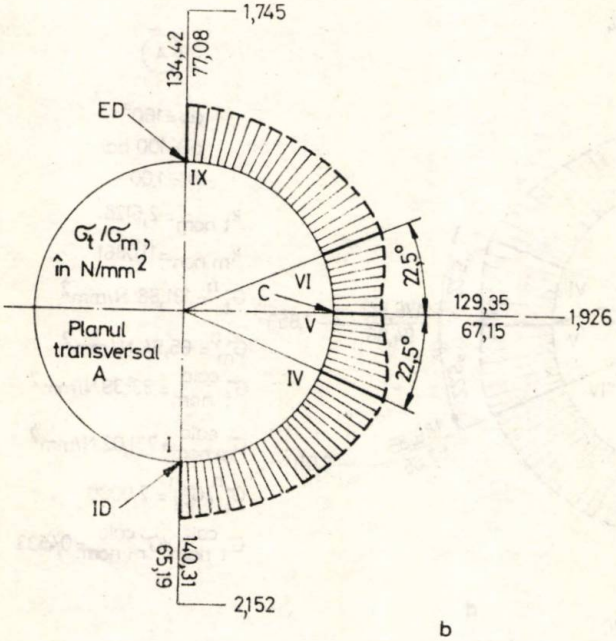
$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²

$\sigma_{t\ nom}^{calc} = 171{,}97$ N/mm²

$\sigma_{m\ nom}^{calc} = 199{,}61$ N/mm²

$\sigma_t^n / \sigma_m^n = 2{,}0000$

$\sigma_{t\ nom}^{calc} / \sigma_{m\ nom}^{calc} = 0{,}8615$



b

A

$\alpha = 168°$

$p = 100$ bar

$\varphi = 1{,}00$

$k_{t\ nom} = 1{,}9107$

$k_{m\ nom} = 7{,}0714$

$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²

$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²

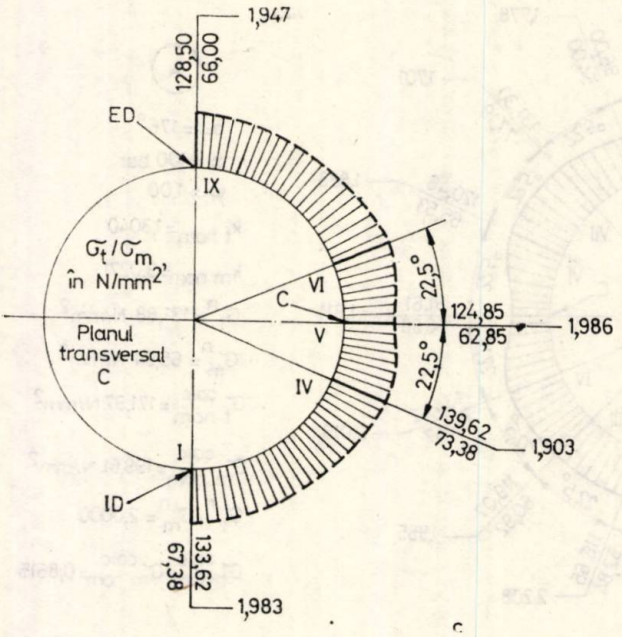
$\sigma_{t\ nom}^{calc} = 251{,}98$ N/mm²

$\sigma_{m\ nom}^{calc} = 466{,}29$ N/mm²

$\sigma_t^n / \sigma_m^n = 2{,}0000$

$\sigma_{t\ nom}^{calc} / \sigma_{m\ nom}^{calc} = 0{,}5404$

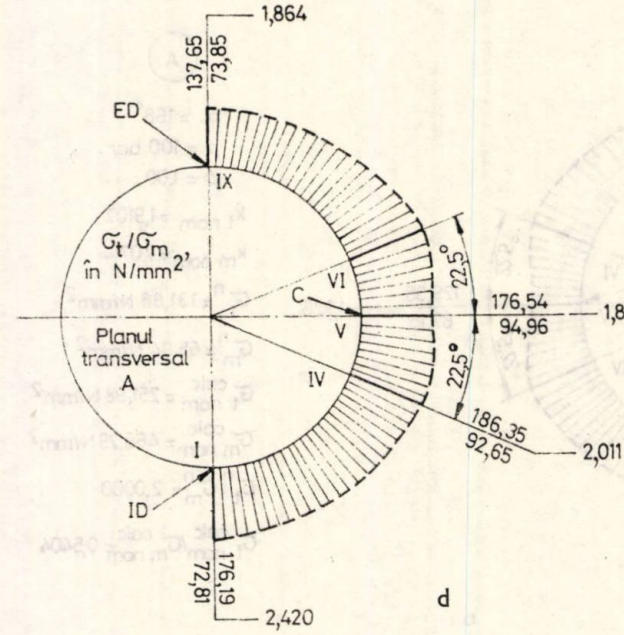
Fig. 8. — Epura eforturilor unitare normale în planurile transversale. Valorile experimentale $\sigma_t^{exp}/\sigma_m^{exp}$ corespund la : *a*) — planul transversal *A*, pentru $\beta = 2°$ (ex. $\sigma_t^{exp}/\sigma_m^{exp} \rightarrow 120{,}46/65{,}53 \rightarrow 1{,}838$) ; *b*) — planul transversal C, pentru $\beta = 6°$ (ex. $\sigma_t^{exp}/\sigma_m^{exp} \rightarrow 129{,}35/67{,}15 \rightarrow 1{,}926$) ;



c

C

$\alpha = 168°$
$p = 100$ bar
$\varphi = 1{,}00$
$k_{t\ nom} = 1{,}91047$
$k_{m\ nom} = 7{,}0714$
$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²
$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²
$\sigma_{t\ nom}^{calc} = 251{,}98$ N/mm²
$\sigma_{m\ nom}^{calc} = 466{,}29$ N/mm²
$\sigma_t^n/\sigma_m^n = 2{,}0000$
$\sigma_{t\ nom}^{calc}/\sigma_{m\ nom}^{calc} = 0{,}5404$



d

A

$\alpha = 160°$
$p = 100$ bar
$\varphi = 1{,}00$
$k_{t\ nom} = 2{,}5128$
$k_{m\ nom} = 11{,}0861$
$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²
$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²
$\sigma_{t\ nom}^{calc} = 331{,}39$ N/mm²
$\sigma_{m\ nom}^{calc} = 731{,}02$ N/mm²
$\sigma_t^n/\sigma_m^n = 2{,}0000$
$\sigma_{t\ nom}^{calc}/\sigma_{m\ nom}^{calc} = 0{,}4533$

Fig. 8: *c*) — planul transversal *C*, pentru $\beta = 6°$ (ex. $\sigma_t^{exp}/\sigma_m^{exp} \rightarrow 124{,}85/62{,}85 \rightarrow \rightarrow 1{,}986$); *d*) — planul transversal *A*, pentru $\beta = 10°$ (ex. $\sigma_t^{exp}/\sigma_m^{exp} \rightarrow 176{,}54/94{,}96 \rightarrow \rightarrow 1{,}859$).

Tabelu 5

Valorile simplexului $\sigma_t^{exp}/\sigma_{t\,med}^{calc}$
(p= 100 bar)

L \ T	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Observaţii
					$\beta = 2°$; $\alpha' = 176°$					
E	0,64	—	—	—	0,75	—	—	—	0,57	$\sigma_{t\,med}^{calc} = 180{,}33$ N/mm²
D	0,64	—	—	—	0,74	—	—	—	0,57	
C	0,14	—	—	—	0,72	—	—	—	0,55	
B	0,62	0,59	0,62	0,72	0,69	—	0,77	—	0,56	
A	0,65	0,65	0,66	0,75	0,51	0,67	0,73	0,53	0,52	
A'	0,73	0,75	0,73	0,83	0,75	0,73	0,72	0,72	0,63	
B'	0,79	0,81	0,82	0,93	0,84	—	0,80	—	0,77	
C'	0,80	—	—	—	0,82	—	—	—	0,82	
D'	0,85	—	—	—	0,80	—	—	—	0,80	
E'	0,89	—	—	—	0,81	—	—	—	0,81	
					$\beta = 6°$; $\alpha = 168°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_{t\,med}^{calc} = 277{,}60$ N/mm²
D'	0,42	—	—	0,41	0,47	—	—	—	0,46	
C'	0,50	—	—	0,43	0,46	—	—	—	0,54	
B'	0,47	—	—	0,41	0,52	—	—	—	0,51	
A'	0,57	—	—	—	—	—	—	—	0,43	
A	0,51	—	—	—	0,45	—	—	—	0,48	
B	0,50	—	—	0,48	0,48	—	—	—	0,47	
C	0,48	—	—	0,50	0,45	—	—	—	0,46	
D	0,44	—	—	0,44	0,42	—	—	—	0,40	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
					$\beta = 10°$; $\alpha' = 160°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_{t\,med}^{calc} = 387{,}18$ N/mm²
D'	0,33	—	—	0,38	0,37	—	—	—	0,38	
C'	0,33	—	—	0,38	0,36	—	—	—	0,37	
B'	0,32	—	—	0,37	0,36	—	—	—	0,36	
A'	0,45	—	—	0,43	0,36	—	—	—	0,25	
A	0,46	—	—	0,48	0,46	—	—	—	0,36	
B	0,37	—	—	0,44	0,47	—	—	—	0,35	
C	0,38	—	—	0,42	0,48	—	—	—	0,32	
D	0,39	—	—	0,42	0,45	—	—	—	0,31	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Notă: $\sigma_{t\,med}^{calc} = (1/2)(\sigma_{t\,min}^{calc} + \sigma_{t\,max}^{calc})$, pentru $\varphi = 1{,}00$.

Observaţie. Valorile σ_t^{exp} sînt cele care corespund pentru alternativa cu $\varphi = 1{,}00$. Valorile $\sigma_{t\,med}^{calc} \geq 277{,}60$ N/mm² depăşesc considerabil limita tehnică de curgere $\sigma_c = \sigma_{0.2} = 240$ N/mm².

Tabelul 6

Valorile simplexuiui $\sigma_t^{exp}/\sigma_t^n$
($p = 100$ bar; $\varphi = 1{,}00$)

L \ T	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Observații
					$\beta = 2°$; $\alpha' = 176°$					
E	0,88	—	—	—	1,02	—	—	—	0,78	$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²
D	0,88	—	—	—	1,01	—	—	—	0,78	
C	0,19	—	—	—	0,98	—	—	—	0,75	
B	0,85	0,80	0,85	0,99	0,95	—	1,05	—	0,76	
A	0,89	0,88	0,90	1,02	0,69	0,91	1,00	0,73	0,71	
A'	1,00	1,02	1,00	1,13	1,03	1,00	0,98	0,95	0,86	
B'	1,08	1,10	1,12	1,27	1,14	—	1,09	—	1,05	
C'	1,09	—	—	—	1,13	—	—	—	1,11	
D'	1,16	—	—	—	1,10	—	—	—	1,09	
E'	1,22	—	—	—	1,11	—	—	—	1,11	
					$\beta = 6°$; $\alpha' = 168°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²
D'	0,88	—	—	0,86	1,00	—	—	—	0,96	
C'	1,05	—	—	0,90	0,97	—	—	—	1,13	
B'	0,98	—	—	0,87	1,10	—	—	—	1,07	
A'	1,19	—	—	—	—	—	—	—	0,91	
A	1,06	—	—	—	0,98	—	—	—	1,02	
B	1,06	—	—	1,01	1,01	—	—	—	0,98	
C	1,01	—	—	1,06	0,95	—	—	—	0,97	
D	0,94	—	—	0,93	0,88	—	—	—	0,83	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
					$\beta = 10°$; $\alpha' = 160°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_t^n = 131{,}88$ N/mm²
D'	0,96	—	—	1,11	1,07	—	—	—	1,12	
C'	0,96	—	—	1,13	1,05	—	—	—	1,07	
B'	0,95	—	—	1,08	1,04	—	—	—	1,07	
A'	1,33	—	—	1,27	1,06	—	—	—	0,74	
A	1,34	—	—	1,41	1,34	—	—	—	1,04	
B	1,09	—	—	1,29	1,38	—	—	—	1,03	
C	1,11	—	—	1,22	1,41	—	—	—	0,95	
D	1,14	—	—	1,24	1,32	—	—	—	0,91	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Tabelul 7

Valorile simplexului $\sigma_m^{exp}/\sigma_{m\,med}^{calc}$
($p = 100$ bar; $\varphi = 1{,}00$)

L \ T	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Observaţii
					$\beta = 2°$; $\alpha' = 176°$					
E'	0,39	—	—	—	0,36	—	—	—	0,35	$\sigma_{m\,med}^{calc} = 211{,}45$ N/mm²
D'	0,37	—	—	—	0,34	—	—	—	0,35	
C'	0,34	—	—	—	0,35	—	—	—	0,35	
B'	0,34	0,37	0,37	0,39	0,37	—	0,35	—	0,33	
A'	0,34	0,36	0,37	0,40	0,37	0,37	0,36	0,37	0,34	
A	0,26	0,25	0,29	0,31	0,27	0,31	0,37	0,26	0,24	
B	0,23	0,24	0,28	0,30	0,30	—	0,33	—	0,24	
C	0,12	—	—	—	0,31	—	—	—	0,23	
D	0,26	—	—	—	0,33	—	—	—	0,24	
E	0,26	—	—	—	0,32	—	—	—	0,26	
					$\beta = 6°$; $\alpha' = 168°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_{m\,med}^{calc} = 525{,}00$ N/mm²
D'	0,11	—	—	0,11	0,13	—	—	—	0,14	
C'	0,13	—	—	0,12	0,13	—	—	—	0,15	
B'	0,11	—	—	0,12	0,13	—	—	—	0,15	
A'	0,15	—	—	—	—	—	—	—	0,17	
A	0,12	—	—	—	0,13	—	—	—	0,15	
B	0,12	—	—	0,14	0,12	—	—	—	0,14	
C	0,13	—	—	0,14	0,12	—	—	—	0,13	
D	0,13	—	—	0,12	0,12	—	—	—	0,12	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
					$\beta = 10°$; $\alpha' = 160°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_{m\,med}^{calc} = 869{,}81$ N/mm²
D'	0,07	—	—	0,08	0,08	—	—	—	0,08	
C'	0,07	—	—	0,09	0,08	—	—	—	0,08	
B'	0,06	—	—	0,08	0,08	—	—	—	0,08	
A'	0,08	—	—	0,11	0,10	—	—	—	0,09	
A	0,08	—	—	0,11	0,11	—	—	—	0,08	
B	0,08	—	—	0,09	0,10	—	—	—	0,07	
C	0,08	—	—	0,09	0,10	—	—	—	0,07	
D	0,08	—	—	0,09	0,10	—	—	—	0,06	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

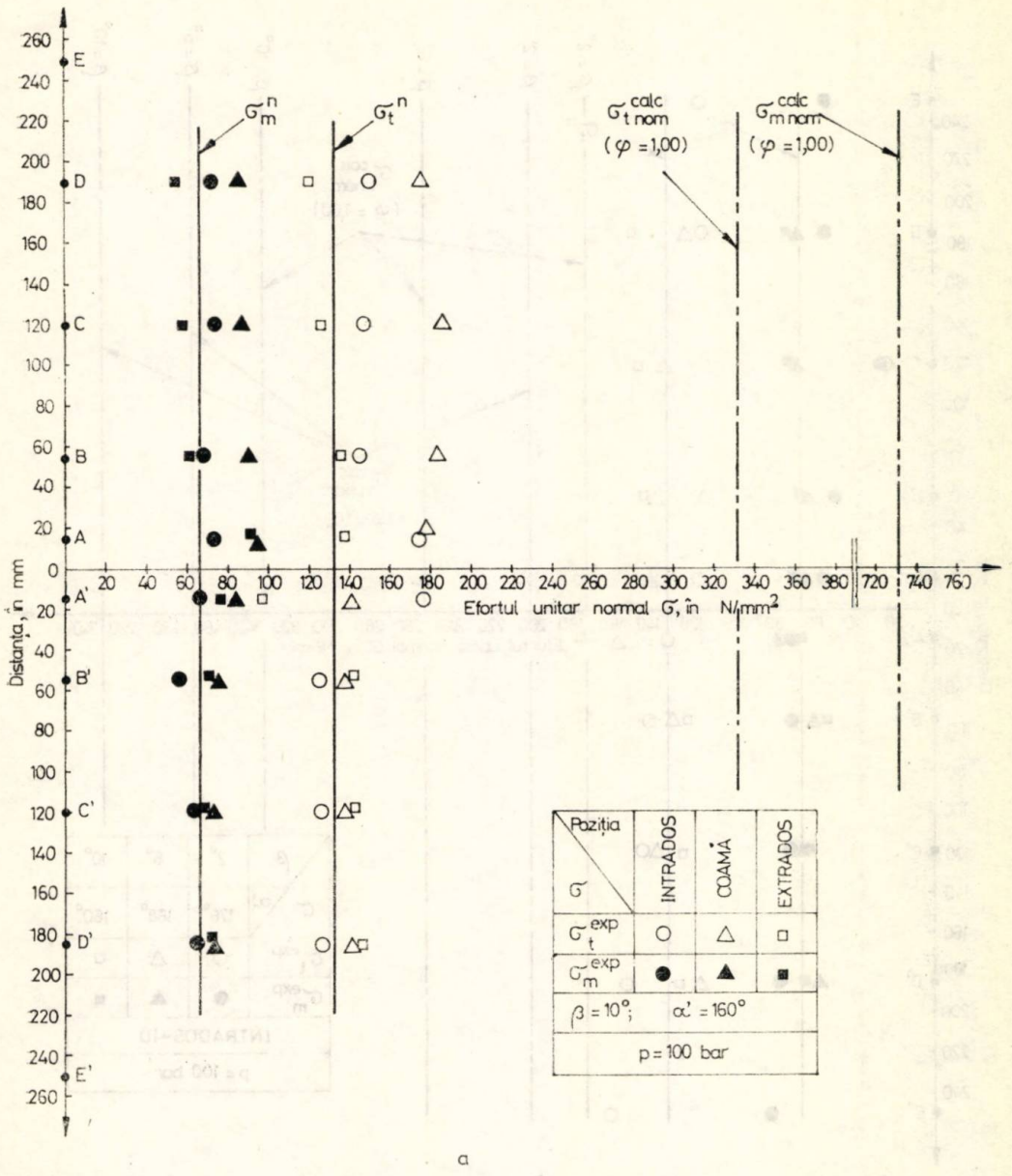
Notă: $\sigma_{m\,med}^{calc} = (1/2)(\sigma_{m\,min}^{calc} + \sigma_{m\,max}^{calc})$, pentru $\varphi = 1{,}00$.

Observaţie. Valorile σ_m^{exp} sînt cele care corespund pentru alternativa cu $\varphi = 1{,}00$. Valoarea $\sigma_{t\,med}^{calc} = 525{,}00$ N/mm² depăşeşte considerabil limita tehnică de curgere $\sigma_c = \sigma_{0,2} = 240$ N/mm², iar valoarea $\sigma_{t\,med}^{calc} = 869{,}81$ N/mm² depăşeşte notabil rezistenţa de rupere standard $\sigma_r = 370$ N/mm², ca, de altfel, şi valoarea precedentă $\sigma_{t\,med}^{calc} = 525{,}00$ N/mm².

Tabelul 8

Valorile simplexului $\sigma_m^{exp}/\sigma_m^n$
($p = 100$ bar; $\varphi = 1{,}00$)

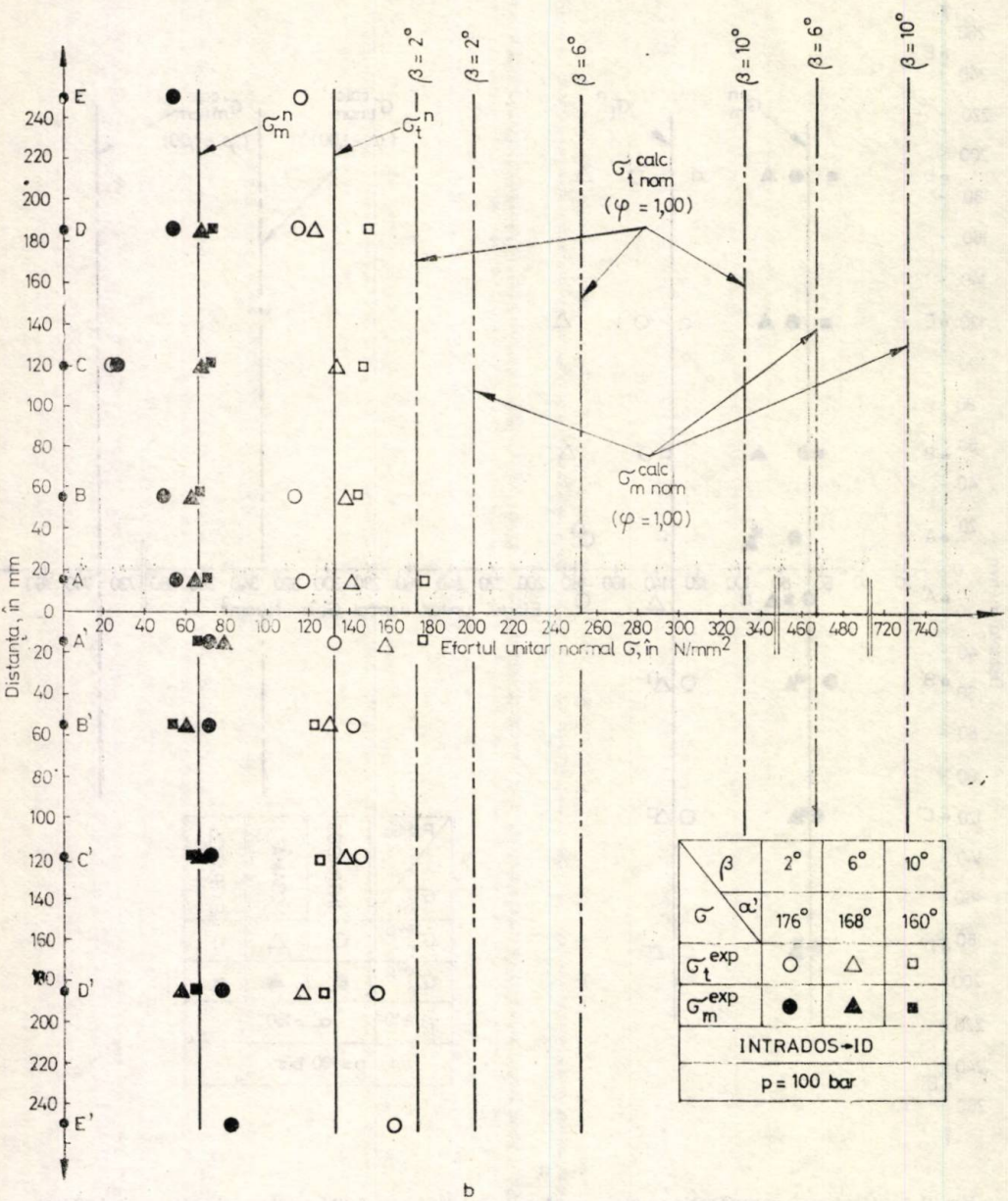
L \ T	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Observaţii
					$\beta = 2°$; $\alpha' = 176°$					
E	0,83	—	—	—	1,03	—	—	—	0,82	$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²
D	0,83	—	—	—	1,05	—	—	—	0,77	
C	0,40	—	—	—	0,99	—	—	—	0,73	
B	0,75	0,78	0,89	0,98	0,95	—	1,04	—	0,78	
A	0,84	0,90	0,92	1,01	0,86	0,99	1,17	0,82	0,78	
A'	1,09	1,17	1,18	1,27	1,19	1,18	1,16	1,19	1,09	
B'	1,08	1,19	1,20	1,26	1,20	—	1,13	—	1,06	
C	1,09	—	—	—	1,14	—	—	—	1,11	
D'	1,19	—	—	—	1,10	—	—	—	1,13	
E'	1,24	—	—	—	1,16	—	—	—	1,13	
					$\beta = 6°$; $\alpha' = 168°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²
D'	0,90	—	—	0,92	1,03	—	—	—	1,15	
C'	1,03	—	—	0,99	1,01	—	—	—	1,19	
B'	0,91	—	—	0,97	1,04	—	—	—	1,20	
A'	1,19	—	—	—	—	—	—	—	1,34	
A	0,99	—	—	—	1,02	—	—	—	1,17	
B	0,97	—	—	1,13	0,97	—	—	—	1,11	
C	1,02	—	—	1,11	0,95	—	—	—	1,00	
D	1,04	—	—	0,97	0,94	—	—	—	0,93	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
					$\beta = 10°$; $\alpha' = 160°$					
E'	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sigma_m^n = 65{,}94$ N/mm²
D'	0,97	—	—	1,11	1,11	—	—	—	1,10	
C'	0,96	—	—	1,15	1,08	—	—	—	1,04	
B'	0,86	—	—	1,09	1,12	—	—	—	1,12	
A'	1,00	—	—	1,39	1,26	—	—	—	1,16	
A	1,10	—	—	1,41	1,44	—	—	—	1,12	
B	1,02	—	—	1,20	1,37	—	—	—	0,94	
C	1,11	—	—	1,15	1,32	—	—	—	0,87	
D	1,10	—	—	1,21	1,29	—	—	—	0,82	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	



a

Fig. 9. — Graficele comparative : *a*) — pentru $\beta = 10°$ și $p = 100$ bar ; *b*) — pentru $p = 100$ bar, numai la intrados.

Confruntarea generală a rezultatelor experimentale între ele și cu cele analitice (calculate), în diferite alternative de studiu, pentru $p = 100$ bar (exemplificativ concludent) , se reușește în figurile 9, *a* ($\beta = 10°$, $\alpha' = 160°$) și 9, *b* (pentru *intradosul* modelelor tubulare testate). Pentru cele trei modele tubulare testate (cu $\beta = 2°$, 6° și 10°), în finalul prelucrării



b

Fig. 9 *b*) — pentru $p = 100$ bar, numai la intrados.

rezultatelor obținute, s-au materializat următoarele *comparații* : 1) între σ_t^{exp} și $\sigma_{t\,med}^{calc}$ (tabelul 5), respectiv σ_t^n (tabelul 6) ; 2) între σ_m^{exp} și $\sigma_{m\,med}^{calc}$ (tabelul 7), respectiv σ_m^n (tabelul 8).

Analiza atentă și minuțioasă, asociată cu interpretarea rezultatelor evidențiate anterior, permit următoarele constatări mai importante :

PRIVITOR LA FORMULELE ANALITICE DE CALCUL (1) ŞI (2):

1) Eforturile unitare $\sigma_{t,m}$, ca şi cele $\sigma^n_{t,m}$, corespunzătoare aplicării teoriei generale a structurilor de ipul învelişurilor cilindrice cu perete subţire presurizate la interior (teoria fără moment), sînt *independente* de mărimile φ şi α', sînt *constante* (uniforme) în oricare dintre planurile transversale sau longitudinale şi, în funcţie de valoarea raportului D_m/s, respectiv $D_{m\,nom}/s_{nom}$, au următoarele intensităţi: $\sigma_t = 126{,}03 \ldots 156{,}03$ N/mm²; $\sigma_m = 63{,}01 \ldots 78{,}01$ N/mm²; $\sigma_m = 131{,}88$ N/mm²; $\sigma^n_m = 65{,}94$ N/mm², peste tot rezultînd că $\sigma_t/\sigma_m = \sigma^n_t/\sigma^n_m = 2{,}0000$, ceea ce nu este surprinzător. Se va remarca, numai, că grosimea de perete s şi diametrul exterior D_e, măsurate ca atare (folosind modalităţile nedistructive), s-au dovedit a nu fi constante de la un model tubular la altul şi nici chiar pentru acelaşi model tubular (fig. 2 şi tab. 3).

2) Eforturile unitare $\sigma^{calc}_{t,m}$ şi cele $\sigma^{calc}_{t,m\,nom}$, evaluate cu formulele (1) şi (2), *depind determinant* de mărimile φ şi mai ales $\alpha' = 180° - 2\beta$, dar sînt *invariabile* în direcţiile inelară şi longitudinală, respectiv în planurile transversale şi longitudinale, efectele de *amplificare*, evidenţiate ca atare pentru intensitatea eforturilor unitare menţionate, fiind *generalizate*. Prin urmare, efectele de amplificare corespunzătoare nu rezultă — în mod explicit sau implicit — că sînt locale sau cvasilocale, ceea ce *surprinde din punct de vedere fenomenologic* [dar nu surprinde din punctul de vedere al structurii formulelor (1) şi (2)]. Pentru $\alpha' \in [176°; 160°]$, se constată că: $\sigma^{calc}_t/\sigma^{calc}_m = 0{,}4420 \ldots 0{,}9576$, respectiv $\sigma^{calc}_{t\,nom}/\sigma^{calc}_{m\,nom} = 0{,}4533 \ldots 0{,}9484$, ceea ce evidenţiază *amplificarea considerabilă* a eforturilor unitare longitudinale odată cu apariţia şi mai ales cu creşterea unghiului β. Acest din urmă efect se materializează, cu deosebită evidenţă, atunci cînd se pun faţă în faţă valorile simplexului $\sigma^{calc}_{t\,nom}/\sigma_t$ şi mai ales cînd acestea se compară cu cele ale simplexului $\sigma^{calc}_{m\,nom}/\sigma_m$ ($\sigma^{calc}_{t\,nom}/\sigma_t = 1{,}1003 \ldots 2{,}3503$, faţă de $\sigma^{calc}_{m\,nom}/\sigma_m = 2{,}3204 \ldots 10{,}3691$).

3) Factorii (coeficienţii) de amplificare, corespunzători unghiurilor $\alpha' \in [176°; 160°]$, au valorile: $k_t = 1{,}2378 \ldots 2{,}6456$; $k_m = 2{,}5853 \ldots 11{,}7909$; $k_{t\,nom} = 1{,}2432 \ldots 2{,}5128$ şi $k_{m\,nom} = 2{,}6217 \ldots 11{,}0861$. Aşadar, factorii (coeficienţii) k_t şi $k_{t\,nom}$, pe de o parte şi k_m şi $k_{m\,nom}$, pe de altă parte, sînt comparabili, diferenţele fiind cu totul nesemnificative.

4) Prezenţa abaterilor de formă geometriă de tipul îngenuncherii (frîngerii), care implică anomalii (cu sau fără discontinuităţi) ale rectilinităţii generatoarei, atrage după sine *modificarea* cîmpului de eforturi unitare, în primul rînd din punctul de vedere al intensităţii sale, efectele *amplificatoare* afectînd atît eforturile unitare inelare (mai puţin), cît şi eforturile unitare longitudinale (în mod considerabil).

PRIVITOR LA REZULTATELE EXPERIMENTALE:

5) Dependenţele experimentale $\sigma^{exp}_t = \sigma^{exp}_t(p) \rightarrow$ tabelul 4 şi figura 6, *a*, respectiv $\sigma^{exp}_m = \sigma^{exp}_m(p) \rightarrow$ figura 6, *b*, sînt riguros *liniare*, ceea ce confirmă — în intervalul de presurizare interioară ($p \leqslant 100$ bar) avut în vedere — comportarea *elastică* a tuturor modelelor tubulare testate. Se confirmă, astfel, valabilitatea fundamentelor care s-au valorificat la sta-

bilirea formulelor (1) și (2), de asemenea la elaborarea datelor de calcul centralizate în tabelul 3. În mod sistematic, valorile experimentale σ_t^{exp} le *încadrează* pe cele analitice σ_t^n între limitele 0,87...1,23, respectiv 87 %... ...123 %, fiind cu mult mai mici decît valorile analitice $\sigma_{t\,nom}^{calc}$ (pentru planurile transversale A și A' — fig. 6, *a*). Așadar :

$$\max.\ \sigma_t^{exp} = 1{,}23\ \sigma_t^n, \tag{5}$$

respectiv

$$\max.\ \sigma_t^{exp} = 0{,}64\ \sigma_{t\,nom}^{calc}. \tag{6}$$

De asemenea, în mod sistematic, valorile experimentale σ_m^{exp} le *încadrează* pe cele analitice σ_m^n între limitele 0,93...1,37, respectiv 93 %... ...137 %, fiind considerabil mai mici decît valorile analitice $\sigma_{m\,nom}^{calc}$ (pentru planurile transversale tot A și A' — fig. 6, *b*). Prin urmare :

$$\max.\ \sigma_m^{exp} = 1{,}37\ \sigma_m^n, \tag{7}$$

respectiv

$$\max.\ \sigma_m^{exp} = 0{,}19\ \sigma_{m\,nom}^{calc}. \tag{8}$$

Desigur, formulele (5)—(8) sînt adevărate, deocamdată, numai într-o *primă aproximație* ($\beta = 6°$, $\alpha' = 168°$).

6) Eforturile unitare măsurate în planurile transversale A, B, C, D și E, pe de o parte, respectiv în planurile transversale A', B', C', D' și E', pe de altă parte, diferă puțin semnificativ între ele (fig. 7), evidențiindu-se o anumită *sporire* a intnsității lor numai și în special cu *creșterea* unghiului β (fig. 8).

7) În planurile transversale A, eforturile unitare, măsurate pe cale tensometrică (σ_t^{exp} și σ_m^{exp}), *nu sînt uniforme* de la intrados, prin coamă, la extrados, ci au o *distribuție neuniformă*, așa cum rezultă din epurile redate în figurile 8. Caracterul distribuției respective se păstrează ca atare și în celelalte planuri transversale (de ex. C — fig. 8, *c*), însă distorsiunea corespunzătoare zonei de coamă se *atenuează* pe măsura îndepărtării — în direcție longitudinală — de planul de referință al îngenuncherii (frîngerii). Această din urmă valoroasă constatare experimentală este o primă dovadă concludentă a *efectului cvasilocal* al abaterii de formă geometrică de tipul studiat (îngenunchere, frîngere). Așadar, în planurile transversale apropiate suficient de planul de referință al îngenuncherii (frîngerii), eforturile unitare *cresc* ușor de la intrados către coamă, prezintă un *minim* pronunțat la coamă și apoi *scad* ușor de la coamă înspre extrados, intensitatea lor la extrados fiind *mai mică*, însă, decît la intrados. Prin urmare, solicitarea cea mai puternică revine *zonei dintre coamă și intrados*. Pentru cele trei modele tubulare testate, cu $\beta \in [2°; 10°]$, a rezultat :

$$\sigma_t^{exp}/\sigma_m^{exp} = 0{,}939...2{,}273, \tag{9}$$

respectiv :

$$\sigma_m^{exp}/\sigma_t^{exp} = 1{,}065...0{,}440, \tag{10}$$

confirmîndu-se efectul *amplificator* deosebit resimțit de către eforturile unitare longitudinale, ca o consecință a existenței îngenuncherii (frîngerii).

8) Graficele comparative redate în figurile 9 reconfirmă, în totalitate şi sugestiv, cele consemnate la punctele 5—7. În plus, graficele respective evidenţiază o *mare neconcordanţă* între rezultatele experimentale şi cele obţinute pe cale analitică $\sigma_{t\,nom}^{calc}$ şi $\sigma_{m\,nom}^{calc}$, a căror intensitate este amplificată excesiv de mult. Urmează ca, prin extinderea ulterioară a cercetărilor teoretico-experimentale şi valorificarea posibilităţilor furnizate de metoda elementului finit, să se identifice — în mod cert — sursele neconcordanţei evidenţiate şi, totodată, să se opereze corecţiile ce se vor impune.

9) Pentru $\beta \in [2°; 10°]$, în condiţiile $\varphi = 1{,}00$ şi $p = 100$ bar, au fost obţinute — în final — următoarele expresii aşa-zise *experimentale* (tab. 5—8) :

$$\sigma_t^{exp}/\sigma_t^n = 0{,}69\ldots1{,}41, \tag{11}$$

$$\sigma_m^{exp}/\sigma_m^n = 0{,}73\ldots1{,}44, \tag{12}$$

$$\sigma_t^{exp}/\sigma_{t\,med}^{calc} = 0{,}25\ldots0{,}93, \tag{13}$$

$$\sigma_m^{exp}/\sigma_{m\,med}^{calc} = 0{,}06\ldots0{,}40, \tag{14}$$

rezultînd :

$$\max.\ \sigma_t^{exp} = 1{,}41\ \sigma_t^n, \tag{15}$$

$$\max.\ \sigma_m^{exp} = 1{,}44\ \sigma_m^n, \tag{16}$$

$$\max.\ \sigma_t^{exp} = 0{,}93\ \sigma_{t\,med}^{calc}, \tag{17}$$

$$\max.\ \sigma_m^{exp} = 0{,}40\ \sigma_{m\,med}^{calc}, \tag{18}$$

aceste din urmă expresii generalizatoare cuprinzînd şi formulele cunoscute (5)—(8).

CONCLUZII PRINCIPALE

Date fiind constatările sintetizate la punctele 1—9, se recomandă ca, pentru scopurile *practice* imediate, eforturile unitare *maxime*, inelare $\sigma_{t\,max}$ şi longitudinale $\sigma_{m\,max}$, să fie determinate — în condiţiile prezenţei unor abateri de formă geometrică de tipul îngenuncherii (frîngerii) — cu următoarele formule, *corectate* :

$$\sigma_{t\,max} = 0{,}93\ k_t \sigma_t, \tag{19}$$

$$\sigma_{m\,max} = 0{,}40\ k_m \sigma_m, \tag{20}$$

în care

$$\sigma_t = \frac{pD_m}{2s}\ ;\ \sigma_m = \frac{pD_m}{4s}, \tag{21, 22}$$

$$k_t = 1 + 0{,}8482\ \varphi \sqrt{\frac{D_m}{s}(2\cos\alpha)}, \tag{23}$$

$$k_m = 1 + 5{,}6549\ \varphi \sqrt{\frac{D_m}{s}(2\cos\alpha)}, \tag{24}$$

sau cu următoarele formule, *aproximative*:

$$\sigma_{t\,max} = 1{,}41 \quad \sigma_t = 0{,}705 \frac{pD_m}{\varphi s}, \tag{25}$$

$$\sigma_{m\,max} = 1{,}44 \quad \sigma_m = 0{,}36 \frac{pD_m}{\varphi s}, \tag{26}$$

în acest din urmă caz rezultînd:

$$\sigma_{t\,max} / \sigma_{m\,max} = 0{,}705/0{,}36 = 1{,}9583, \tag{27}$$

respectiv

$$\sigma_{m\,max} / \sigma_{t\,max} = 0{,}5106 \rightarrow 51{,}06\ \%. \tag{28}$$

Evident, încă se impune continuarea cercetărilor teoretico-experimentale, folosindu-se baza de testare deja existentă la Institutul de petrol şi gaze Ploieşti. Totodată, se consideră ca fiind necesară o simulare pe calculator, în acest scop urmînd a fi valorificate posibilităţile metodei elementului finit.

Primită la redacţie la 25 februarie 1985

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 44 1985

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
BĂDESCU, N., VIOREL POPA, Asupra răsucirii împiedicate a barelor cu secţiune dreptunghiulară subţire	3	286
BOTICI, AL. v. MUNTEANU, I.	3	303
CARABA, I. v. MUNTEANU, I.	3	303
CÂRDU, M., N. N. TĂTARU, Unele aspecte ale relaţiei dintre geometria difuzoarelor cu secţiune circulară şi caracteristicile termodinamice ale curgerii	3	239
COLUMBEANU, I., AL. D. STAN, Asupra unor sisteme de etanşare	2	121
COLUMBEANU, I., AL. D. STAN, Rugozitatea la spaţiile axiale cu deschideri reduse	4	396
CONSTANTINESCU, D., T. V. HUNCKER, I. MOHORA, M. PETRE, Metodă de calcul a îmbinărilor filetate cu umăr. II	1	51
III	2	181
IV	3	309
CONSTANTINESCU, V. N., S. GĂLEŢUŞE, Asupra mişcării laminare şi turbulente în ajutaje conice	4	323
CONSTANTINESCU, V. N., I. JADIC, Consideraţii asupra metodelor cu panouri din aerodinamică	6	536
CREŢU, O. S., Sincronizarea liberă a poziţiilor elementelor intermediare ale variatoarelor cu tracţiune	5	499
CULIN, M. v. PAVEL, A.	2	154
DAVID, I., Model de calcul pentru drenajul subteran reversibil în subirigaţie	4	376
ERHAN, M. v. SETEANU, I.	2	115
ERHAN, M. v. SETEANU, I.	4	356
ERHAN, M. v. SETEANU, I.	5	439
ERHAN, M. v. SETEANU, I.	6	530
FITI, AL., Asupra ecuaţiei constitutive a fluidelor simple în cadrul mişcărilor viscometrice	4	406
GĂLEŢUŞE, S. v. CONSTANTINESCU, V. N.	4	323
HANDRA-LUCA, V., Studiul geometrico-cinematic al pompelor trohoidale	3	278
HUNCKER, T. V. v. CONSTANTINESCU, D.	1	51
HUNCKER, T. V. v. CONSTANTINESCU, D.	2	181
HUNCKER, T. V. v. CONSTANTINESCU, D.	3	309

	Nr.	Pag.
IACOB, C., Asupra axiomelor Mecanicii șocurilor și a generalizării teoremei lui Lazare Carnot	2	105
IATAN, R. I., M. RENERT, Cercetări experimentale privind starea de tensiuni în zona cilindrică a construcțiilor cu flanșe cu nervuri	4	384
IEREMIA, M., Încărcarea transversală limită pentru o placă dreptunghiulară cu diferite rezemări pe contur	6	569
IONESCU, V., I. TUTUNEA, AL. TURTĂ, Influența frecării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul liniar. I	3	217
II	4	363
IONESCU, V., I. TUTUNEA, AL. TURTĂ, Influența frecării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul radial	5	420
JADIC, I. v. CONSTANTINESCU, V. N.	6	536
KECS, W. W., Determinarea imaginilor Laplace inverse ale unor funcții hiperbolice	5	476
LUCA, IOANA, EUGEN SOÓS, Termostatica fluidelor termoelastice. I. Echilibrul termic local	6	505
MIHALACHE, N., v. POTERAȘU, V. F.	5	445
MINESCU, FL. v. SOARE, ELENA	5	465
MOHORA, I. v. CONSTANTINESCU, D.	1	51
MOHORA, I. v. CONSTANTINESCU, D.	2	181
MOHORA, I. v. CONSTANTINESCU, D.	3	309
MUNTEANU, I., I. CARABA, AL. BOTICI, Probleme de dinamică la structurile de susținere ale agregatelor eoliene cu ax orizontal	3	303
MUȘAT, S. D., Metodă matriceală pentru studiul încovoierii grinzii continue pe reazeme elastice interdependente	1	76
MUȘAT, S. D., Aspecte noi privind transmiterea mișcării mecanice	3	268
ONU, G., Calculul tablierelor de pod cu secțiune deformabilă	1	27
ONU, G., Linii, suprafețe și spații de influență prin metoda elementelor finite	6	574
PAVEL, A., Studiul tensometric al abaterilor de ansamblu, de tipul fringerilor sau îngenuncherilor, la sistemele tubulare presurizate la interior	6	585
PAVEL, A., L. RIZEA, M. CULIN, Asigurarea antiseismică a rezervoarelor sferice prin acordarea tiranților	2	154
PETRE, M. v. CONSTANTINESCU, D.	1	51
PETRE, M. v. CONSTANTINESCU, D.	2	181
PETRE, M. v. CONSTANTINESCU, D.	3	309
POPA, V. v. BĂDESCU, N.	3	286
POTERAȘU, V. F., N. MIHALACHE, Tensiuni și deplasări în elementele plane elastice cu metoda elementelor de frontieră. I. Analiza statică	5	445
RENERT, M. v. IATAN, R. I.	4	384
RIZEA, L. v. PAVEL, A.	2	154
SETEANU, I., M. ERHAN, Determinarea dimensiunilor optime ale albiilor barate și îndiguite în funcție de regimul infiltrațiilor	2	115
SETEANU, I., M. ERHAN, Metode analitico-numerice în studiul mișcării fluidelor grele cu suprafața liberă	4	356
SETEANU, I., N. ERHAN, O problemă bilocală la limită în studiul infiltrației plane permanente	5	439

	Nr.	Pag.
SETEANU, I., M. ERHAN, Contribuţii noi la studiul mişcării laminare a fluidului viscos. I. Vîrtejul fizic pe frontierele solide	6	530
SOARE, ELENA, FL. MINESCU, Aspecte ale curgerii inelare în canale capilare.	5	465
SOÓS, E., Constante efective şi probleme la limită în teoria statistică a materialelor compozite. Aproximaţia corelaţională	4	335
SOÓS, E. v. TRUICĂ, N.	1	3
SOÓS, E. v. TRUICĂ, N.	2	133
SOÓS, E. v. LUCA, IOANA	6	505
SPULBER, C. v. SPULBER, I.	1	65
SPULBER, C. v. SPULBER, I.	3	297
SPULBER, I., C. SPULBER, Contribuţii la studiul influenţei stratului limită asupra dinamicii supapelor de siguranţă	1	65
SPULBER, I., C. SPULBER, Contribuţii la studiul influenţei salturilor de viteză din stratul limită asupra dinamicii supapelor de presiune.	3	297
STAICU, ŞT., Expresii matriceale pentru viteze şi acceleraţii în mişcarea compusă a sistemelor	3	257
STAN, AL. D. v. COLUMBEANU, I.	2	121
STAN, AL. D. v. COLUMBEANU, I.	4	396
STROE, I., Asupra mişcării plane a vehiculului spaţial în prezenţa unui centru atractiv	5	413
STROE, I., Perturbaţiile mişcării centrului de masă al vehiculului spaţial date de mişcarea în jurul centrului de masă	6	555
TĂTARU, N. N. v. CÂRDU, M.	3	239
TEODORESCU, P. P., Cîteva consideraţii asupra dezvoltării modelelor matematice ale mecanicii, I	1	85
II	2	201
TRUICĂ, N., E. SOÓS, Studiul oscilaţiilor de torsiune din transmisia unui automobil pe un model visco-elastic liniar cu două mase. I. Modelul matematic	1	3
II. Determinarea soluţiei	2	133
TURTĂ, AL. v. IONESCU, V.	3	217
TURTĂ, AL. v. IONESCU, V.	4	363
TURTĂ, AL. v. IONESCU, V.	5	420
TUTUNEA, I. v. IONESCU, V.	3	217
TUTUNEA, I. v. IONESCU, V.	4	363
TUTUNEA, I. v. IONESCU, V.	5	420
ŢAROG, D., Structuri planare tridirecţionale. Analogia cu un mediu continuu echivalent. II	1	18
UNGUREANU-DAVID, ELENA, Mişcarea cu suprafaţă liberă a apei subterane într-un mediu poros bistratificat	6	524
VLASE, S., O metodă de eliminare a forţelor de legătură din ecuaţiile de mişcare ale sistemelor mecanice cu legături	6	547

MINISTERUL PETROLULUI

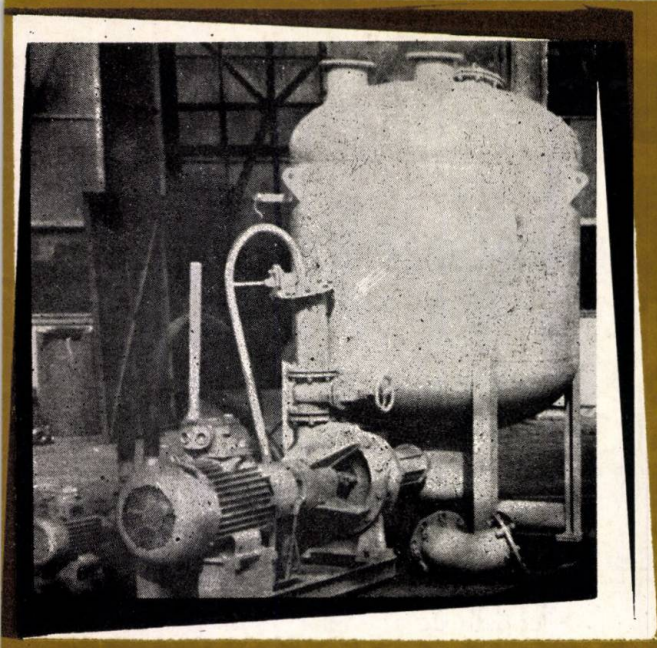
ÎNTREPRINDEREA DE UTILAJ PETROLIER ȘI REPARAȚII TELEAJEN—PLOIEȘTI

Șos. Mihai Bravu Nr. 243

Execută:

A UTILAJE ȘI ECHIPAMENTE PENTRU INDUSTRIA PETROLIERĂ :

- instalații preparare și circulația noroiului pentru inst. de foraj F 100 – F 125 – F 200 – F 320 și F 400,
- parcuri de separatoare în sistem închis, modulizat,
- unități de pompare de 5–7 și 9 tone,
- instalații de frezat dopuri de ciment, cu acționare hidrostatică,
- instalații centrifugale pentru separarea baritei din fluidele de foraj,
- macarale de producție,
- geamblacuri de producție,
- capete hidraulice 12,5 – 20 și 32 tone,
- masturi de producție de 20 to.,
- cîrlige de 50 tone,
- capete de pompare de 64 și 140 bar,
- capete de erupție de 140 – 210 și 350 bar (pentru țiței și pentru gaze),
- capete de coloană simple, duble și triple de 210 și 350 bar,
- prevenitoare de erupție 6″ × 210 și 6 × 140 bar,
- pompe alimentare autovehicule (pentru benzină și motorină),
- scule și dispozitive pentru forajul sondelor și extracția țițeiului (elevatori, pene lungi, patrați mari și mici, antrenori multidimensionali, depănătoare de cablu, centrori, scarificatori, inele de oprire etc.)



B REPARAȚII CAPITALE LA UTILAJELE ȘI ECHIPAMENTELE INSTALAȚIILOR DE FORAJ ȘI PRODUCȚIE :

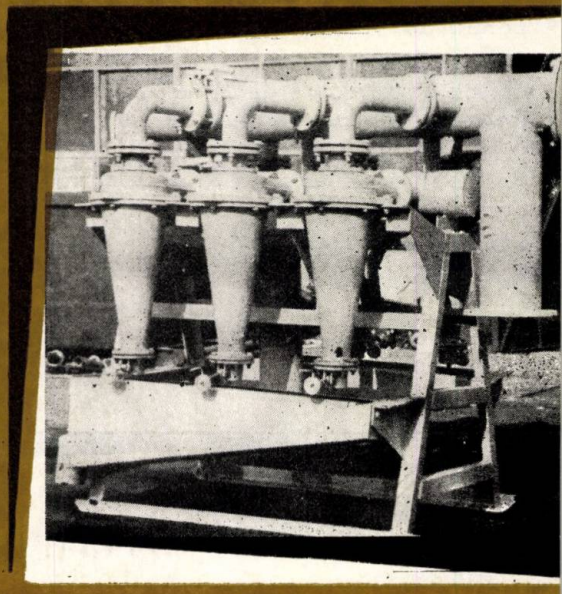
- Instalații transportabile tip T 50 – F 50 – F 100, P 20 – P 32 – P 80.
- geamblacuri de foraj și producție,
- macarale și macarale cîrlig,
- capete hidraulice,
- mese rotative și grupuri antrenare mese rotative,
- trolii de foraj și transmisii intermediare,
- pompe de foraj și pompe de producție,
- reductoare de la unități de pompare de 1,5 la 15 tone.

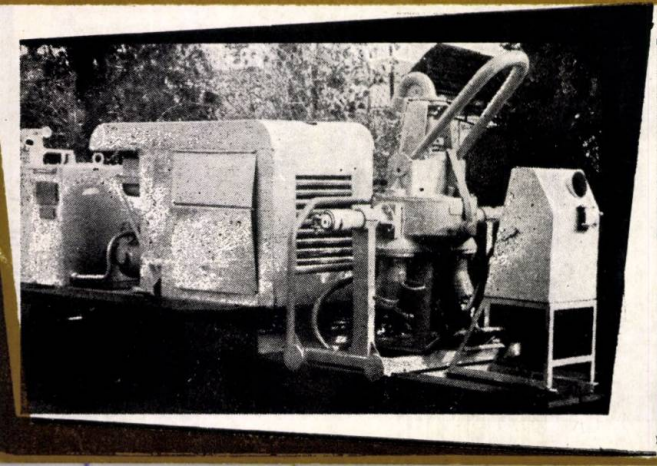
C O GAMĂ LARGĂ DE PIESE DE SCHIMB ȘI SUBANSAMBLE PENTRU UTILAJE PETROLIERE

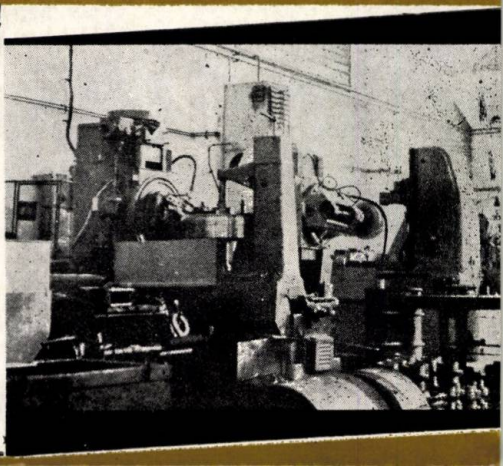
- roți de lanț, axe, legături rapide, coturi articulate, cuplaje dințate, ventile cu ac, tamburi de frînă pentru trolii, curbe și stuțuri, cu și fără filet, de 2 – 3 și 4 in, etc.

D SEMIFABRICATE FORJATE ȘI MATRIȚATE

- semifabricate turnate din oțel, fontă și aliaje neferoase.







Upet

ÎNTREPRINDEREA DE UTILAJ PETROLIER TÎRGOVIŞTE

Ⓐ *MARCA FABRICII înregistrată în:*

UNGARIA
ITALIA
LICHTENSTEIN
MAROC
MONACO
PORTUGALIA
R.D. GERMANĂ
IRAK
ELVEŢIA
VIETNAM
POLONIA
ALBANIA
IORDANIA
SIRIA
OLANDA
GRECIA
TURCIA
SAN-MARINO
BRAZILIA
IUGOSLAVIA
TUNISIA
R.F. GERMANIA
AUSTRIA
BELGIA
LUXEMBURG
PACHISTAN
DANEMARCA
EGIPT
SPANIA
CEHOSLOVACIA
FRANŢA

DUPĂ LICENŢA API SE EXECUTĂ URMĂTOARELE:

- CAPETE HIDRAULICE
- MACARALE
- GEAMBLACURI
- RACORDURI SPECIALE PENTRU SUDARE LA PRĂJINI
- REDUCŢII ROTARY
- MESE ROTATIVE ŞI PIESELE COMPONENTE
- POMPE DE NOROI ŞI PIESELE COMPONENTE

M.I.C.M.
C.I.U.P.C.M.
Ploieşti

ÎNTREPRINDEREA DE UTILAJ PETROLIE

Strada 23 August Nr. 20 Tîrgovişte cod. 0200
telefon 31.600 telex 17236.

PRODUCE ŞI LIVREAZĂ

UTILAJ PETROLIER

A. INSTALAŢII DE FORAJ SONDE DE ŢIŢEI ŞI GAZE

- **Instalaţii deplasabile montate pe autoşasiuri**

F 25	sarcina	maximă	25tf	adîncime	500m	cu acţionare	diesel		
F 50	—„—	—„—	50tf	—„—	1200 m	—„—	—„—		
F 80 SA	—„—	—„—	80tf	—„—	1600 m	—„—	diesel şi	electrică	
F 125 SA	—„—	—„—	125tf	—„—	2800 m	—„—	—„—	—„—	
F 160 SA	—„—	—„—	160tf	—„—	3500 m	—„—	diesel		

- **Instalaţii deplasabile montate pe remorci**

F 50	sarcina	maximă	70tf	adîncime	1200 m	cu acţionare	diesel şi	electrică	
F 100	—„—	—„—	100tf	—„—	2000 m	—„—	—„—	—„—	
F 125	—„—	—„—	125tf	—„—	2800 m	—„—	diesel		
F 150	—„—	—„—	150tf	—„—	3500 m	—„—		electrică	
F 200	—„—	—„—	200tf	—„—	4000 m	—„—	diesel		

- **Instalaţii staţionare în blocuri transportabile**

F 100	sarcina	maximă	100tf	adîncime	2000 m	cu acţionare	diesel şi	electrică	
F 125	—„—	—„—	125tf	—„—	2800 m	—„—	—„—	—„—	
F 200	—„—	—„—	200tf	—„—	4000 m	—„—	—„—	—„—	

B. INSTALAŢII DE INTERVENŢIE ŞI PUNERE ÎN PRODUCŢIE

- **Montate pe autoşasiuri**

P 6,3	sarcina	maximă	6,3tf	adîncime	650 m	cu acţionare	diesel		
P 20	—„—	—„—	20tf	—„—	2070 m	—„—	—„—		
I.C 5	—„—	—„—	28tf	—„—	2900 m	—„—	—„—	şi	electrică
P 32	—„—	—„—	32tf	—„—	3200 m	—„—	—„—		
P 50	—„—	—„—	50tf	—„—	5200 m	—„—	—„—		
P 50 SA	—„—	—„—	50tf	—„—	5200 m	—„—	—„—	şi	electrică
P 80 SA	—„—	—„—	80tf	—„—	6300 m	—„—	—„—	—„—	
P 125 SA	—„—	—„—	125tf	—„—	8000 m	—„—	—„—		

- **Montate pe remorci**

P 80 sarcina maximă 80tf, adîncimea 6300m, cu acţionare diesel şi electrică

C. RACORDURI SPECIALE ŞI REDUCŢII ROTARY

racorduri speciale înşurubate pentru prăjini de foraj

∅ 50mm; 2 3/8"; 2 7/8"; 3 1/2"; 4 1/2"; 5 1/2"; 6 6/8", cu filete STAS GOST sau API

racorduri speciale pentru sudare la prăjini de foraj

2 3/8 IF.; 2 7/8 IF.; 3 1/2 IF.; 4 1/2 IF., cu filete STAS şi API dreapta sau stînga (la cerere)

reducţii de legătură

2 3/8"; 2 7/8"; 3 1/2"; 4 1/2"; 5 1/2" în diferite combinaţii de lungimi şi diametre în construcţii

cep—cep (C—C)
cep—mufă (C—M)
mufă—mufă (M—M)

reducţii orientate cu înclinaţii de 1°–3°.

D. DIVERSE

pompe de noroi şi grupuri motopompă

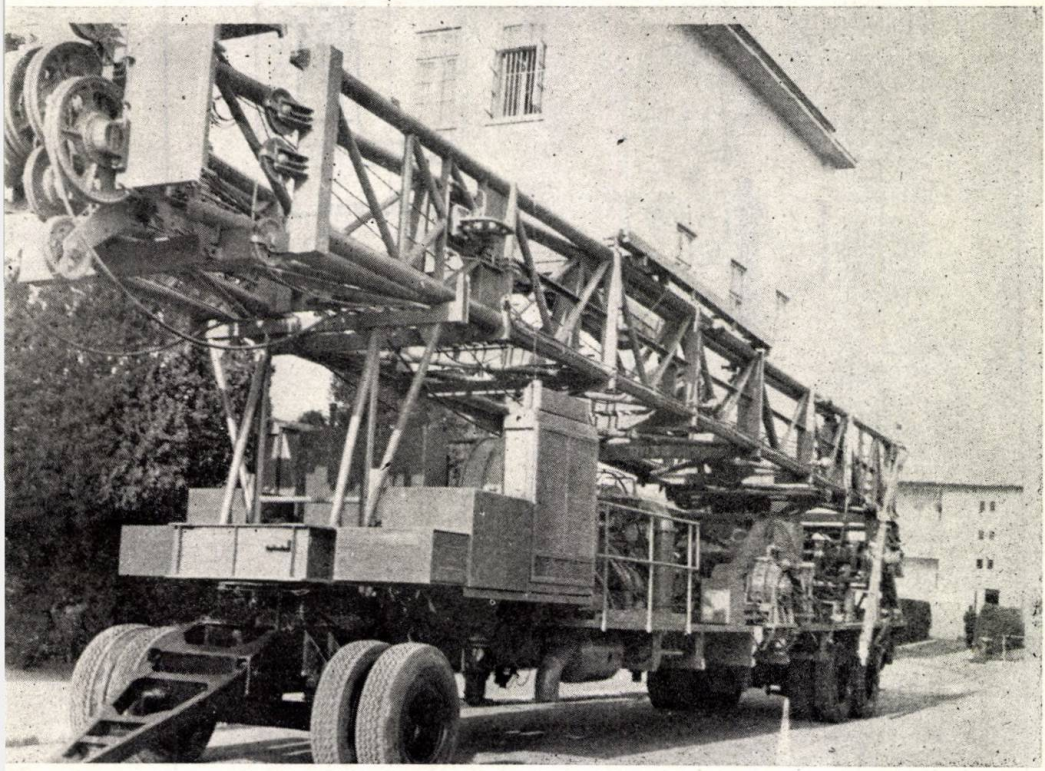
2PN 400 ; 2PN 700 (staţionare şi pe remorci)

părţi instalaţii (macarale, geamblacuri, capete hidraulic, mese rotary)

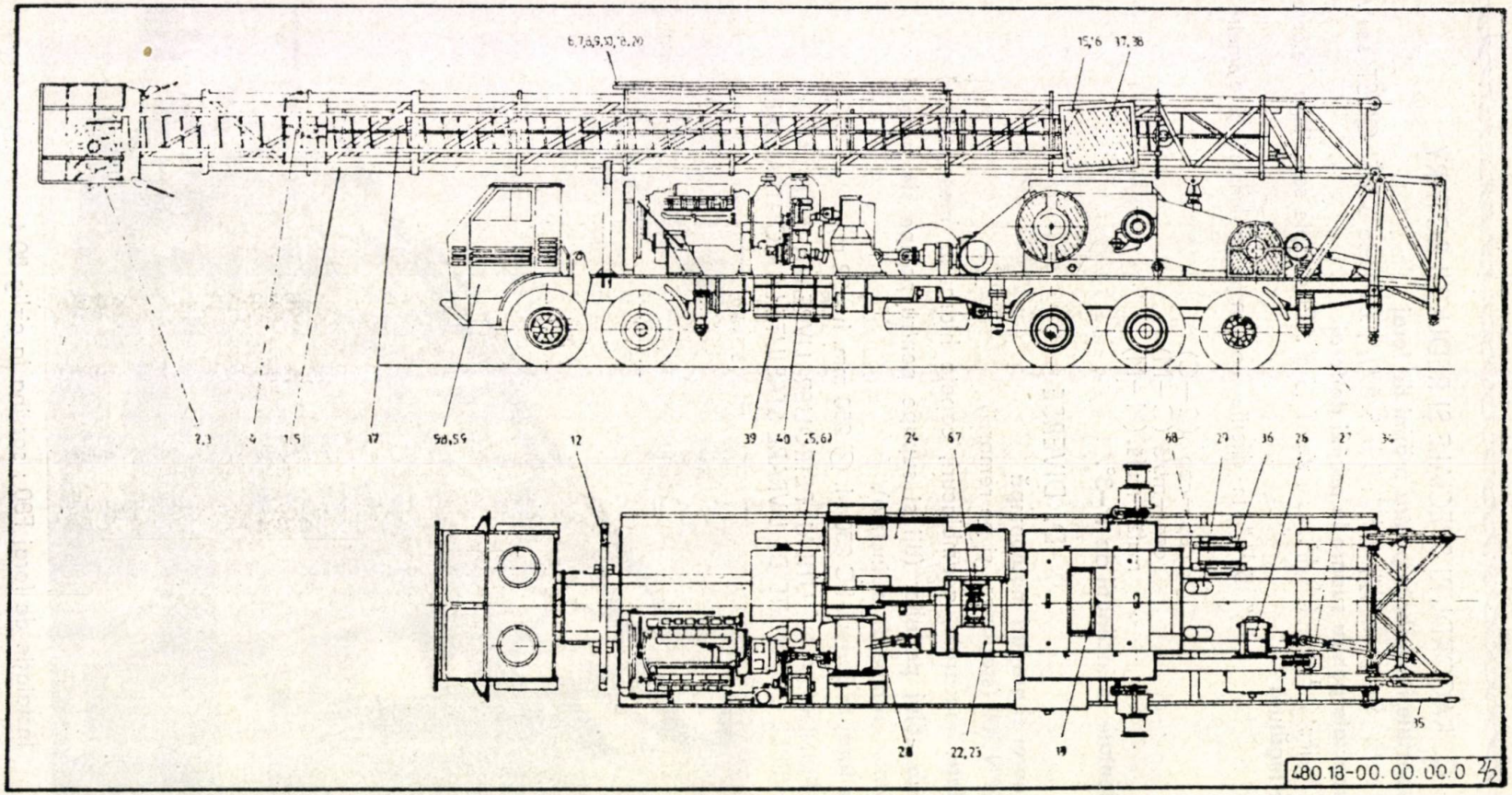
piese schimb utilaj petrolier (tiji şi supape pentru pompe de noroi, pistoane pentru pompe de adîncime).

Instalaţii de foraj în cariere FC 250 M. ∅ 250 mm. h=32 m.

ÎNTREPRINDEREA DE UTILAJ PETROLIER LIVREAZĂ INSTALAŢIILE ÎN DIVERSE COMPLETE DE LIVRARE STABILITE LA CONTRACTARE

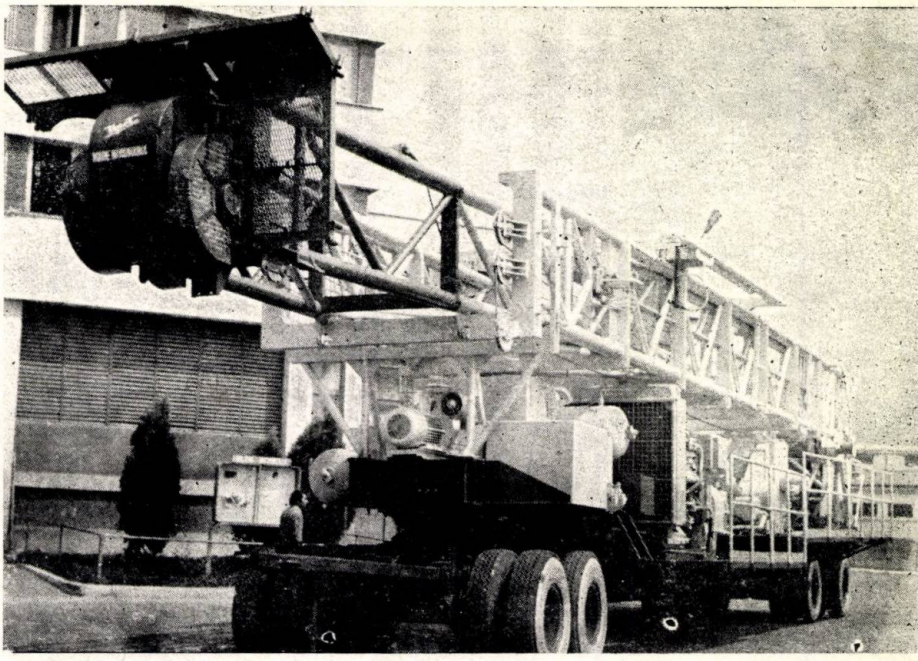


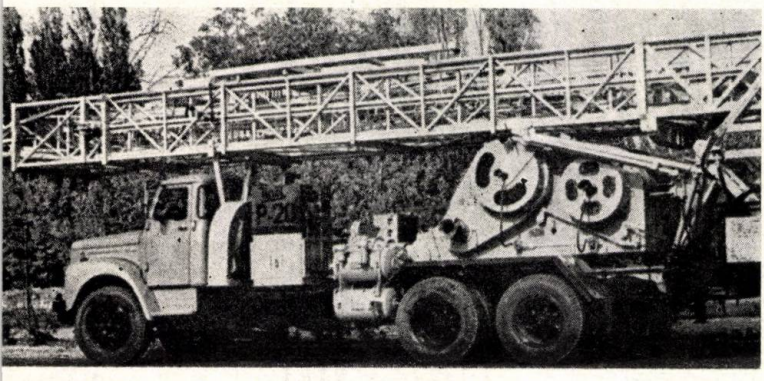
Instalaţie de foraj F80 ; sarcina la cîrlig 80 t.



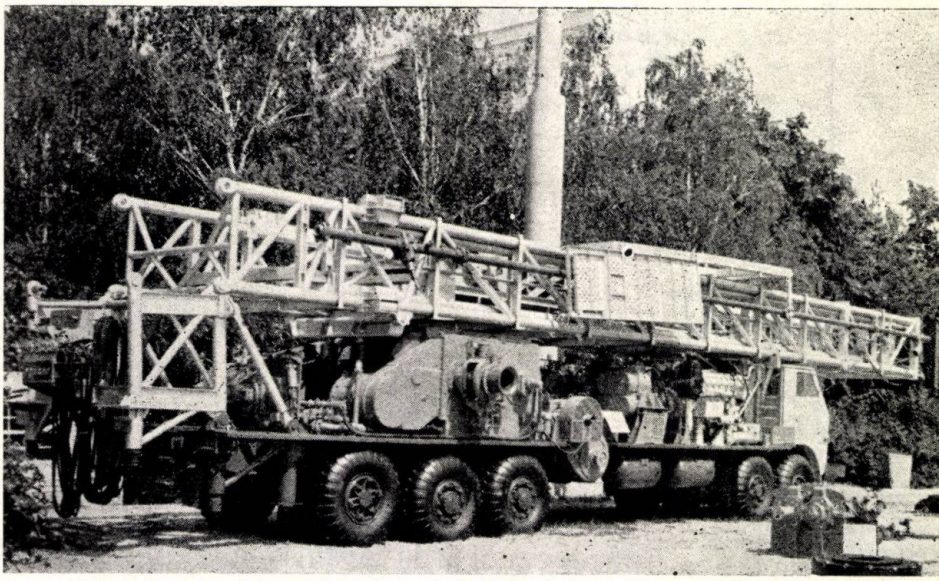
Instalație de foraj F 125 – SA pe șasiu, autopropulsat.

ţie de foraj trans-
ilă pe remorcă
5 — 2 DHT, sar-
a cîrlig 125 t.

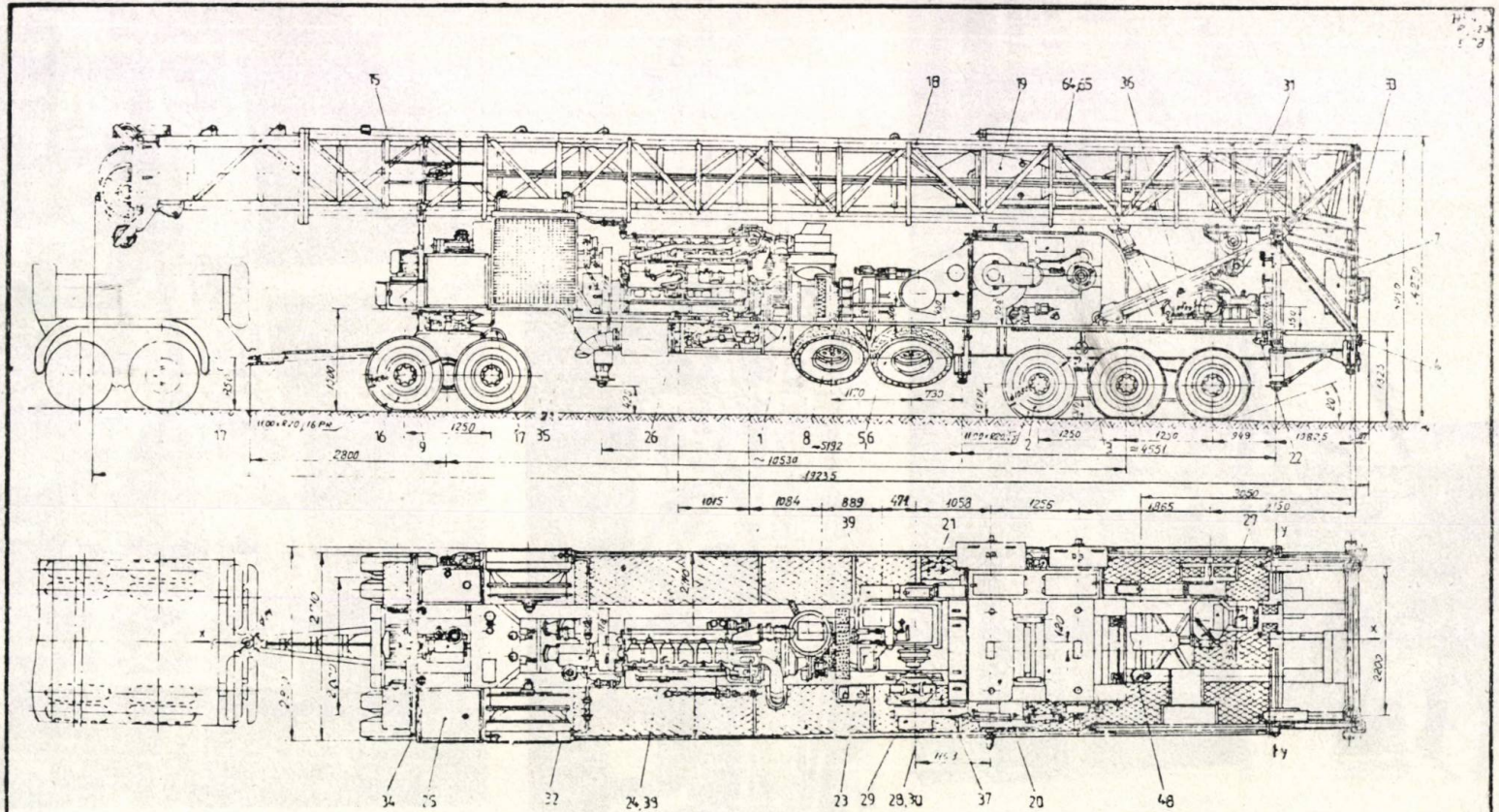




Instalaţie de intervenţie şi punere în producţie, P 80, montată pe şasiu SCANIA — VALIS.

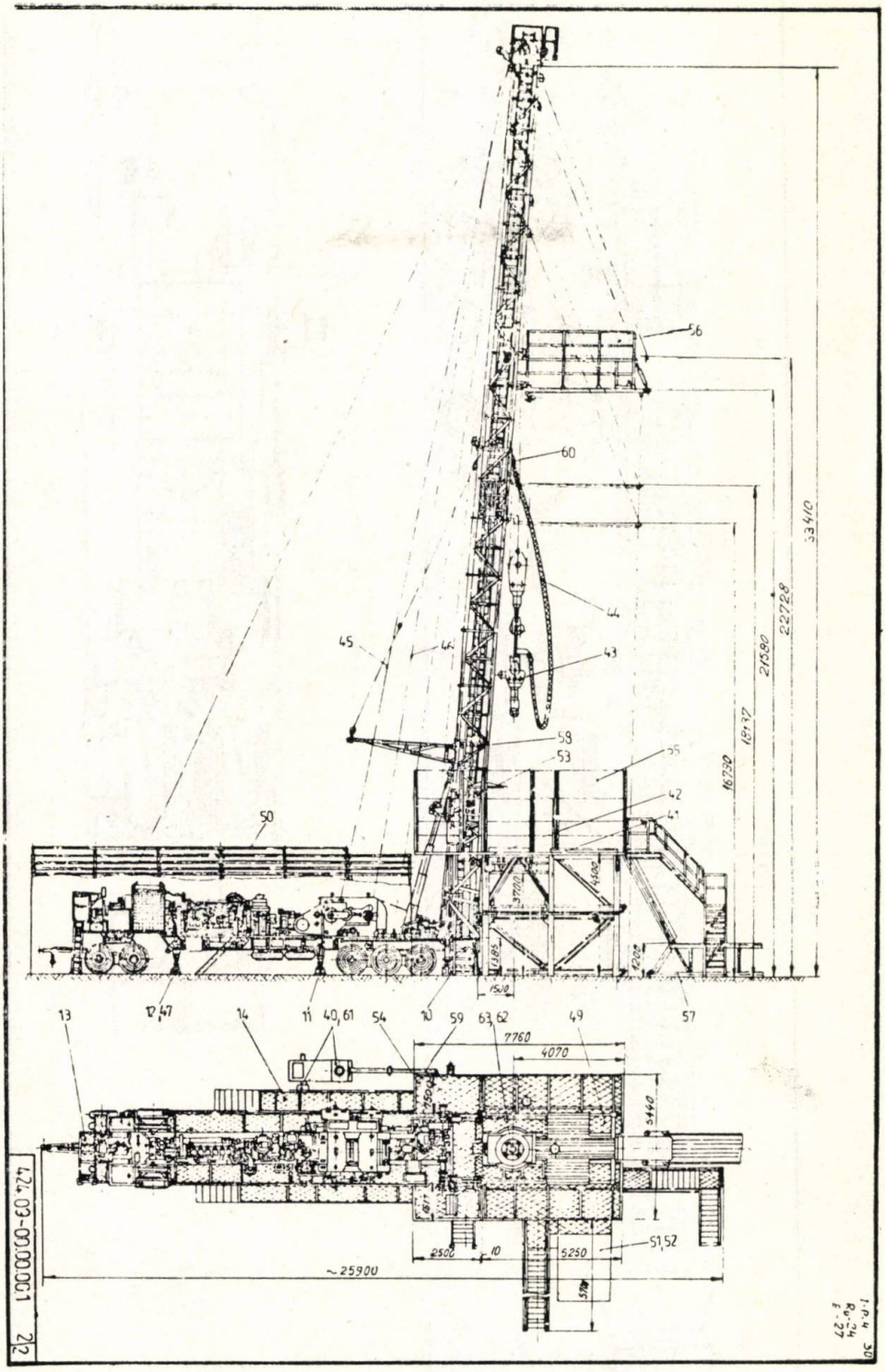


ţie de intervenţie
nere în fabricaţie
— SA.

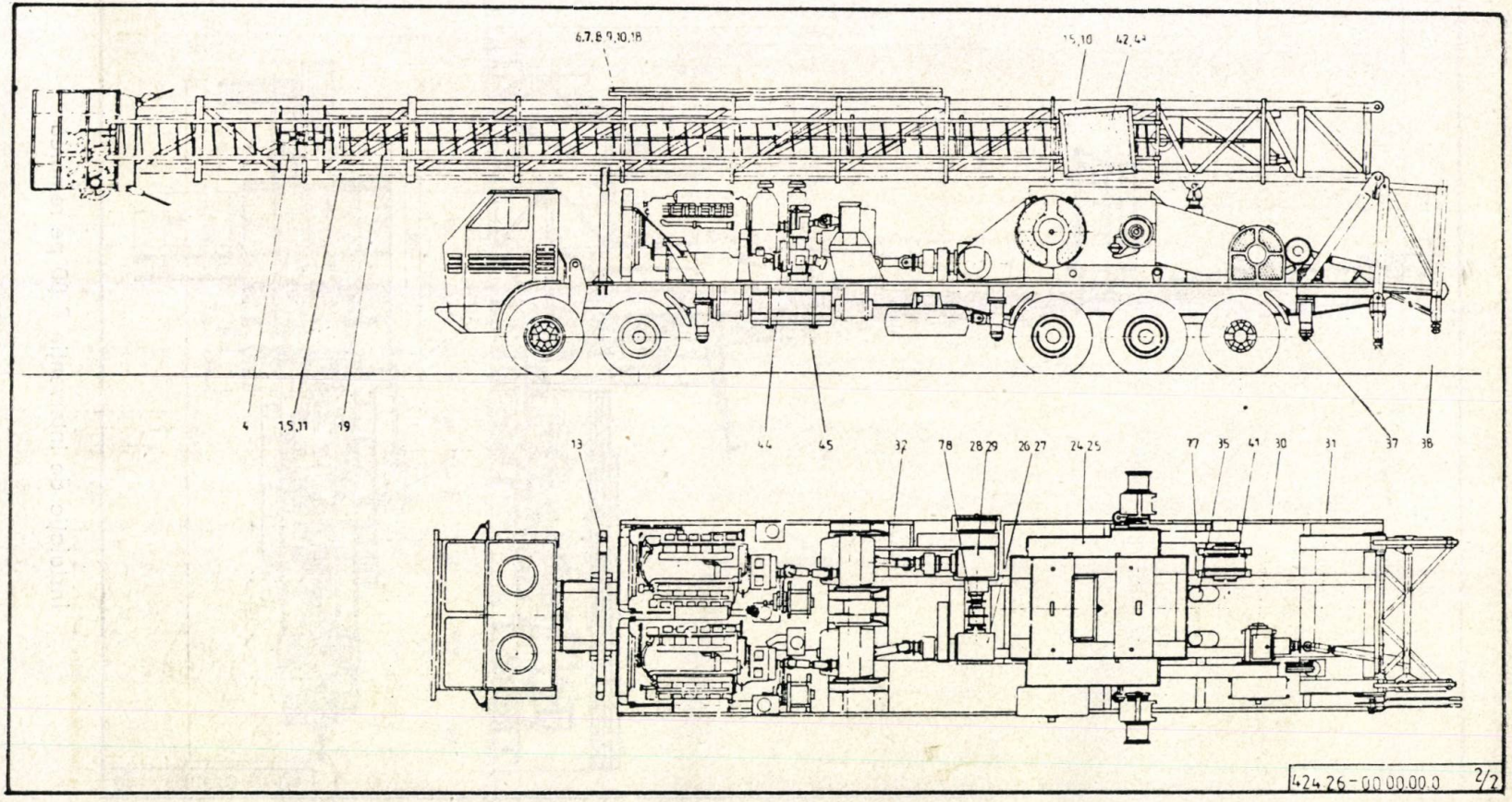


424.09-00.00.00.1 1/2

Instalație de intervenție P 80 pe remorcă.



Instalație de intervenție P 80 pe remorcă.



Instalație de intervenție P 80 – SA pe șasiu autopropulsat.

MINISTERUL ENERGIEI ELECTRICE

INSTITUTUL DE CERCETĂRI ŞI MODERNIZĂRI ENERGETICE

ICEMENERG

Bd. ENERGETICIENILOR 8 ● SECTORUL III
79619 BUCUREŞTI ● Telefon : 214630 ; 206730
Telex : ICEMENERG 10783 ● CONT: 30.11.8.01.01
BNRSR Filiala Sector III BUCUREŞTI

ICEMENERG

dispune de laboratoare şi personal specializat pentru execuţia de lucrări, în principal orientate în următoarele domenii :

- optimizarea exploatării instalaţiilor din centralele termoelectrice
- studii, cercetări şi lucrări de asistenţă tehnică privind funcţionarea optimă a echipamentelor electroenergetice din centrale, reţele, staţii electrice şi posturi de transformare
- proiectare, execuţie şi asistenţă tehnică pentru punerea în funcţiune a echipamentului de exploatare prin telemecanică a reţelelor electrice de tensiune înaltă şi medie.

MINISTERUL ENERGIEI ELECTRICE

INSTITUTUL DE CERCETĂRI ŞI MODERNIZĂRI ENERGETIC

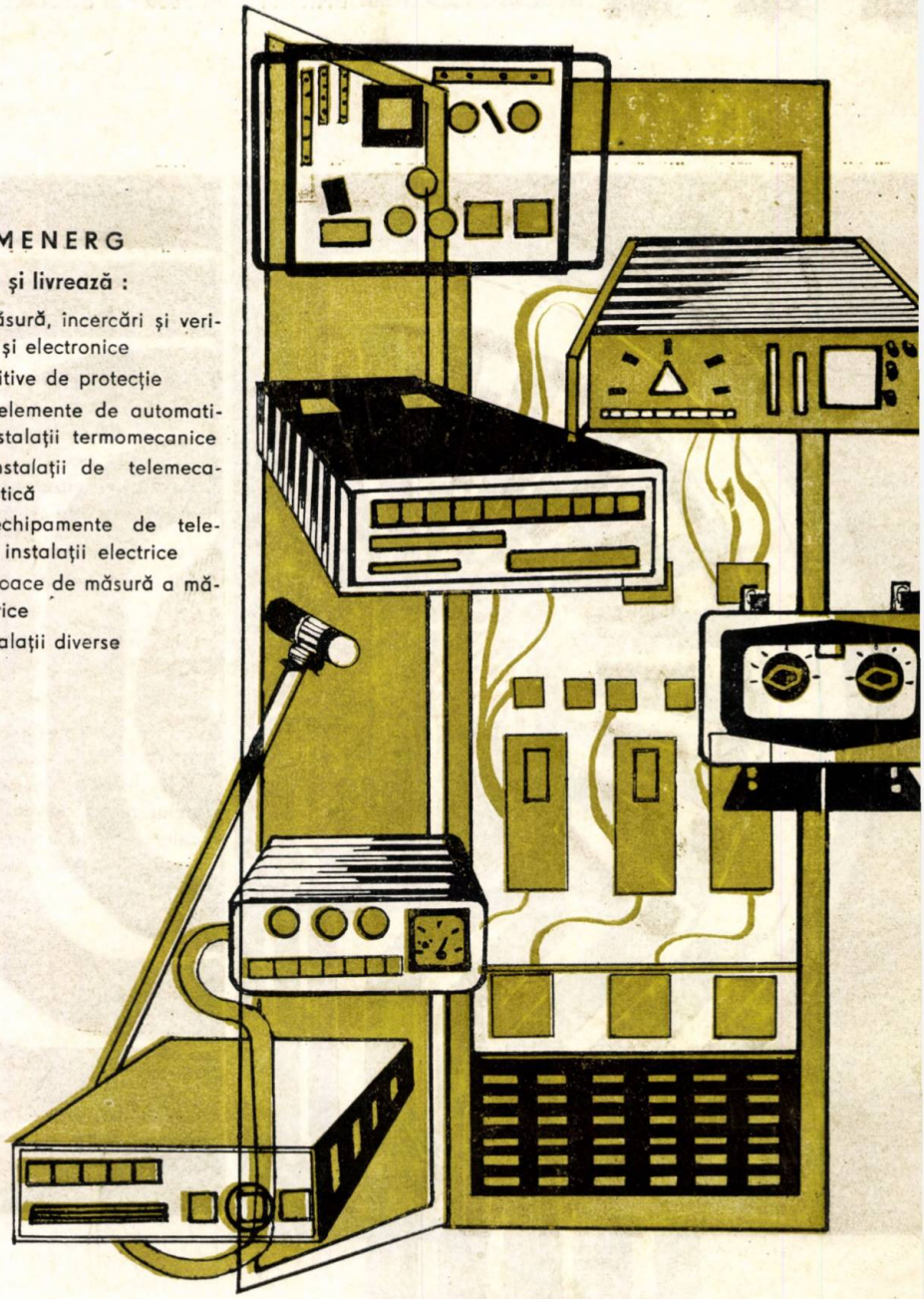
ICEMENERG

Bd. ENERGETICIENILOR 8 ● SECTORUL III
79619 BUCUREŞTI ● Telefon : 214630 ; 206
Telex : ICEMENERG 10783 ● CONT: 30.11.8
BNRSR Filiala Sector III BUCUREŞTI

ICEMENERG

execută şi livrează :

- aparate de măsură, încercări şi verificări electrice şi electronice
- relee şi dispozitive de protecţie
- dispozitive şi elemente de automatizări pentru instalaţii termomecanice
- elemente şi instalaţii de telemecanică şi automatică
- elemente şi echipamente de telecomunicaţii în instalaţii electrice
- aparate şi mijloace de măsură a mărimilor neelectrice
- aparate şi instalaţii diverse



Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, ameamenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, R — 79717, Calea Victoriei nr. 125.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

IOAN ANTON, **Cavitația**, vol. II 1985, 720 p, 88 lei.
DAN CONSTANTINESCU, **Efectele structurale ale curgerii lente a betonului**, 1985, 208 p., 19,50 lei.
GH. MĂRMUREANU, **Rezistența posteritică**, 1985, 302 p., 31 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor compresibile**, 1984, 886 p., 68 lei.
IOAN ANTON, **Cavitația**, Vol. I, 1984, 338 p., 46 lei.
C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, **Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor**, 1984, 446 p., 47 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul**, Vol. II, 1984, 244 p., 22 lei.
SERGIU T. CHIRIACESCU, **Stabilitatea în dinamica aschierii metalelor**, 1984, 188 p., 16,50 lei.
A. PAVEL, **Elastostabilitatea recipientelor cilindrice**, 1983, 310 p., 26 lei.
D. F. SĂMĂRESCU : **Difuzia cîmpului electromagnetic și aplicații**, 1983, 238, p., 20 lei.
DRAGOȘ, CIOCLOV, **Recipiente sub presiune. Analiza stării de tensiune și deformație**, 1983, 354 p., 32 lei.
V. HANDRA-LUCA, **Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor**, 1983, 260 p., 20 lei.
IOAN I. MUNTEANU, **Structuri pentru construcții. Teorie și calcul** vol. I, 1983, 198 p., 18 lei.
ȘTEFAN BĂLAN, VALERIU CRISTESCU , ION CORNEA (sub redacția), **Cutremurul de pămînt din România de la 4 martie 1977**, 1982, 516 p., 105 lei.
ALEXE MARINESCU, **Probleme optimale în dinamica zborului spațial**, 1982, 253 p., 20 lei.
GORUN MANOLESCU, **Abordarea ierarhic structurată și informatică**, 1982, 192 p., 14,50lei.
VOICU DOLOCAN, **Fizica joncțiunilor cu semiconductoare**, 1982, 320 p., 30 lei.
A. CARABULEA, I. GH. CARABOGDAN, **Modele de bilanțuri energetice reale și optime**, 1982, 326 p., 39 lei.
DAN TEODORESCU, **Modele stohastice**, 1982, 246 p., 20 lei.
ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor incompresibile**, 1981, 630 p., 44 lei.
VALERIU PETCU, GEORGETA STĂNCULESCU, UMBERTO PANCALDI, **Adaptabilitatea plastică a structurilor din beton armat**, 1981, 236 p., 12 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria științelor în România : Matematica, Mecanica, Astronomia**, 1981, 168 p., 9 lei.
LIVIU DUMITRAȘCU, IOACHIM ALEXANDRU, **Tehnici de construire a programelor cu structuri alternative**, 1981, 295 p., 20,40 lei.
TITUS PETRILĂ, **Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați**, 1981, 239 p., 10,50 lei.
ION BOLDEA, **Vehicule cu pernă magnetică**, 1981, 283 p., 16 lei.
MIHAI FLORESCU, EDMOND NICOLAU, EUGENIU NICULESCU-MIZIL, **Istoria științelor în România. Cibernetica**, 1981, 229 p., 10,50 lei.
DAN MATEESCU, IOSIF APEPLTEAUER, EUGEN CUTEANU, **Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel**. 1981, 327 p., 26 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
– SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
– SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

RN–ISSN 0038–4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 44, NR. 6, 1985, P. 503–614

I. P. Informația c. 1543

Lei 55.–
$ 69 pour un abonnement annuel